Banach空间几何理论

俞鑫泰 编著



华东师范大学出版社



统一书号：13135·024
定　价：　2.80 元

Banach空间几何理论

俞鑫泰　编著

华东师范大学出版社

Banach 空间几何理论

俞鑫泰　编著

华东师范大学出版社出版
（上海中山北路 3663 号）
新华书店上海发行所发行　　上海商务印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32　印张：14.25　字数：360 千字
1986 年 8 月第一版　1986 年 8 月第一次印刷
印数：1—5,000 本

统一书号：13135·024　　定价：2.80 元

序

Banach 空间理论是泛函分析的重要组成部分．虽然，一般而论，泛函分析中各种空间理论的研究首先是为算子理论服务的，但是，正如群论在历史上的产生原本出于解代数方程的需要，后来却由于本身的兴趣而发展成为独立的分支一样，Banach 空间理论也有类似情况．

自从 1932 年 Banach 的名著《Théorie des operations lineaires》问世以来，Banach 空间即受到广泛的重视与研究．至于 Banach 空间本身的理论(包括几何理论)，除了个别突破(Clarkson, James)之外在六十年代以前，进展是相当缓慢的．以致长期以来，人们只知道有 Hilbert 空间的几何学而不知有 Banach 空间的几何学．这种情况从六十年代以来，特别是近十年来，有了显著的改变．除了 1973 年 P. Enflo 对于 Banach 问题"在无限维可分 Banach 空间中是否一定存在基？"的否定解决最为人们所知外，举其荦荦大者，就有从支撑点和端点的思想出发来刻划线性泛函性态的 Bishop-Phelps 定理，Krein-Milman 定理以及 Choquet 定理等；有关于单位球上各种凸性、光滑性以至范数可微性的研究，它们在最佳逼近、不动点原理上有重要的应用，有 Rieffel 提出的可凹性概念，它在研究向量测度的 R-N 定理与 Banach 空间中集合的几何性质中起重要作用……，真是成果累累，方兴未艾．

象这样一个发展迅速、对整个泛函分析有影响的领域，理应得到国内数学工作者的重视．俞鑫泰同志以中等篇幅，系统而精炼地介绍了 Banach 空间几何理论的主要内容，其中包括一些最新的结果，旁及尚未解决的问题，读者由此继进，当不难直

接阅读有关的当代文献. 我在本书的酝酿中已寄予殷切的期望，于其付梓时，遂为之序.

程其襄

一九八四年十二月一日

前　言

自从 1932 年波兰著名数学家 S. Banach 的著作《Théorie des operations lineaires》出版之后，人们开始了 Banacrt 空间理论的系统研究. 由于 Banach 空间是比 Hilbert 空间更广泛的一类空间，所以 Banach 空间的研究遇到了许多与 Hilben 空间研究不同的困难.

1936 年，J. A. Clarkson 首先引入了一致凸 Banach 空间的概念. 他指出，象 Hilbert 空间一样，取值在一致凸 Banach 空间的向量测度的 Radon-Nikodym 定理仍然成立. Clarkson 开创了从 Banach 空间单位球的几何结构出发来研究 Banach 空间性质的方法. 在随后的岁月里，除了 A. Grothendieck 对 Banach 空间算子理论和逼近性质作了卓有成效的工作外，Banach 空间理论的研究进展缓慢.

六十年代以来，特别是在近十年中，Banach 空间的理论，包括它的几何理论，取得迅速的发展. 首先，许多著名的古典问题得到了解决，其中，最重要之一是 1973 年 P. Enflo 给出例子表明可分 Banach 空间未必具有 Schauder 基，从而对 Banach 的古典问题以否定的回答. 其次，许多数学家证明了有关 Banach 空间的重要定理，例如，A. C. James 化费了廿年时间，于 1972 年以较简单的方法证明了自反 Banach 空间的特征化定理，即 Banach 空间是自反的充要条件为每个连续线性泛函达到它的范数，还有著名的可达范数泛函是稠密的 Bishop-Phelps 定理，端点表示的 Choquet 定理等等. 此外，人们根据其他数学学科的需要，从各个不同的角度出发对 Banach 空间进行深入研究，促使 Banach 空间的理论(包括它的几何理论)

的面貌日新月异地变化.

各种凸性和光滑性的研究与最佳逼近密切联系在一起. 1967 年 J. J. Schäffer 考虑 Banach 空间单位球的内度量性质, 引入了单位球的 Girth 曲线概念, 研究 Banach 空间之间接近等距性质, 讨论了平坦空间(flat 空间); 1968 年 E. Asplund 从凸函数的可微性角度引入强(和弱)可微空间, 后来人们称之为 Asplund 空间 (和 w Asplund 空间). 特别地, 1967 年 M. A. Rieffel 将向量测度 Radon-Nikodym 定理与 Banach 空间中有界集的"可凹性"联系起来, 使得人们进一步研究这种称之为RNP 的空间, 将 Banach 空间理论(特别是它的几何理论)的研究推向了一个新的高潮, J. Diestel 和 J. J. Uhl. Jr 等数学家进一步用向量测度方法证明了许多 Banach 空间的定理. 1977 年 J. Diestel & J. J. Uhl. Jr 写了 «Vector measure» 一书, 总结了这方面的许多成果. 书中也列举了若干悬而未决的问题, 随后的年月里, 许多问题相继得到了解决. 1953 年, E. Mourier 发表了第一篇 Banach 空间中概率论的论文, 他证明了取值于 Banach 空间的随机变量的第一强大数定律仍然成立. 从此人们开始了 Banach 空间中概率论的研究, 人们发现随机过程可表示为某个函数空间上的随机变量, 并且许多基本概率定理在 Banach 空间中是否成立很大程度上取决于空间的几何结构. 现在, 取值在 Banach 空间中的鞅已经成为研究 Banach 空间的重要工具之一. 由于无限维规划论的需要, 人们经常使用的是 Hahn-Banach 定理的几何形式——分离定理. 现在已得到许多与凸分析有关的 Hahn-Banach 定理的等价形式, 例如, Krein-Rutuman 定理、Hurwicz 鞍点定理、次微分定理等等, 这些都在很大程度上推动了 Banach 空间理论, 特别是它的几何理论的发展. 在方程论中, 人们不满足于应用 Banach 压缩映像原理, 在实际问题中, 出现了一类更广泛的映像, 例如, 非扩张映像等. 1965 年, W. A. Kirk 证明非扩张映像的不动点存

在与空间的一种叫正规结构的几何性质有关．随之，人们又进一步探讨使非扩张映像的不动点存在的各种有关的空间几何结构，引入具有各种性质的 Banach 空间．同时，各种具体的古典 Banach 空间，例如，c_0，$l_p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，$C[0,1]$，$L_p[0,1]$，$(1\leqslant p\leqslant+\infty)$的性质研究，促使抽象 Banach 空间的理论进一步发展．J. Lindenstrauss 和 I. Singer 等对 Banach 空间的基的理论进行了深入的探讨，取得了丰硕成果，J. Lindenstrauss & L. Tzafriri 和 I. Singer 分别写了这方面的著作(前者涉及许多其他方面内容)．总之，由于与其他学科的联系，使 Banach 空间理论，包括它的几何理论，越来越丰富．正因为 Banach 空间理论在其他许多学科中得到广泛应用，使它显示出强大的生命力．本书试图叙述这一理论的基本内容，并且在适当章节介绍一些最新科研成果．

本书是在我系 1982 年"Banach 空间几何理论"研究生课程讲义的基础上改写而成的．

我们假定读者对拓扑空间理论、泛函分析、测度论方面的基础知识有所了解．有关内容可在江泽涵著《点集拓扑》、夏道行等著《实变函数论与泛函分析》及王建华译的 Halmos《测度论》中找到．特别地，关于拓扑空间，我们使用定向列(net)的概念，读者可参阅 A. Wilanski《Functional Analysis》(1964 年)第九章．

线性拓扑空间的基本内容是学习 Banach 空间理论的基础，本书第一部分作了简明扼要的介绍．这里要感谢复旦大学数学系杨亚立先生，他提供了许多材料．对线性拓扑空间理论有所了解的读者，可直接从第 II 部分开始阅读．

在书中，列了许多表格，以便读者更清楚地了解各种概念之间的关系．我们一般是先汇集某些结论，然后加以证明，这对许多要了解 Banach 空间几何理论概貌的读者是方便的．另外，由于若干证明冗长，往往分几步加以叙述，并且为了保持证明的

连贯性，将某些中间步骤的证明写在后面，用括号括起来，有些读者自己能得出所要结论的，可以跳过这些括号直接阅读下去.

我们希望通过本书的学习，加上阅读为数不多的参考文献，读者就可进入当代有关文献的阅读和开展科学研究.

我系开展 Banach 空间的几何理论的研究是在程其襄先生和张奠宙先生的倡导下进行的. 所以，本书的出版与他们的支持和帮助是分不开的. 中国科学院数学研究所李炳仁先生也对作者给予很多指教，在此一并表示衷心感谢.

值得提出的是，1979 年加拿大达尔豪希大学 A. C. Thompson 教授在南京大学举办"Banach 空间几何讨论班"，使作者获益很多，本书很多方面得力于兹. 在此谨向 Thompson 教授和班上各位老师表示由衷感谢.

华东师范大学数学系　俞鑫泰

1984 年 11 月 15 日

目　录

第一部分　线性拓扑空间的预备知识

第二部分　Banach 空间的几何理论

第一部分　线性拓扑空间的预备知识

第一章　线性拓扑空间

§1　线性拓扑空间的定义

我们假定大家已经对线性空间和拓扑空间有基本了解. 特别地,在下面叙述中经常使用定向列(net)的概念. 读者可参阅 A. Wilansky 著的 «Functional analysis» 第九章.

线性拓扑空间就是在一个集合中, 同时引入线性结构(+, 数乘运算)和拓扑结构,并使这两种结构是"协调的". 具体定义如下:

定义 1.1.1　X 是数域 K 上的线性空间, 若 X 中引入拓扑 τ, 满足:

(1) $(LT)_1$: $(x, y)\mapsto x+y$ 是 $(X\times X, \tau\times\tau)$ 到 (X, τ) 内连续的映像;

(2) $(LT)_2$: $(\lambda, x)\mapsto \lambda x$ 是 $(K\times X, e\times\tau)$ 到 (X, τ) 内连续的映像, 其中 e 是 K 上通常的 Euclid 拓扑, 则称 τ 为 X 上的线性拓扑, (X, τ) 为线性拓扑空间(数域 K 上的). 在不致引起混淆的情况下,称 X 为线性拓扑空间.

注 1: 上述映像的连续性若用邻域进行描述就是:

(1) 对于每两个 $x, y\in X$, 和 $x+y$ 的邻域 V_{x+y}, 总存在 x 点的邻域 V_x 及 y 点的邻域 V_y, 使 $V_x+V_y\subset V_{x+y}$.

(2) 对于任何 $x\in X$, $\lambda\in K$, 及 λx 的邻域 $V_{\lambda x}$, 总存在 x 点的邻域 V_x 及 λ 的邻域 U_λ, 使 $U_\lambda\cdot V_x\subset V_{\lambda x}$.

注 2: 上述映像的连续性若用 net 来描述就是:

(1) 若 $x_\delta \to x$, $y_\delta \to y$, 则 $x_\delta + y_\delta \to x + y$.

(2) 若 $\lambda_\delta \to \lambda$, $x_\delta \to x$, 则 $\lambda_\delta x_\delta \to \lambda x$.

显然,在范数拓扑下, Banach 空间$(X, \|\cdot\|)$是线性拓扑空间.

容易看到,若在线性空间 X 中,引入平凡拓扑 $\tau = \{\emptyset, X\}$,则(X, τ)必是线性拓扑空间.

关于线性拓扑空间的另外一些例子见 §4. 关于在线性空间 X 上引入怎样的拓扑,可以使之成为线性拓扑空间见 §3. 下面首先讨论线性拓扑空间中的一些基本的和常用的性质.

§2 一些基本性质

由于线性拓扑是与线性结构"协调"的拓扑,因此,在线性拓扑空间中,集合的代数性质与拓扑性质有很密切的联系. 我们首先引入下面仅与代数运算有关的性质.

定义 1.2.1 线性空间 X 中的集 E 叫做均衡的, 如果当 $|\lambda| \leqslant 1$ 时,有 $\lambda E \subset E$.

注: 当 X 是实数体上的线性空间时, 上述条件就是, 当 $x \in E$ 时,$[-x, x] \subset E$,其中$[-x, x] \equiv \{y; y = \alpha(-x) + (1-\alpha)x, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$.

定义 1.2.2 线性空间 X 中的集 E 叫做吸收的,如果对任 $x \in X$, 存在 $\lambda_0 > 0$, 使得当$|\lambda| \leqslant \lambda_0$ 时,有 $\lambda x \in E$.

定理 1.2.1 若(X, τ)是线性拓扑空间,则下列成立:

(1) 对任 $x_0 \in X$, 及 $c_0 \neq 0$, 映像 $x \mapsto x_0 + c_0 x$ 是 X 到 X 上的一个拓扑同胚.

(2) 若 $\mathscr{U}$ 是 0 点的邻域基(也叫局部基),则对每个 $x \in X$, $\{x+V; V \in \mathscr{U}\}$ 就是 x 的邻域基, 也就是说线性拓扑空间是齐性的.

(3) $\mathscr{U}$ 中的每个元是吸收的.

(4) 对任意 $U\in\mathscr{U}$, 存在 $V\in\mathscr{U}$, 使 $V+V\subset U$.

(5) 线性拓扑空间 (X, τ) 满足 T_3 公理, 即对任何闭集 A 及 $x\notin A$, 可以用不相交的邻域分离.

(6) $\overline{A}=\bigcap\{A+U; U\in\mathscr{U}\}$.

(7) 在线性拓扑空间 X 中下列等价:

① X 是Hausdorff 空间, 即对任何 $x, y\in X$, $x\neq y$, 存在 x, y 的邻域 V_x, V_y, 使 $V_x\cap V_y=\emptyset$(满足 T_2 公理)。

② X 是正则的, 即 X 满足 T_1 和 T_3 公理(T_1 公理定义为, 对任 $x, y\in X$, $x\neq y$, 存在 x, y 的邻域 V_x, V_y, 使 $x\notin V_x$, $y\notin V_y$).

(8) 在线性拓扑空间 X 中存在由闭的均衡集构成的 0 点邻域基.

证明: (1) 由 $(LT)_1$, $(LT)_2$ 知, 这种映像是 $1-1$, 满且双方连续的. □

由这条性质知, 开集平移是开集; 开集乘以非 0 常数仍然是开集, 对闭集亦然。并且, 由于 $A+U=\bigcup\{a+U;\ a\in A\}$. 故当 U 是开集时, 对任何集 A, 有 $A+U$ 是开集.

(2) 显然, 若 $V\in\mathscr{U}$, 则 $x+V$ 是 x 点邻域. 另一方面, 任取 x 的邻域 U_x, 则 U_x-x 是 0 点邻域, 故存在 $V\in\mathscr{U}$, 使 $V\subset U_x-x$, 从而 $x+V\subset U_x$. 因此 $\{x+V; V\in\mathscr{U}\}$ 是 x 点的邻域基. □

由这个性质知, 对线性拓扑空间来说, 任何点的邻域基是由局部基唯一决定的. 下面的讨论将使我们看到, 局部基的不同性质决定了空间的各种不同性质.

(3) 由于映像 $(\lambda, x)\mapsto\lambda x$ 在 $(0, x)$ 点连续, 从而对任何 $V\in\mathscr{U}$, 存在 $\lambda_0>0$, 当 $|\lambda|\leqslant\lambda_0$, $y\in V$ 时, 有 $\lambda y\in V$. □

(4) 由于映像 $(x, y)\mapsto x+y$ 在 $(0, 0)$ 点连续, 从而对任何 $V\in\mathscr{U}$, 存在 $V_1, V_2\in\mathscr{U}$, 使得 $V_1+V_2\subset V$, 令 $V_3=V_1\cap V_2$,

则 $V_3\in\mathscr{U}$, 且 $V_3+V_3\subset V$. □

(5) 若 $x\notin A$, A 为闭集,则 $0\notin A-x$, 且 $A-x$ 为闭集,故存在 $V\in\mathscr{U}$, 使 $V\cap(A-x)=\emptyset$, 由(4), 取 $V_1\in\mathscr{U}$, 使 $V_1+V_1\subset V$, 则 $(x+V_1)\cap(A-V_1)=\emptyset$, 由(1)、(2)即知$(X,\tau)$满足 T_3 公理. □

(6) 若 $x\in\overline{A}$, 任取 $U\in\mathscr{U}$, 则$(x-U)\cap A\neq\emptyset$, 故 $x\in A+U$. 反之, $x\notin\overline{A}$, 则由(4), 存在 V_1, $V_2\in\mathscr{U}$, 使 $(x+V_1)\cap(A+V_2)=\emptyset$, 更有 $x\notin A+V_2$, 故 $\overline{A}=\cap\{A+U, U\in\mathscr{U}\}$. □

(7) T_1+T_3(正则)$\Rightarrow T_1+T_2\Rightarrow T_2\Rightarrow$独点集是闭集$\Leftrightarrow$

$\overline{\{0\}}=\{0\}\xRightarrow{\text{由(5)}}T_1+T_3$. □

(8) ① 先证: 对任何0点邻域 W, 总存在0点均衡邻域 V, 使 $V\subset W$. 事实上, 由于$(\lambda,x)\mapsto\lambda x$在$(0,0)$点连续, 故对0点任何邻域 W, 存在 $\delta>0$, $N\in\mathscr{U}$, 使得当$|\alpha|<\delta$时, 有 $\alpha N\subset W$. 令 $V=\cup\{\alpha N; |\alpha|<\delta\}$即可.

② 再证: 均衡集的闭包是均衡集. 事实上, 设 A 是均衡集,任取 $x_0\in\overline{A}$, 及 λ_0, 使$|\lambda_0|\leqslant 1$. 由于$(\lambda,x)\mapsto\lambda x$在$(\lambda_0,x_0)$点连续,从而对任何 $V_{\lambda_0x_0}$ 存在 V_{x_0}, 使 $\lambda_0V_{x_0}\subset V_{\lambda_0x_0}$. 因为 $x_0\in\overline{A}$, 故存在 $a\in V_{x_0}\cap A$. 由于 A 是均衡的,故 $\lambda_0a\in A$, 且 $\lambda_0a\in V_{\lambda_0x_0}$, 从而 $V_{\lambda_0x_0}\cap A\neq\emptyset$, 因此 $\lambda_0x_0\in\overline{A}$.

现在来证明(8). 任取 $U\in\mathscr{U}$, 由(4)存在 $N\in\mathscr{U}$, 使 $N+N\subset U$, 由①可选0点均衡邻域 $V\subset N$, 由② $\overline{V}$ 是闭的均衡集,由(6), $\overline{V}\subset V+V\subset N+N\subset U$.

令 $\mathscr{U}'=\{V; V$ 是0点闭均衡邻域, 且存在 $U\in\mathscr{U}$, 使 $V\subset U\}$. 显然, $\mathscr{U}'$ 就是(关于同一拓扑 τ 的)一个新的局部基. □

今后, 我们约定, 在本书中, (X,τ)是 Hausdorff 的, 并且 $\mathscr{U}$ 就是由闭均衡集组成的局部基.

定理 1.2.2 若(X,τ)是线性拓扑空间,则下列成立:

(1) 若 A 是凸集,则 $\overline{A}$ 也是凸集,

同样地，若 X_0 是 X 的线性子空间，则 $\overline{X}_0$ 也是 X 的(闭)线性子空间，从而超平面(指 $f^{-1}(c)=\{x;\ f(x)=c\}$，其中 f 为 X 上的线性泛函)或是闭的，或是在 X 中稠的.

(2) $\overline{x+A}=x+\overline{A}$, $\overline{\lambda A}=\lambda\overline{A}$.

(3) $\overline{A}+\overline{B}\subset\overline{A+B}$.

(4) $A+\text{int}(B)\subset\text{int}(A+B)$，其中 $\text{int}(B)$ 表示 B 的内点全体.

(5) 若 K_1, K_2 是紧集，则对任何 λ_1, λ_2，有 $\lambda_1K_1+\lambda_2K_2$ 也是紧集.

(6) 若 A 是紧集，B 是闭集，则 $A+B$ 是闭集.

(7) 若 A 是凸集，且 $\text{int}\,A\neq\emptyset$，则 $\overline{A}=\overline{\text{int}\,A}$, $\text{int}\,A=\text{int}\,\overline{A}$.

证明：(1) 若 $x, y\in\overline{A}$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$，则存在 $\{x_\delta\}$, $\{y_\delta\}\subset A$，使 $x_\delta\to x$, $y_\delta\to y$，由于 A 是凸集，故 $\alpha x_\delta+(1-\alpha)y_\delta\in A$，但 $\alpha x_\delta+(1-\alpha)y_\delta\to\alpha x+(1-\alpha)y$，故 $\alpha x+(1-\alpha)y\in\overline{A}$. □

(2) 因 $x+\overline{A}$ 是闭的，且 $x+A\subset x+\overline{A}$，故 $\overline{x+A}\subset x+\overline{A}$ 反之，$y\in x+\overline{A}$，则 $y-x\in\overline{A}$，从而存在 $\{x_\delta\}\subset A$，使 $x_\delta\to y-x$，故 $x+x_\delta\to y$，但 $x+x_\delta\in A$，因此 $y\in\overline{x+A}$. □

(3) 若 $x\in\overline{A}$, $y\in\overline{B}$，则存在 $\{x_\delta\}\subset A$, $\{y_\delta\}\subset B$，使 $x_\delta\to x$, $y_\delta\to y$，从而 $x_\delta+y_\delta\to x+y$，但 $x_\delta+y_\delta\in A+B$，故 $x+y\in\overline{A+B}$. □

(4) 由于 $A+B\supset A+\text{int}\,B$，且 $A+\text{int}\,B$ 是开集，故 $A+\text{int}\,B\subset\text{int}(A+B)$. □

(5) 容易看到，若 K 是紧集，则 λK 是紧集，并且由于 $(x, y)\mapsto x+y$ 是连续的，故 $\lambda_1K_1+\lambda_2K_2$ 是紧集 $\lambda_1K_1\times\lambda_2K_2$ 在上述映像下的像，故 $\lambda_1K_1+\lambda_2K_2$ 是紧的. □

(6) 设 $z\in\overline{A+B}$，则存在 $\{x_\delta+y_\delta\}\subset A+B$，使 $x_\delta+y_\delta\to z$，由于 A 是紧的，故存在子 net$\{x_\alpha\}$，使 $x_\alpha\to x$，从而 $y_\alpha\to z-x\in B$，故 $z=x+(z-x)\in A+B$. □

(7) 先证明，对任 $0\leqslant t<1$，有 $t\overline{A}+(1-t)\text{int}\,A\subset\text{int}\,A$.

事实上，任取 $p\in \text{int}A$，则$(1-t)(\text{int}A-p)$是0点邻域，故

$$
\begin{aligned}
t\overline{A}=\overline{tA}&\subset tA+(1-t)(\text{int}A-p)\\
&=tA+(1-t)\text{int}A-(1-t)p\subset A-(1-t)p,
\end{aligned}
$$

从而 $t\overline{A}+(1-t)p\subset A$，因此 $t\overline{A}+(1-t)\text{int}A\subset A$，又由于 $t\overline{A}+(1-t)\text{int}A$ 是开集，故 $t\overline{A}+(1-t)\text{int}A\subset \text{int}A$. 因而上述事实成立.

现证(7). 显然，$\overline{A}\supset\overline{\text{int}A}$，反之，任取 $x\in\overline{A}$，再取 $p\in \text{int}A$，则由上面证明知 $(x, p]\equiv\{y; y=tx+(1-t)p, 0\leqslant t<1\}\subset \text{int}A$，从而 $x\in\overline{\text{int}A}$. 故 $\overline{A}=\overline{\text{int}A}$.

又显然有 $\text{int}A\subset\text{int}\overline{A}$，反之，任取 $x\in\text{int}\overline{A}$，再取 $p\in \text{int}A$，容易看到，必存在 $z\in\overline{A}$，使 $x\in(z,p]\subset\text{int}A$，故 $\text{int}A=\text{int}\overline{A}$. □

§3 构成线性拓扑空间的条件

由§2看到，若(X, τ)是线性拓扑空间，则存在一个由均衡吸收集组成的局部基 $\mathscr{U}$，对这个局部基来说，当 $W_1, W_2\in\mathscr{U}$，则必存在 $W, W_3\in\mathscr{U}$，使 $W\subset W_1\cap W_2$，$W_3+W_3\subset W_1$. 下面我们将看到，若在线性空间 X 中引入拓扑 τ，使由 τ 决定的局部基满足上述条件，则 τ 必是线性拓扑.

定理 1.3.1 如果 X 是线性空间，$\mathscr{U}$ 是 X 的非空子集族，具如下性质：

(1) $\mathscr{U}$ 中每个元是吸收的.

(2) $\mathscr{U}$ 中每个元是均衡的.

(3) 若 $W_1, W_2\in\mathscr{U}$，则存在 $W\in\mathscr{U}$，使 $W\subset W_1\cap W_2$.

(4) 若 $W_1\in\mathscr{U}$，则存在 $W_2\in\mathscr{U}$，使 $W_2+W_2\subset W_1$.

则当对每个 $x\in X$，取 $\{x+V; V\in\mathscr{U}\}$ 为 x 点邻域基后，X 成为线性拓扑空间(显然，此时 $\mathscr{U}$ 为局部基，且以 $\mathscr{U}$ 为局部基

的这种线性拓扑是唯一的).

证明：(1) X 构成拓扑空间：

① $x\in x+V$. 事实上，因为 V 是均衡的，故 $0\in V$. 从而 $x\in x+V$.

② 若给 $x+V_1$, $x+V_2$, 其中 $V_1, V_2\in\mathscr{U}$, 则存在 $V_3\in\mathscr{U}$ 使 $x+V_3\subset(x+V_1)\cap(x+V_2)$. 事实上，由(3)存在 $V_3\in\mathscr{U}$，使 $V_3\subset V_1\cap V_2$, 故 $x+V_3\subset(x+V_1)\cap(x+V_2)$.

③ 若给 $x+V$, 其中 $V\in\mathscr{U}$, 则存在 $V_1\in\mathscr{U}$, 使得当 $y\in x+V_1$ 时，有 $W\in\mathscr{U}$, 使 $y+W\subset x+V_1$. 事实上，选 $V_1\in\mathscr{U}$，使 $V_1+V_1\subset V$ (由(4))，则 $x+V_1\subset x+V$. 任取 $y\in x+V_1$, 则 $y+V_1\subset x+V_1+V_1\subset x+V$.

由 ①、②、③ 知以 $\{x+V\}$ 为 x 点邻域基诱导的拓扑 τ, 使 (X, τ) 构成一个拓扑空间，且是唯一的.

(2) (X, τ) 是线性拓扑空间：

① 加法是连续的：对任 $V\in\mathscr{U}$, 选 $W\in\mathscr{U}$，使 $W+W\subset V$，从而对 $x+y$ 的任何邻域 $x+y+V$, 有 x, y 的邻域 $x+W$, $y+W$, 使 $x+W+y+W\subset x+y+V$.

② 数乘是连续的：任取 $x_0\in X$, $\lambda_0\in K$, $V\in\mathscr{U}$, 则存在 $W_0\in\mathscr{U}$, 使 $W_0+W_0\subset V$. 选正整数 n, 使 $2^n>|\lambda_0|+1$.

容易看到，存在 $W_n\in\mathscr{U}$, 使 $2^nW_n\subset W_0$.

因为 W_n 是吸收的，选 $0<\delta<1$, 使得当 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时，有 $(\lambda-\lambda_0)x_0\in W_n$. 于是，当 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\lambda(x_0+W_n) &= \lambda x_0+\lambda W_n \\
&= \lambda_0x_0+(\lambda-\lambda_0)x_0+\lambda W_n\subset\lambda_0x_0+W_n+\lambda W_n \\
&= \lambda_0x_0+W_n+\frac{\lambda}{|\lambda_0|+1}(|\lambda_0|+1)W_n \\
&\subset\lambda_0x_0+W_n+(|\lambda_0|+1)W_n \\
&\subset\lambda_0x_0+W_0+W_0\subset\lambda_0x_0+V. \quad \square
\end{aligned}
$$

定义 1.3.1 两个线性拓扑空间 X, Y 叫拓扑同构(或线

性同胚)，如果存在 $T: X \to Y$ 是 $1-1$，满、双方连续的代数同构. 此时记作 $X \approx Y$.

注 1: 容易看到，这时 $T\mathscr{U}$ 是 Y 的一个 0 点邻域基。

注 2: $l_2^2 = \{(x_1, x_2); x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}^1\}$,

$$\|(x_1, x_2)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}.$$

$$l_1^2 = \{(x_1, x_2); x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}^1\},$$

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|.$$

则 $l_2^2 \approx l_1^2$，但注意，作为 Banach 空间 l_2^2 与 l_1^2 不是等距同构。

§4 由线性拓扑空间产生新的线性拓扑空间

(一)首先列举一些线性拓扑空间的例子.

例 1: 准赋范空间$(X, !\cdot!)$是线性拓扑空间.

准赋范空间即在线性空间 X 上定义一个实函数 $!\cdot!: X \to \boldsymbol{R}^1$，使下列成立:

(1) $!x! \geqslant 0$, $!x! = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) $!x+y! \leqslant !x! + !y!$.

(3) 若 $\alpha_n \in K$, $\alpha_n \to 0$, 则对任 $x \in X$, 有 $!\alpha_n x! \to 0$;

若 $x_n \in X$, $!x_n! \to 0$, 则对任 $\alpha \in K$, 有 $!\alpha x_n! \to 0$.

(4) $!-x! = !x!$.

详细证明见关肇直编"泛函分析讲义"(1958 年版)p. 49. □

例 2: $\boldsymbol{R}^1$ 按通常 $+$, $\cdot$ 成为线性拓扑空间. 若赋以离散拓扑，则不构成线性拓扑空间. 事实上，$\{0\}$ 是 0 点的一个邻域，但它不吸收. □

例 3: K 为数体，S 为任何无限集. $K^S = \{f; f: \alpha \mapsto \xi_\alpha, \alpha \in S, \xi_\alpha \in K\}$，按点点加法和通常数乘，$K^S$ 成为线性空间.

(1) 令 $V_{H,\varepsilon} = \{f; |\xi_\alpha| \leqslant \varepsilon$, 当 $\alpha \in H$ 时$\}$，以 $\{V_{H,\varepsilon}; H$ 为 S 的有限子集, $\varepsilon > 0\}$ 为 0 点邻域基，K^S 构成线性拓扑空间.

(2) 令 $U_r=\{f;\ \|f\|_\infty\equiv\sup\limits_{\alpha\in S}|f(\alpha)|<r\}$, $\mathscr{U}=\{U_r;\ r>0\}$, $\mathscr{U}_f=\{f+U_r;\ U_r\in\mathscr{U}\}$, 则 K^S 构成拓扑空间, 但不是线性拓扑空间, 这是因为数乘运算不连续. 事实上, 取 $\{t_n\}\subset S$, 令

$$f(\alpha)=\begin{cases} n \text{ 当 } \alpha=t_n \text{ 时} \\ 0 \text{ 当 } \alpha\neq t_n \text{ 时,} \end{cases}$$

又令 $\lambda_n=\dfrac{1}{n}$, 则 $\lambda_n\to 0$, 但 $\|\lambda_n f\|_\infty \not\to 0$.

若取 K^S 的子集 $B(S)=\{f; f: S\to K,\ \|f\|_\infty=\sup\limits_{\alpha\in S}|f(\alpha)|<+\infty\}$, 则在(2)的拓扑下, $B(S)(\subset K^S)$ 构成线性拓扑空间.

当 S 为拓扑空间时, 再取 $B(S)$ 的子集 $C(S)=\{f;\ f\in B(S),\ f$ 连续$\}$, 则 $C(S)(\subset B(S)\subset K^S)$ 在(2)的拓扑下还是 Banach 空间. □

(二) 子空间:

若 X 是线性拓扑空间, X_1 是 X 的线性子空间, 在 X_1 中取 X 的诱导拓扑(即将 X 的拓扑限制在 X_1 上的相对拓扑), 则 X_1 也构成线性拓扑空间. 这时, X_1 称为 X 的拓扑线性子空间, 简称为 X 的子空间.

(三) 商空间:

若 X 是线性拓扑空间, X_0 为 X 的子空间.

商映像记为 $Q: X\to X/X_0$. 在 X/X_0 中引入拓扑. 使 Q 连续的最强拓扑称为由 X 导出的 X/X_0 上的商拓扑, 记为 τ_Q.

在商拓扑下, X 的开集在 Q 下的像就是 X/X_0 的开集. 因此, 商映象在 τ_Q 下是开映像. 容易看到, 商拓扑是线性拓扑, 从而 $(X/X_0,\ \tau_Q)$ 是线性拓扑空间. 且若 $\mathscr{U}$ 是 (X,τ) 的一个局部基, 则 $\{Q(V); V\in\mathscr{U}\}$ 是 $(X/X_0,\ \tau_Q)$ 的一个局部基.

定理 1.4.1 若 M 是线性拓扑空间 X 的子空间, 则

$(X/M,\ \tau_Q)$ 是 Hausdorff 的 $\Leftrightarrow$ M 在 X 中是闭的.

证明: "$\Rightarrow$" 若 X/M 是 Hausdorff 的, 则 $[0]\ (\in X/M)$ 是闭的, 从而 $Q^{-1}([0])=M$ 是闭的.

"$\Leftarrow$" 若 M 是闭的，且$[x]\neq[0]$，则 $x\notin M$，故 $X\backslash M$ 是 x 的一个开邻域，由于 Q 是开映像，故 $Q(X\backslash M)$是$[x]$的一个开邻域，且$[0]\notin Q(X\backslash M)$. 由于 X/M 是线性拓扑空间，故存在$[0]$点均衡邻域$[V]$，使$[x]+[V]\subset Q(X\backslash M)$，从而$[x]\notin[V]$，故$\overline{[0]}=[0]$. □

注：由这个定理知，当 X 不是 Hausdorff 的情况时，可考虑 $X/\overline{\{0\}}$，它就是一个 Hausdorff 线性拓扑空间. 因此许多情况下，我们仅处理 Hausdorff 线性拓扑空间.

(四)乘积空间：

设 X_α 是线性拓扑空间，$\alpha\in I$，其中 I 为任意指标集.

记 $\Pi\{X_\alpha,\ \alpha\in I\}$ 为乘积空间，它既是作为线性空间的笛卡尔乘积，又是作为拓扑空间的笛卡尔乘积. 容易看到，这时 $\Pi\{X_\alpha,\ \alpha\in I\}$ 是一个线性拓扑空间，并且

$$\mathscr{U}_{\Pi_\alpha X_\alpha}=\{U_J=\{x=(x_\alpha)\in\Pi_\alpha X_\alpha;\ x_\alpha\in V_\alpha,\ V_\alpha\in\mathscr{U}_\alpha,\ \alpha\in J\},$$

J 是 I 的有限子集$\}$就构成 $\Pi_\alpha X_\alpha$ 的一个局部基. 实际上，这个拓扑就是坐标收敛拓扑.

(五)w 拓扑：

若 X 是线性空间，而 Y_α 是一族线性拓扑空间，$\alpha\in I$. 令 $F=\{f_\alpha;\ f_\alpha$ 是 X 到 Y_α 的一个线性映像$\}$. 容易看到，在 X 上存在使每个 $f\in F$ 是连续的最弱的(唯一)线性拓扑，记这个拓扑为 $\sigma(X,\ F)$. 实际上，

$\mathscr{U}_{\sigma(X,F)}=\{\{x;\ f_i(x)\in U_{Y_i}\subset\mathscr{U}_{Y_i},\ i\in J\};\ J$ 是 I 的有限子集$\}=\{\bigcap_{i\in J}f_i^{-1}(U_{Y_i});\ U_{Y_i}\in\mathscr{U}_{Y_i},\ J$ 是 I 的有限子集$\}$是$(X,\ \sigma(X,\ F))$的一个局部基.

容易看到，$x_\delta\xrightarrow{\sigma(X,\ F)}x\Leftrightarrow f(x_\delta)\to f(x),\ \forall f\in F$.

特别地，当 F 是 X 到 $\boldsymbol{R}^1$ 的全体线性泛函(此时记 F 为 X')时，$\sigma(X,\ X')$是 X 上的一个使一切线性泛函连续的最弱的线性拓扑.

从这里容易看到(四)中的乘积拓扑就是使一切投影算子 $P_\alpha: \Pi_\alpha X_\alpha \to X_\alpha$ 连续的最弱的线性拓扑.

§5 有 界 性

(一)在赋范空间中，我们称一个子集 A 是有界的，如果 $\sup\{\|x\|, x\in A\}<+\infty$. 在度量空间中，我们也可用度量来描述一个集合 A 的有界性，我们约定，当 A 的直径 $\operatorname{diam} A\equiv \sup\{d(x, y); x, y\in A\}<+\infty$ 时，称 A 为(度量)有界.

在线性拓扑空间中，我们如下定义有界性.

定义 1.5.1 若 X 是线性拓扑空间，X 的子集 A 叫做(线性拓扑)有界的，如果 A 被 0 点任意邻域 V 吸收，亦即对任何 $V\in\mathscr{U}$，有 $\lambda>0$，使 $A\subset\lambda V$.

这种有界性的几何直观意义是很清楚的. 即对任何 $V\in\mathscr{U}$，当 V 扩大到一定倍数时，A 全部落在里面.

性质 1.5.1 A 是有界的 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\{x_n\}\subset A$，$\lambda_n\to 0$，有 $\lambda_n x_n\to 0$.

证明："$\Rightarrow$" 任取 $\{x_n\}\subset A$，$\lambda_n\to 0$. 对于 $\mathscr{U}$ 中任何元 V，由定义，存在 $\lambda>0$，使 $\frac{1}{\lambda}A\subset V$. 由于 $\lambda_n\to 0$，故存在 n_0，当 $n>n_0$ 时，有 $|\lambda_n|<\frac{1}{\lambda}$，由于 V 是均衡的，故当 $n>n_0$ 时，有

$$\lambda_n x_n=(\lambda\cdot\lambda_n)\frac{1}{\lambda}x_n\in\lambda\cdot\lambda_n V\subset V.$$

"$\Leftarrow$" 若 A 无界，则存在 $V\in\mathscr{U}$，使得存在 $x_n\in A$，但 $x_n\notin nV$，从而 $\frac{1}{n}x_n\notin V$，故得到 $\frac{1}{n}\to 0$，$x_n\in A$，但 $\frac{1}{n}x_n\not\to 0$. □

注 1：容易看到，在赋范空间中，范数有界与(线性拓扑)有界是一致的.

注 2：在线性度量空间中，度量有界与(线性拓扑)有界是不一致的. 例如，令 $S=\{(\xi_i); \xi_i\in\boldsymbol{R}^1, i=1, 2, \cdots\}$. 若 $x=$

(ξ_i), $y=(\eta_i)$, 令

$$d(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|},\quad \|x\|=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i|}{1+|\xi_i|},$$

则 $\operatorname{diam} S\leqslant 1$, 从而整个空间是度量有界的. 但是, 若令 $x_n=na, a=(1,1,\cdots)$, 则 $\|\frac{1}{n}x_n\|=\|a\|=\frac{1}{2}\nrightarrow 0$, 从而 S 不是(线性拓扑)有界的.

定义 1.5.2 线性拓扑空间 X 的子集 A 叫做全有界, 如果对任何 $V\in\mathscr{U}$, 存在 $a_1, \cdots, a_n\in A$, 使 $A\subset\bigcup\{a_i+V;\ i=1, 2, \cdots, n\}$.

定理 1.5.2 线性拓扑空间 X 中有界集具有下列性质.

(1) 若 A_i 是有界的, $i=1, \cdots, n$, 则 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$, $A_1+\cdots+A_n$ 也是有界的.

(2) 若 A 是有界的, 则 $\overline{A}$, λA 是有界集(对任何 λ).

(3) Cauchy 列 $\{x_n\}$ 是有界的, 其中 Cauchy 列定义为, 对任何 $V\in\mathscr{U}$, 存在 n_0, 使得当 m、$n>n_0$ 时, 有 $x_m-x_n\in V$.

(4) 紧集⇒全有界集⇒有界集.

(5) 有界集的线性连续像是有界集.

(6) $\Pi_\alpha X_\alpha$ 中的集 A 是有界的 $\Leftrightarrow P_\alpha A$ 是有界的, 其中 P_α: $\Pi_\alpha X_\alpha\to X_\alpha$ 是投影映像, $\forall\alpha$.

证明: (1) 对任何 $V\in\mathscr{U}$, 由定义, 存在 $\lambda_i>0$, $i=1, \cdots, n$, 使 $A_i\subset\lambda_i V$, 取 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}$, 由于 V 是均衡的, 故 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\subset\lambda V$.

对任何 $V\in\mathscr{U}$, 必存在 $U\in\mathscr{U}$, 使 $\overbrace{U+\cdots+U}^{n}\subset V$. 从而存在 $\lambda>0$, 使 $A_i\subset\lambda U$, $i=1, \cdots, n$. 故 $A_1+\cdots+A_n\subset\lambda V$. □

(2) 对任何 $V\in\mathscr{U}$, 由于 V 是闭均衡的 0 点邻域, 故存在 $\lambda>0$, 使 $A\subset\lambda V$. 从而, $\overline{A}\subset\lambda\overline{V}=\lambda V$, 故 $\overline{A}$ 是有界的. □

(3) 对任$U\in\mathscr{U}$，选$V\in\mathscr{U}$，使 $V+V\subset U$. 由于$\{x_n\}$是Cauchy 列，故存在n_0，使得当$n>n_0$时，有 $x_n-x_{n_0}\in V$，从而$x_n\in x_{n_0}+V$，选 $\lambda>1$，使 $x_1, \cdots, x_{n_0}\in\lambda V$，则$\{x_n\}\subset\lambda V+V\subset\lambda U$. □

(4) 设K是紧集，对任$V\in\mathscr{U}$，则$\{a+V; a\in K\}$是K的一个开复盖，从而有有限子复盖，即$K\subset\bigcup\{a_i+V; i=1,\cdots,n\}$. 故$K$是全有界的. 又选$\lambda>1$，使$\{a_1, \cdots, a_n\}\subset\lambda V$，故$K\subset\bigcup\{a_i+V; i=1, \cdots, n\}\subset\lambda V+V\subset\lambda(V+V)$. 从而$K$是有界的. □

(5) 令$f: X\to Y$是线性连续映像. A是X中有界集. 任取$V\in\mathscr{U}_Y$，则$f^{-1}(V)$是X中0点邻域，故存在$\lambda>0$，使$A\subset\lambda f^{-1}(V)$，从而$f(A)\subset\lambda V$. □

(6) "$\Rightarrow$" 由于P_α是线性连续映像，由(5)，即知$P_\alpha A$是有界的.

"$\Leftarrow$" 任取$\Pi_\alpha X_\alpha$的0点邻域基的元$V=V_{\alpha_1}\times\cdots\times V_{\alpha_n}\times\Pi(X_\alpha, \alpha\notin\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\})$. 由于$P_\alpha A$是有界的，故存在$\lambda_i>0$，$i=1, \cdots, n$，使 $P_{\alpha_i}A\subset\lambda_i V_{\alpha_i}\subset\max\limits_{1\le i\le n}\{\lambda_i\}\cdot V_{\alpha_i}$，从而$A\subset\Pi_\alpha P_\alpha A\subset(\max\limits_{1\le i\le n}\{\lambda_i\})\cdot(V_{\alpha_1}\times\cdots\times V_{\alpha_n}\times\Pi(X_\alpha, \alpha\notin\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}))$. □

注：对于一个集A，若A关于强的拓扑是有界集，则A关于较弱的拓扑也是有界集. 但可能两个不同拓扑具有相同的有界集.

例：X是无限维赋范空间，X^*是X上全体连续线性泛函组成的Banach空间，由§4(五)知，$\sigma(X, X^*)$是X上的w拓扑，它是以$\{V(x_1^*, \cdots, x_n^*; \varepsilon)=\{x; |x_i^*(x)|<\varepsilon, i=1, \cdots, n\}; x_i^*\in X^*, i=1, \cdots, n, \varepsilon>0\}$为局部基的线性拓扑. 我们将看到，它是严格弱于范数拓扑的(见第二部分定理1.1.2). 但由(6)知，X中子集A是$\sigma(X, X^*)$有界的$\Leftrightarrow x^*(A)$是有界的，对每个$x^*\in X^*$. 由共鸣定理易知，X中的集是范有界当且仅当

它是 $\sigma(X, X^*)$ 有界的. □

(二)有限维的特征.

定理 1.5.3 一切有限维 (Hausdorff) 线性拓扑空间 X 与 K^n(具有通常的 Euclid 范数)线性同胚.

证明: 任取 $e_1, \cdots, e_n$ 为 X 的一组(Hamel)基.

令 $T: (a_1, \cdots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ 是 K^n 到 X 的一个线性映像, 它是 1-1, 满, 且连续的. 由于 K^n 的单位球面 S 是有界闭集, 从而是紧的, 故 $T(S)$ 也是紧的. 由于 X 是 Hausdorff 空间, 故 $T(S)$ 是闭的, 且 $0 \notin T(S)$, 从而 $X \backslash T(S)$ 是 X 中 0 点邻域, 故它含有 0 点均衡邻域 V.

令
$$B = \left\{ (a_1, \cdots, a_n);\ a_i \in K,\ \|(a_1, \cdots, a_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2} \leqslant 1 \right\},$$

若 $x \notin T(B)$, 则 $\|T^{-1}(x)\|_2 > 1$, 从而 $\dfrac{x}{\|T^{-1}(x)\|_2} = \dfrac{T(T^{-1}x)}{\|T^{-1}(x)\|_2} \in T(S)$, 故 $x \notin V$. 所以 $V \subset T(B)$, 因此 T^{-1} 是连续的. □

定义 1.5.3 X 的子集 A 叫做基本的, 如果 $\overline{\mathrm{span}}(A) = X$, 其中 $\mathrm{span}(A)$ ($\overline{\mathrm{span}}(A)$) 表示由 A 生成的(闭)线性子空间.

定理 1.5.4(Riesz 引理) 若 A 是线性拓扑空间 X 的一个有界子集, M 是 X 的闭子空间, 假如存在 $\lambda \in K$, $|\lambda| < 1$, 使 $A \subset M + \lambda A$, 则 $A \subset M$.

证明: 任选 $V \in \mathscr{U}$, 则存在正整数 n, 使 $\lambda^n A \subset V$, 从而
$$A \subset M + \lambda A \subset M + \lambda(M + \lambda A)$$
$$= M + \lambda^2 A \subset \cdots \subset M + \lambda^n A \subset M + V,$$
故 $A \subset \overline{M} = M$. □

定理 1.5.5 (Hausdorff)线性拓扑空间 X 是有限维 $\Leftrightarrow X$ 含有一个全有界的 0 点邻域.

证明: "$\Rightarrow$" 由定理 1.5.3 易知.

"$\Leftarrow$" 设 V 是一个全有界的 0 点邻域，从而 V 是基本的有界集(因为 V 是吸收的). 任给 $\lambda\in K$, $0<|\lambda|<1$. 由于 λV 是 0 点邻域，故存在 $x_1, \cdots, x_n\in V$, 使得 $V\subset\{x_1, \cdots, x_n\}+\lambda V\subset\text{span}\{x_1, \cdots, x_n\}+\lambda V$.

由 Riesz 引理, $X=\text{span}V\subset\text{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$, 从而 X 是有限维的. □

推论 1.5.6 局部紧 Hausdorff 线性拓扑空间是有限维的.

注: 我们看到，有限维线性拓扑空间中有界闭集是紧的. 但反之不然，例如，在任何 Banach 空间 X 的共轭空间 X^* 中，考虑 w* 拓扑，即 $\sigma(X^*, X)$, 则我们将看到任何 w* 有界，w* 闭的子集必是 w* 紧的，但 X^* 不必是有限维的(除非 X 是有限维的). 对任何线性拓扑空间 X, 若 X 中的任何有界闭集均是紧的，则称 X 为 Motel 空间. 容易看到，对任何赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$, 考虑范数拓扑(或者 X 是可度量化的线性拓扑空间), 则 X 是 Motel 空间 $\Leftrightarrow X$ 是有限维的。由于一般的 Motel 空间未必有一个有界的 0 点邻域(即未必可度量化，见下面定理 1.5.2), 故上述不一定成立.

§6 可度量化

定义 1.6.1 一个线性拓扑空间(X, τ)称为可度量化的，如果存在 X 上的一个度量 d, 使得它的开球的全体$\{\{y; d(x,y)<\varepsilon\}; x\in X, \varepsilon>0\}$ 组成 τ 的一个基.

注: 定义中就是要求由度量 d 产生的拓扑与原来的拓扑 τ 是一致的.

定义 1.6.2 若 d 是线性空间 X 上的一个度量.

(1) 若对一切$|t|\leqslant 1$, 都有$d(tx, 0)\leqslant d(x, 0)$, 则称 d 为均衡度量.

(2) 若对一切 $x, y\in X$, 都有 $d(x-y, 0)=d(x, y)$, 则

称 d 为平移不变度量.

注: 定义 1.6.1 中并没有要求引入的度量是均衡不变度量. 但是由下面定理可以看到, 这时必可在 X 上再赋一个均衡不变度量 d_1, 使之与原来度量 d 是等价的, 即对任何 $\{x_n\}\subset X$, $d(x_n, 0)\to 0 \Leftrightarrow d_1(x_n, 0)\to 0$, 从而 d_1 导出的拓扑与原来拓扑 τ 也是一致的.

定理 1.6.1 设 X 是(Hausdorff)线性拓扑空间, 则 X 具 0 点可数基 $\Leftrightarrow X$ 是可度量化的, 且此时这个度量是均衡不变的.

证明: "$\Leftarrow$" 显然这时 $\left\{\left\{x,\ d(x, 0)<\frac{1}{n}\right\},\ n=1, 2, \cdots\right\}$ 就是 0 点的可数基.

"$\Rightarrow$" 令 $\{U_n\}$ 是 X 的 0 点均衡邻域基. 令 $V_1=U_1$, 由定理 1.2.1(4)知存在 0 点均衡邻域 V_2, 使 $V_2+V_2\subset U_1\cap U_2$. 继续下去, 得到一列 0 点均衡邻域 $\{V_n\}$ 满足如下条件:

$$V_{n+1}+V_{n+1}\subset V_n, \tag{1}$$

$$V_{n+1}\subset U_n, \tag{2}$$

故 $\{V_n\}$ 也成为局部基. 由于 X 是 Hausdorff 的, 故

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n=\{0\}. \tag{3}$$

对自然数集 N 的每个非空有限子集 H, 定义

$$V_H=\sum_{n\in H} V_n,\quad P_H=\sum_{n\in H} 2^{-n},$$

其中 $\sum$ 表示加号的缩写, 例如, $H=\{1, \cdots, n\}$, 则 $V_H=V_1+\cdots+V_n$.

记号 "$n<H$" 表示对一切 $m\in H$, 有 $n<m$. 于是, 我们有:

若 $P_H<2^{-n}$, 则 $n<H$, 从而

$$V_H\subset V_n. \tag{4}$$

事实上, 若 $P_H<2^{-n}$, 则, 显然, 对一切 $m\in H$, $n<m$, 从而 $n<H$. 另外, 由(1)、(2)知, 当 $m>n$ 时, 有 $V_m\subset V_n$, 并且

$V_{n+1}+V_{n+1}\subset V_n$，故若 $H=\{n_1, \cdots, n_k\}$，其中 $n_1<n_2<\cdots<n_k$，而 $n<H$，则 $V_{n_1}+V_{n_2}+\cdots+V_{n_k}\subset V_{n_1}+V_{n_2}+\cdots+V_{n_{k-1}}+V_{n_{k-1}}$ $\subset\cdots\subset V_{n_1}+V_{n_1}\subset V_{n_1-1}\subset V_n$，从而 $V_H\subset V_n$. 故(4)成立。

现在定义：

$$x\mapsto|x|=\begin{cases}1 & \text{当 } x\notin V_H, \text{ 对一切 } H\\ \inf\limits_H\{P_H; x\in V_H\} & \text{当 } x\in\text{某个 } V_H.\end{cases}$$

容易看到，$\{|x|; x\in X\}\subset[0, 1]$. 下面验证$|x|$满足下列性质：

① $|x|=0\Leftrightarrow x=0$.

事实上，首先证明对任何 $\varepsilon>0$，若令 $N_\varepsilon=\{x\in X;\ |x|<\varepsilon\}$，则

$$N_{2^{-n}}\subset V_n\subset N_{2^{-n+1}}. \tag{5}$$

因为若 $x\in V_n$，则 $|x|\leqslant 2^{-n}<2^{-n+1}$，故 $x\in N_{2^{-n+1}}$，从而 $V_n\subset N_{2^{-n+1}}$. 又若 $x\in N_{2^{-n}}$，则 $|x|<2^{-n}$，由$|x|$的定义知，存在某个 V_H，使 $x\in V_H$，且 $P_H<2^{-n}$，由(4)，$V_H\subset V_n$，故 $x\in V_n$，从而 $N_{2^{-n}}\subset V_n$. 因此(5)成立。

我们得到，$x=0\overset{(3)}{\Leftrightarrow}x\in V_n,\ \forall n\overset{(5)}{\Leftrightarrow}|x|=0$. 故 ① 成立。

② 若$|\lambda|\leqslant 1$ 则$|\lambda x|\leqslant|x|$.

事实上，若 $x\notin V_H$，对一切 H，则$|x|=1$，故$|\lambda x|\leqslant 1=|x|$.

若 $x\in$某个 V_H，则由于 V_H 是均衡的，故 $\lambda x\in V_H$，从而

$$|\lambda x|=\inf_H\{P_H; \lambda x\in V_H\}\leqslant\inf_H\{P_H, x\in V_H\}=|x|,$$

故 ② 成立。

③ 对任 $x, y\in X$，有$|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

事实上，若$|x|+|y|\geqslant 1$，则显然有 $|x+y|\leqslant 1\leqslant|x|+|y|$.

若$|x|+|y|<1$，选 $\varepsilon>0$，使$|x|+\varepsilon+|y|+\varepsilon<1$. 由$|x|$，$|y|$的定义知，存在 $H\subset N$，$K\subset N$，使 $x\in V_H$，$y\in V_K$，且 $P_H<|x|+\varepsilon$，$P_K<|y|+\varepsilon$.

由于 $P_H+P_K<1$，且 P_H，P_K 为二进数，故存在唯一元 M，使

$$P_M = P_H + P_K.$$

从而 $V_H + V_K \subset V_M$, 故 $x+y \in V_M$, 所以,

$$|x+y| \leqslant P_M = P_H + P_K < |x| + |y| + 2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 即知 $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. 因此 ③ 成立.

现定义 $d(x, y) = |x-y|$, 则由 ①、②、③ 知 d 是均衡不变度量.

下面我们证明由 d 导出的拓扑与原来拓扑 τ 是一致的.

设 $N(0, \varepsilon) = \{x; d(x, 0) < \varepsilon\}$ 是中心在 0 点、关于 d 的 ε 开球, 任取 $x_0 \in N(0, \varepsilon)$, 选正整数 k, 使 $2^{-(k-1)} < \varepsilon - d(x, 0)$, 则 $x_0 + V_k \overset{(5)}{\subset} x_0 + N_{2^{-k+1}} \subset N(0, \varepsilon)$.

从而 $N(0, \varepsilon)$ 是 τ 的开集. 故对任 $y \in X$, $N(y, \varepsilon) \equiv \{x; d(x, y) < \varepsilon\} = y + N(0, \varepsilon)$ 也是 τ 开集.

反之, 设 V 是 τ 的开集, 任取 $x_0 \in V$, 则 $\{x_0 + V_k; k = 1, 2, \cdots\}$ 是 x_0 点 τ 邻域基. 故有 $x_0 + V_k \subset V$, 对某个 k, 从而 $N(x_0, 2^{-k}) = x_0 + N(0, 2^{-k}) \subset x_0 + V_k \subset V$. 故 V 是由 d 导出的拓扑的开集.

从而证得由 d 导出的拓扑与原来拓扑 τ 是一致的. □

定理 1.6.2 若 X 是线性拓扑空间, 它有一个 0 点的有界邻域 V, 则 X 是可度量化的.

证明: 容易看到, $\left\{\frac{1}{n}V; n = 1, 2, \cdots\right\}$ 是 X 的一个 0 点的可数邻域基. 利用定理 1.6.1, 即知所要的结果. □

§7 完 备 性

回忆起, 度量空间 (X, d) 称为完备的, 如果对任何 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 存在 $x \in X$, 使得 $d(x_n, x) \to 0$, 即 $x_n \xrightarrow{d} x$. 其中 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy 列, 如果对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0, 当 $n, m > n_0$ 时, 有

$d(x_n, x_m)<\varepsilon$.

但是,对线性拓扑空间,却有几种完备性定义. 首先我们定义 Cauchy 定向列(Cauchy net).

定义 1.7.1 若 X 是线性拓扑空间, 若 $\{x_\alpha\}$ 是一个定向列. 假设对任何 $V\in\mathscr{U}$, 存在 α, 使得当 α_1, $\alpha_2>\alpha$ 时, 有 $x_{\alpha_1}-x_{\alpha_2}\in V$, 则称 $\{x_\alpha\}$ 为 Cauchy 定向列.

定义 1.7.2 设 X 是线性拓扑空间,

X 称为完备的, 如果 X 中每个 Cauchy 定向列收敛于 X 的一个点;

X 称为有界完备的, 如果 X 中每个有界 Cauchy 定向列收敛于 X 的一个点(有界完备也叫亚完备);

X 称为序列完备的, 如果 X 中每个 Cauchy 序列收敛于 X 的一个点.

注 1: 上述定义中, 若用 X 的任何子集 A 来代替就得到子集的各种完备性定义.

注 2: 显然, 完备⇒亚完备⇒序列完备. 反之不然.

注 3: 若 X 是线性度量空间, 容易看到关于度量的完备概念与由度量而产生的线性拓扑的完备概念是不一致的. Banach 猜想两者是相同的, 1952 年 Kelly 得出了两者关系(见定理 1.7.5). 此处, 线性度量空间 X 是指, X 是一个线性空间, 又 (X, d) 是度量空间, 且由度量 d 导出的拓扑使 X 成为线性拓扑空间.

定理 1.7.1 序列完备的赋范空间是完备的 (即是 Banach 空间).

证明: 设 $\{x_\alpha\}$ 是 Cauchy 定向列, 选 $\{\alpha_n, n=2, 3, \cdots\}$, 使 $\alpha_n>\alpha_{n-1}$, 且当 α', $\alpha''\geqslant\alpha_n$ 时, 有 $\|x_{\alpha'}-x_{\alpha''}\|<\frac{1}{n}$, 令 $y_n=x_{\alpha_n}$, 则 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 序列. 由于 X 是序列完备的, 故存在 $y_0\in X$, 使 $y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}y_0$. 我们有 $x_\alpha\xrightarrow{\|\cdot\|}y_0$. 事实上, 对任何 $\varepsilon>0$, 选

$N_0\left(>\frac{2}{\varepsilon}\right)$，使得当 $n\geqslant N_0$ 时，有 $\|y_n-y_0\|<\varepsilon/2$，从而当 $\alpha>\alpha_{N_0}$ 时，有

$$\|x_\alpha-y_0\|\leqslant\|x_\alpha-y_{N_0}\|+\|y_{N_0}-y_0\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{N_0}<\varepsilon. \quad \square$$

注：由定理的证明知道，若 X 是有界完备的线性拓扑空间，且 X 含有一个有界的 0 点邻域，则 X 是完备的.

定理 1.7.2 (1) 在完备的线性拓扑空间中，若子集 A 是闭的，则 A 是完备的.

(2) 在完备的(Hausdorff)线性拓扑空间中，子集 A 是闭的 $\Leftrightarrow A$ 是完备的.

(3) 在线性拓扑空间 X 中，集合 A 是全有界且完备的 $\Leftrightarrow A$ 是紧的.

(4) 在完备的(Hausdorff)线性拓扑空间中，集合 A 是全有界且闭的 $\Leftrightarrow A$ 是紧的.

证明：(1)、(2)是容易证明的.

(3)、(4)证明较长，请参见 Kelly & Namioka 著《Linear topological spaces》(1963) p. 61. $\square$

在同一线性空间中，可以引入不同的线性拓扑 τ_1, τ_2，若 (X, τ_1) 完备，且 $\tau_1<\tau_2$ (τ_1 弱于 τ_2)，则 (X, τ_2) 不必是完备的. 同样，当 $\tau_1>\tau_2$ 时，(X, τ_2) 也不必是完备的. 例如，$(l_1, \|\cdot\|_\infty)\subset(c_0, \|\cdot\|_\infty)$，$(l_1, \|\cdot\|_1)$ 是完备的，且 $\tau_{\|\cdot\|_1}>\tau_{\|\cdot\|_\infty}$，但 $(l_1, \|\cdot\|_\infty)$ 不是完备的. 但我们却有：

定理 1.7.3 若 (X, τ_1) 和 (X, τ) 是两个线性拓扑空间，且 $\tau_1>\tau$，又存在 τ_1 的一组 0 点邻域基 $\mathscr{U}$，使得 $\mathscr{U}$ 中的每个元是 τ 闭的(或 τ 序列闭，或 τ 有界闭)，则若 $A\subset X$，且 A 是 (X, τ) 完备的(相应地，τ 序列完备或 τ 有界完备)时，那么 A 也是 (X, τ_1) 完备的(相应地，τ 序列完备或 τ_1 有界完备的).

证明：设 $\{x_\alpha\}$ 是 τ_1 的 Cauchy 定向列，则由于 $\tau_1>\tau$ 知，

$\{x_\alpha\}$也是 τ 的 Cauchy 定向列，故存在 $x_0\in A$，使 $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x_0$. 任取 τ_1 的局部基 $\mathscr{U}$ 中元 V，由条件知，存在 α_0，使得当 α、$\beta>\alpha_0$ 时，有 $x_\alpha-x_\beta\in V$，因 $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x_0$，且 V 是 τ 闭的，从而当 $\beta>\alpha_0$ 时，有 $x_0-x_\beta\in V$，故 $x_\alpha \xrightarrow{\tau_1} x_0\in A$，从而 A 是 τ_1 完备的. 对序列完备性及有界完备性可类似证明. □

定义 1.7.3 设 X 是线性拓扑空间，若存在一个完备线性拓扑空间 $\widetilde{X}$，使 X 与 $\widetilde{X}$ 的一个稠子空间线性同胚，则称 $\widetilde{X}$ 为 X 的完备化空间. 若这样的 $\widetilde{X}$ 存在，则称 X 为可以完备化.

定理 1.7.4 任何线性拓扑空间 X 均可以完备化，并且在线性同胚意义下具有唯一的完备化空间.

证明：实质上，与度量空间的完备化证明方法相同. 参见 Kelly & Namioka 著«Linear topological spaces»(1963) p. 69.

定理 1.7.5 对于完备的度量线性空间 X，必可改赋一个等价的平移不变度量 d，使 X 关于这个度量是完备的，这样 X 就是作为线性拓扑空间意义下完备的线性度量空间.

证明：见 Kelley, Invariant metrics in groups (Solution of a problem of Banach) *Proc. A. M. S*, 3(1952) p. 484-487.

注：由于平移不变度量 d 与原来度量是等价的，故这就是说，线性度量空间作为度量空间的完备性和作为线性拓扑空间的完备性是一致的.

第二章　局部凸线性拓扑空间

§1　局部凸线性拓扑空间的定义及 Minkowski 泛函

(一)局部凸线性拓扑空间的定义.

定义 2.1.1　线性拓扑空间 X 称为局部凸线性拓扑空间，如果存在由凸集组成的局部基.

注 1：由第一章定理 1.2.1(8)知，在局部凸线性拓扑空间中存在由闭凸均衡吸收集组成的局部基.

注 2：也象前面一样，我们约定下面讨论的局部凸线性拓扑空间都是 Hausdorff 的.

注 3：下面将看到，由于局部凸性保证在 X 上存在非零连续线性泛函，并且 0 点的任何凸邻域可以导入一个半范，因此局部凸空间具有许多很好的性质. 线性拓扑空间的理论许多是在局部凸空间中研究的.

(二)Minkowski泛函(也叫规函数(gauge)).

定义 2.1.2　设 X 是实线性空间，A 是凸的均衡吸收集(显然 $0\in A$)，则

$$p_A(x)=\inf\{\lambda\geqslant 0,\ x\in\lambda A\}$$

称为相应于集 A 的 Minkowski 泛函(规函数(gauge)).

注 1：由于 A 是吸收的，故 $p_A(x)$ 是可以定义的.

注 2：$p_A(x)$ 的几何意义是十分清楚的，它表示当集 A 乘以某个数之后包含点 x 的那种数的下确界.

定理 2.1.1　若 A 是实线性空间 X 中凸的均衡吸收集，则

(1) $p_A(0)=0$, $0\leqslant p_A(x)<+\infty$(吸收性的结果).

(2) 次可加性：$p_A(x+y)\leqslant p_A(x)+p_A(y)$, $\forall x,\ y\in X$(凸

性的结果).

(3) 绝对齐性: $p_A(\alpha x)=|\alpha|p_A(x)$ (均衡性的结果).

注: 我们也称 X 上定义的满足上述条件(1)、(2)、(3)的实泛函叫半范.

(4) $\{x; p_A(x)=0\}$ 是 X 的线性子空间.

证明: (1) 显然.

(2) 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\lambda, \mu>0$, 使 $p_A(x)\leqslant\lambda<p_A(x)+\varepsilon$, $p_A(y)\leqslant\mu<p_A(y)+\varepsilon$, 且 $\frac{1}{\lambda}\cdot x, \frac{1}{\mu}\cdot x\in A$.

因为 A 是凸的, 故 $\frac{x+y}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\frac{x}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{y}{\mu}\in A$. 从而 $p_A(x+y)\leqslant\mu+\lambda<p_A(x)+p_A(y)+2\varepsilon$. 由于 ε 是任意的, 故

$$p_A(x+y)\leqslant p_A(x)+p_A(y).\ \square$$

(3) ① 当 $\alpha>0$ 时, 显然有 $p_A(\alpha x)=|\alpha|p_A(x)$.

② 当 $|\alpha|=1$ 时, 由于 V 是均衡的, 也有 $p_A(\alpha x)=p_A(x)=|\alpha|p_A(x)$.

③ $\alpha\neq 0$, 则 $p_A(\alpha x)=|\alpha|p_A\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}x\right)=|\alpha|p_A(x)$.

④ 当 $\alpha=0$ 时, 显然成立 $p_A(\alpha x)=|\alpha|p_A(x)$. $\square$

(4) 由(1)、(2)、(3)知. $\square$

若 p 是 X 上的半范, 我们记 $B_p=\{x; p(x)\leqslant 1\}$, 称它为 p 的单位球; $V_p=\{x; p(x)<1\}$, 称它为 p 的开单位球.

定理 2.1.2 若 A 是线性拓扑空间 X 中凸的均衡吸收集, 则

(1) B_{p_A} 是 X 中凸的均衡吸收集, 且 $p_{B_{p_A}}=p_A$.

(2) $\operatorname{int}A\subset V_{p_A}\subset A\subset B_{p_A}\subset\overline{A}$.

(3) $0\in\operatorname{int}A\Leftrightarrow p_A(x)$ 是连续的 $\Leftrightarrow p_A(x)$ 是一致连续的 $\Leftrightarrow \operatorname{int}A=V_{p_A}$.

特别地, 对 0 点凸的均衡吸收邻域 V, $p_V(x)$ 是连续的半范.

(4) A 是闭的 $\Rightarrow p_A(x)$ 是下半连续的 $\Leftrightarrow \overline{A}=B_{p_A}$. 我们称

X 中闭的凸均衡吸收集 A 为一个桶(barrel). 故特别地, 由桶 A 决定的半范是下半连续的.

证明: (1) 任 $x \in X$, 若 $p_A(x)=0$, 则 $x \in B_{p_A}$, 若 $p_A(x) \neq 0$, 则 $p_A\left(\frac{x}{p_A(x)}\right)=1$, 从而 $x \in p_A(x) B_{p_A}$. 故 B_{p_A} 是吸收的.

若 $x, y \in B_{p_A}$, $0<\alpha<1$, 则 $p_A(x) \leqslant 1$, $p_B(x) \leqslant 1$, 由定理 2.1.1 知,

$$p_A(\alpha x+(1-\alpha) y) \leqslant \alpha p_A(x)+(1-\alpha) p_A(y) \leqslant 1,$$

故 $\alpha x+(1-\alpha) y \in B_{p_A}$, 亦即 B_{p_A} 是凸的.

任取 $x \in B_{p_A}$ 及 α, $|\alpha| \leqslant 1$. 由于 $p_A(x) \leqslant 1$, 由定理 2.1.1 知 $p_A(\alpha x) \leqslant 1$, 故 $\alpha x \in B_{p_A}$. 从而 B_{p_A} 是均衡的.

因为 $x \in p_A(x) B_{p_A}$, 故 $p_{B_{p_A}}(x) \leqslant p_A(x)$. 反之, 由 p 的定义知, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\lambda>0$, 使 $p_{B_{p_A}}(x) \leqslant \lambda<p_{B_{p_A}}(x)+\varepsilon$, 且 $x \in \lambda B_{p_A}$, 从而 $p_A\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leqslant 1$, 因此 $p_A(x) \leqslant p_{B_{p_A}}(x)+\varepsilon$, 由 ε 的任意性知, $p_{B_{p_A}}(x)=p_A(x)$. □

(2) 若 $x \in A$, 则 $p_A(x) \leqslant 1$, 故 $x \in B_{p_A}$, 从而 $A \subset B_{p_A}$.

若 $x \in V_{p_A}$, 则存在 λ, 使 $p_A(x)<\lambda<1$, 且 $x \in \lambda A$, 故由 A 是均衡的知, $x \in A$, 从而 $V_{p_A} \subset A$.

若 $x \in \operatorname{int} A$, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得当 $|\lambda-1|<\varepsilon$ 时, 有 $\lambda x \in A$. 故 $\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) x \in A$, 从而 $p_A(x) \leqslant \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}}<1$. 所以, $x \in V_{p_A}$, 即 $\operatorname{int} A \subset V_{p_A}$.

若 $x \in B_{p_A}$, 则 $p_A(x) \leqslant 1$. 若 $0<\alpha<1$, 则 $p_A(\alpha x)=\alpha p_A(x)<1$, 所以 $\alpha x \in V_{p_A} \subset A$. 令 $\alpha_n \nearrow 1$, 则 $\alpha_n x \in A$, 且 $\alpha_n x \rightarrow x$, 从而 $x \in \bar{A}$. 即 $B_{p_A} \subset \bar{A}$. □

(3) 若 $p_A(x)$ 是连续的, 则 V_{p_A} 是开集, 由(2)知, $\operatorname{int} A=V_{p_A}$, 由于 $0 \in V_{p_A}$, 故 $0 \in \operatorname{int} A$.

若 $0 \in \operatorname{int} A$, 对任何 $\varepsilon>0$, $\varepsilon \cdot \operatorname{int} A$ 是 0 点邻域, 从而对任

何 $x_0\in X$, $V_{x_0}\equiv x_0+(\varepsilon\,\mathrm{int}\,A\cap(-\varepsilon)\cdot\mathrm{int}\,A)$是 x_0 点邻域，若 $y\in V_{x_0}$，则 $y=x_0+\varepsilon y_1=x_0-\varepsilon y_2$，其中 y_1, $y_2\in\mathrm{int}\,A$. 故

$$p_A(y)\leqslant p_A(x_0)+p_A(\varepsilon y_1)\leqslant p_A(x_0)+\varepsilon,$$
$$p_A(x_0)\leqslant p_A(y)+p_A(\varepsilon y_2)\leqslant p_A(y)+\varepsilon,$$

从而 $|p_A(y)-p_A(x_0)|<\varepsilon$. 故 $p_A(x)$是一致连续的. 这样就证明了这些条件的等价性. □

(4) 若 A 是闭的，由(2)知，$A=B_{p_A}=\overline{A}$.

容易证明，$p_A(x)$是下半连续的当且仅当 B_{p_A} 是闭的，根据(2)知，B_{p_A} 是闭的当且仅当 $B_{p_A}=\overline{A}$. □

定理 2.1.3 若 $p(x)$是线性拓扑空间 X 中下半连续的半范，则 B_p 是一个桶. 特别地，当 $p(x)$是连续半范时，B_p 是具非空开核的闭凸均衡吸收集，更是一个实心体(body)(若闭凸集 A，满足 $\mathrm{int}\,A\neq\emptyset$ 条件，则称 A 为一个实心体).

证明：由定理 2.1.2(1)知 B_p 是凸的均衡吸收集，由于 p 是下半连续的，故 B_p 是闭集，从而是一个桶.

若 $p(x)$是连续的，由定理 2.1.2(3)知，$\mathrm{int}\,B_p\neq\emptyset$，故 B_p 是具有非空开核的闭凸均衡吸收集. 从而更是一个实心体. □

(三)局部凸线性拓扑空间的构成.

设 X 是线性空间，$\{p_\alpha;\alpha\in I\}$ 是 X 上一族半范.

令 $U(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \cdots, p_{\alpha_n};\varepsilon)=\{x;p_{\alpha_i}(x)<\varepsilon,\ i=1,2,\cdots,n\}$，其中 $\alpha_i\in I$, $i=1,2,\cdots,n$. 记上述集的全体为 $\mathscr{U}$. 由定理 1.3.1 知，$\mathscr{U}$ 是 X 上某个线性拓扑 τ 的局部基，且由于 $\mathscr{U}$ 中每个元是凸集，故 τ 还是局部凸线性拓扑. 此时(X,τ)叫做由半范族 $\{p_\alpha;\alpha\in I\}$ 生成的 X 上的局部凸拓扑. 显然，对每个 $\alpha\in I$, p_α 是关于 τ 连续的. (X,τ)也叫赋一族半范空间，特别地，当 I 可数时，(X,τ)叫做赋可列半范空间. 由定理 1.6.1 知，赋可列半范空间是可以度量化的.

下面讨论赋一族半范空间的性质.

定理 2.1.4 设(X,τ)是由半范族 $\mathscr{N}=\{p_\alpha;\alpha\in I\}$ 生成

的局部凸空间，则

(1) τ 是 Hausdorff 的 $\Leftrightarrow$ 对每个 $x\neq 0$, $\sup\limits_{\alpha\in I} p_\alpha(x)>0$.

(2) 若 $\{x_\alpha\}\subset X$, 则 $x_\delta\xrightarrow{\tau} x\Leftrightarrow \lim\limits_\delta p_\alpha(x_\delta-x)=0$, $\forall\alpha\in I$.

(3) 若 A 是 X 的子集，则 A 是 τ 有界的 $\Leftrightarrow \operatorname{diam}(A,p_\alpha)\equiv \sup\{p_\alpha(x-y);\ x,\ y\in A\}<+\infty$, $\forall\alpha\in I$.

证明：(1) 若 τ 是 Hausdorff 的，则对任 $x\neq 0$，存在 $U(p_{\alpha_1},\ \cdots,\ p_{\alpha_n};\ \varepsilon)$，使 $x\notin U(p_{\alpha_1},\ \cdots,\ p_{\alpha_n};\ \varepsilon)$. 从而

$$\sup_{\alpha\in I} p_\alpha(x)\geqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n} p_{\alpha_i}(x)\geqslant\varepsilon>0.$$

反之，若对每个 $x\neq 0$, $\sup\limits_{\alpha\in I} p_\alpha(x)>0$, 则存在 $\alpha_0\in I$, 使 $p_{\alpha_0}(x)>\varepsilon>0$, 对某个 ε. 从而 $x\notin U(p_{\alpha_0};\ \varepsilon)$，故 τ 是 Hausdorff 的. □

(2) 若 $\{x_\delta\}\subset X$, $x_\delta\xrightarrow{\tau} x$, 则对任何 $\alpha_0\in I$，及 $\varepsilon>0$, $U(p_{\alpha_0};\ \varepsilon)$是 0 点 τ 邻域，故存在 δ_0, 使得当 $\delta>\delta_0$ 时，有 $x_\delta-x\in U(p_{\alpha_0};\ \varepsilon)$，即 $p_{\alpha_0}(x_\delta-x)<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_\delta p_{\alpha_0}(x_\delta-x)=0$.

反之，任取 $\mathscr{U}$ 的元 $U(p_{\alpha_1},\ \cdots,\ p_{\alpha_n};\ \varepsilon)$，由于 $\lim\limits_\delta p_{\alpha_i}(x_\delta-x)=0$, $i=1,\ \cdots,\ n$. 故存在 δ_0, 使得当 $\delta>\delta_0$ 时有 $p_{\alpha_i}(x_\delta-x)<\varepsilon$, $i=1,\ \cdots,\ n$, 亦即 $x_\delta-x\in U(p_{\alpha_1},\ \cdots,\ p_{\alpha_n};\ \varepsilon)$，从而 $x_\delta\xrightarrow{\tau}x$. □

(3) 若 A 是 τ 有界的，任取 $\alpha_0\in I$, $U(p_{\alpha_0};\ 1)$是 0 点 τ 邻域，故存在 $\lambda>0$, 使 $A\subset\lambda U(p_{\alpha_0};\ 1)$. 所以，当 $x\in A$ 时，有 $p_{\alpha_0}(x)\leqslant\lambda$, 从而对任 $x,\ y\in A$, $p_{\alpha_0}(x-y)\leqslant p_{\alpha_0}(x)+p_{\alpha_0}(y)\leqslant 2\lambda$, 亦即 $\operatorname{diam}(A,\ p_{\alpha_0})\leqslant 2\lambda$.

反之，任取 $U(p_{\alpha_1},\cdots,p_{\alpha_n};\ \varepsilon)$. 令 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\operatorname{diam}(A,\ p_{\alpha_i});\ p_{\alpha_i}(x_0)$，对某个 $x_0\in A\}$，则 $p_{\alpha_i}(y)\leqslant p_{\alpha_i}(x_0)+p_{\alpha_i}(x_0-y)\leqslant 2M$, $\forall y\in A$, $i=1,\ \cdots,\ n$. 从而 $A\subset\dfrac{2M}{\varepsilon}U(p_{\alpha_1},\ \cdots,\ p_{\alpha_n};\ \varepsilon)$. 故 A 是 τ 有界的. □

有了以上准备工作之后，我们可以对局部凸线性拓扑空间的构造予以描述.

定理 2.1.5 设 X 是局部凸空间，则它的拓扑 τ 必可以由一族连续半范生成.

证明：由定义 2.1.1 的注 1 知，τ 有一族闭凸均衡吸收集构成的局部基 $\{V_\alpha; \alpha\in I\}$. 对每个 V_α，由于 $0\in \operatorname{int} V_\alpha$，根据定理 2.1.1 及定理 2.1.2 可以决定一个相应的 Minkowski 泛函 p_α，且 p_α 是 τ 连续半范. 由这一族连族半范又可生成 X 上一个局部凸拓扑 τ'. 由于每个 p_α 是 τ 连续的，故 $U(p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n}; \varepsilon)$ 是 τ 的开集，从而 $\tau'<\tau$. 又因 $V_{p_\alpha}\subset V_\alpha$，故 V_α 是 τ' 的开邻域，从而 $\tau=\tau'$. □

注：一般来说，定理中的 $\{p_\alpha; \alpha\in I\}$ 是相当大的一族半范.

定义 2.1.3 设 $\mathscr{N}$ 是线性拓扑空间 (X, τ) 的一族连续半范. 称 $\mathscr{N}$ 为 X 上连续半范的基（或子基），如果对 (X, τ) 上任何连续半范 σ，存在 $t>0$，和 $p\in\mathscr{N}$，使 $\sigma\leqslant tp$，等价地 $B_p\subset tB_\sigma$（相应地，存在 $c_1, \cdots, c_n>0$，$p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n}\in\mathscr{N}$，使

$$\sigma(x)\leqslant c_1p_{\alpha_1}(x)+\cdots+c_np_{\alpha_n}(x), \ \forall x\in X).$$

我们看到，如果 $\mathscr{N}$ 是 (X, τ) 的一个连续半范的基（子基），则 (X, τ) 可以仅由 $\mathscr{N}$ 生成. 所以，一般地，我们往往去寻找这种最小族，使局部凸拓扑的刻划较为简单. 事实上，我们有：

定理 2.1.6 若 $\mathscr{N}$ 是局部凸空间 (X, τ) 的连续半范基（子基），则 $\{tV_{p_\alpha}; p_\alpha\in\mathscr{N}, t>0\}$ 就是 (X, τ) 的一个局部基（子基）.

证明：任取 0 点 τ 邻域 U，则存在闭凸均衡吸收的 0 点 τ 邻域 W，使 $W\subset U$. 于是 p_W 就是 (X, τ) 上一个连续半范，从而存在 $t>0$，$p_\alpha\in\mathscr{N}$，使 $p_W\leqslant tp_\alpha$，故 $tW=tB_{p_W}\supset V_\alpha$（为了书写简便记 V_{p_α} 为 V_α）. 亦即 $W\supset\frac{1}{t}V_\alpha$，故 $\{tV_{p_\alpha}; p_\alpha\in\mathscr{N}, t>0\}$ 是 (X, τ) 的一个局部基.

当 $\mathscr{N}$ 是连续半范子基时，则存在 $c_1, c_2, \cdots, c_n>0$ 和 p_α，$p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n}\in\mathscr{N}$，使 $p_W\leqslant c_1p_{\alpha_1}+c_2p_{\alpha_2}+\cdots+c_np_{\alpha_n}$. 从而

$$\frac{1}{nc_1}V_{\alpha_1}\cap\frac{1}{nc_2}V_{\alpha_2}\cap\cdots\cap\frac{1}{nc_n}V_{\alpha_n}\subset B_{p_W}=W.$$

从而 $\{tV_{p_\alpha}; t>0, p_\alpha\in\mathscr{N}\}$ 是 (X, τ) 的局部子基. □

对线性空间 X 上的两族半范 $\mathscr{N}_1$ 和 $\mathscr{N}_2$，可以用简单方法来比较由这两族半范生成的局部凸拓扑的强弱.

定理 2.1.7 设 X 是线性空间，$\mathscr{N}_1$ 和 $\mathscr{N}_2$ 是 X 上两族半范，则由 $\mathscr{N}_1$ 生成的局部凸拓扑 τ_1 比由 $\mathscr{N}_2$ 生成的局部凸拓扑 τ_2 弱的充要条件是对每个 $q\in\mathscr{N}_1$，存在 $c_1, \cdots, c_m>0$ 和 $p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_m}\in\mathscr{N}_2$，使

$$q(x)\leqslant c_1p_{\alpha_1}(x)+\cdots+c_mp_{\alpha_m}(x),\ \forall x\in X.$$

证明. "⇐" 由定理 2.1.6 的证明过程知，此时

$$\frac{1}{mc_1}V_{\alpha_1}\cap\frac{1}{mc_2}V_{\alpha_2}\cap\cdots\cap\frac{1}{mc_m}V_{\alpha_m}\subset B_q,$$

故 $\tau_1<\tau_2$.

"⇐" 任取 $q\in\mathscr{N}_1$，由于 q 关于 τ_1 连续，且 $\tau_1<\tau_2$，故 q 关于 τ_2 是连续的，则存在 0 点的 τ_2 邻域 $U(p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n}; \varepsilon)$ 使得当 $x\in U(p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n}; \varepsilon)$ 时，有 $q(x)\leqslant 1$，故

$$q(x)\leqslant\frac{2}{\varepsilon}p_{\alpha_1}(x)+\cdots+\frac{2}{\varepsilon}p_{\alpha_n}(x). \ \square$$

利用定理 1.7.3，我们容易得到下面定理.

定理 2.1.8 设 τ_1 和 τ_2 是分别由线性空间 X 上两个半范族 $\mathscr{N}_1$ 和 $\mathscr{N}_2$ 生成的局部凸拓扑，如果每个 $p\in\mathscr{N}_1$ 是 τ_2 连续的，且每个 $q\in\mathscr{N}_2$ 是 τ_1 下半连续的，则当 $A(\subset X)$ 是 τ_1完备(或序列完备)时，A 也是 τ_2 完备(相应地，序列完备)的.

(四)局部凸空间可赋范化的充要条件.

所谓局部凸空间 (X, τ) 可赋范化是指存在 X 上的一个范数，使由它导出的拓扑与 τ 是一致的.

定理 2.1.9 (Hausdorff)局部凸线性拓扑空间(X, τ)可

赋范化的充要条件是存在一个有界的凸的 0 点邻域.

证明：必要性是显然的. 下面证充分性.

设 V 是有界凸的 0 点邻域，则存在有界闭凸均衡 0 点邻域 W，使 $W \subset V$，故 p_W 就是 (X, τ) 上一个连续半范. 并且当 $x \neq 0$ 时，存在 0 点邻域 U，使 $x \notin U$（由于 X 是 Hausdorff 的）. 由于 W 是有界的，故存在 $\lambda > 0$，使 $W \subset \lambda U$，于是 $\lambda x \notin W$，因而 $p_W(x) = \frac{1}{\lambda} p_W(\lambda x) > \frac{1}{\lambda} > 0$. 故 p_W 是一个范数.

又由于 p_W 是连续的，故 V_{p_W} 是 τ 开的. 因而 p_W 产生的拓扑弱于拓扑 τ. 反之，任取 0 点 τ 邻域 U，由于 W 是有界的，故存在 $\lambda > 0$，使 $W \subset \lambda U$. 从而 $\frac{1}{\lambda} W \subset U$，故 $\left\{x;\ p_W(x) < \frac{1}{\lambda}\right\} \subset \frac{1}{\lambda} W \subset U$. 因此 p_W 产生的拓扑强于拓扑 τ. □

§2 局部凸空间的性质

（一）连续线性泛函的性质.

定义 2.2.1 设 (X, τ) 是线性拓扑空间，称 (X, τ) 上全体连续线性泛函组成的线性空间为 (X, τ) 的共轭空间，记作 $(X, \tau)^*$. 在不致引起混淆的情况下，简记作 X^*.

定理 2.2.1 任何 $f \in (X, \tau)^*$ 可唯一地延拓为 $\tilde{f} \in (\tilde{X}, \tilde{\tau})^*$，其中 $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ 是 (X, τ) 的完备化.

证明：这是容易证明的.

定理 2.2.2 若 f 是 (X, τ) 上的非零线性泛函，则下列等价：

(1) f 是连续的.

(2) $N(f) \equiv \{x; f(x) = 0\}$ 是 τ 闭的.

(3) f 在 0 点某个邻域是有界的.

(4) f 在 0 点连续.

(5) f 是在 (X, τ) 上一致连续的.

证明：(1)⇒(2)显然成立.

(2)⇒(3)设 $N(f)$ 是 τ 闭的. 因为 $f\neq 0$，故存在 $x_0\in X'$ 使 $f(x_0)=1$，故 $N_1\equiv x_0+N(f)$ 是 τ 闭的. 且 $0\notin N_1$，因此存在 0 点均衡邻域 V，使 $V\cap N_1=\emptyset$.

当 $x\in V$，且 $f(x)\neq 0$ 时，$y=\frac{1}{f(x)}x\in N_1$，故 $y\notin V$，但 $x\in V$，由于 V 是均衡的，故 $|f(x)|<1$. 从而对一切 $x\in V$，有 $|f(x)|<1$. □

(3)⇒(4)设存在 0 点邻域 V，使 $|f(x)|\leqslant M$, $\forall x\in V$，则对任何 $\varepsilon>0$，$f^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))\equiv\{x;\ |f(x)|<\varepsilon\}\supset\frac{\varepsilon}{2M}V$，故 $f(x)$ 在 0 点连续. □

(4)⇒(5)对任何 $\varepsilon>0$，存在 $V\in\mathscr{U}$，使得当 $x\in V$ 时，$|f(x)|<\varepsilon$，选 0 点均衡邻域 W，使 $W+W\subset V$，则当 $x, y\in W$ 时，$x-y\in W+W$，故 $|f(x)-f(y)|=|f(x-y)|<\varepsilon$，从而 $f(x)$ 是一致连续的. □

(5)⇒(1)是显然的. □

定理2.2.3 设 T 是线性拓扑空间 X、Y 之间的线性映象. 则下列等价：

(1) T 在 X 上是连续的.

(2) T 在 0 点是连续的.

(3) 对 Y 中每个连续半范 p，pT 是连续的.

(4) T 在 X 上是一致连续的.

证明：与定理 2.2.2. 证明相仿.

(二)非零连续线性泛函的存在性.

根据定理 2.2.1，我们要问，是否对每个线性拓扑空间都存在非零连续线性泛函呢？回答是否定的.

例：$L_p[0, 1]=\{f;f$ 是$[0, 1]$上可测函数，且

$$\int_0^1|f(x)|^p dx<+\infty\},\ 0<p<1.$$

令 $!f! = \int_0^1 |f(x)|^p dx$.

若 $\Phi \in L_p[0, 1]^*$，令 $f_t(x) = \chi_{[0,t]}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$，其中 $\chi_{[0,t]}$ 是 $[0, t]$ 上的特征函数，则

$|\Phi(f_t) - \Phi(f_s)| \leqslant K ! \chi_{[0,t]} - \chi_{[0,s]} !^{1/p} = K |t-s|^{1/p}$，从而

$$\frac{|\Phi(f_t) - \Phi(f_s)|}{|t-s|} \leqslant K |t-s|^{1/p-1}, \ t \neq s,$$

故 $\frac{d\Phi(f_t)}{dt} \equiv 0$，从而 $\Phi(f_t) = \Phi(f_0) = 0$. 但是，$\mathrm{span}\{f_t; 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 在 $L_p[0, 1]$ 中是稠的，故 $\Phi = 0$. 因而 $L_p[0, 1]$, $0 < p < 1$，不存在非 0 连续线性泛函.

下面我们将会看到，对于局部凸空间，上述情况决不会发生.

定理 2.2.4 设 X 是线性拓扑空间. 若 f 是 X 上线性泛函，则 f 是连续的充要条件是存在连续的非负正齐性次可加泛函 $p(x)$，使 $|f(x)| \leqslant p(x)$, $\forall x \in X$.

证明："$\Rightarrow$" 若 f 是连续的，则令 $p(x) = |f(x)|$ 即可.

"$\Leftarrow$" 因为 $p(x)$ 是连续的，故存在 0 点均衡邻域 V，使得当 $x \in V$ 时有 $p(x) < 1$，又因 $|f(x)| < p(x)$，故 f 在 0 点邻域 V 是有界的. 利用定理 2.2.2 即知 f 是连续的. □

首先叙述 Hahn Banach 型定理(分析形式).

定理 2.2.5(Hahn-Banach) 设 X 是实线性空间，$p(x)$ 是 X 上正齐性次可加泛函，又设 $f(x)$ 是 X 的线性子空间 X_1 的线性泛函，满足 $f(x) \leqslant p(x)$, $\forall x \in X_1$，那末，必存在 X 上线性泛函 $\tilde{f}$，满足下列条件：

(1) 若 $x \in X$，则 $\tilde{f}(x) \leqslant p(x)$.

(2) 若 $x \in X_1$，则 $\tilde{f}(x) = f(x)$，即 $\tilde{f}$ 是 f 的延拓.

证明：与赋范空间相仿. 详见关肇直编"泛函分析讲义"(1958 年版) p. 76.

定理 2.2.6 设 X 是(复的)局部凸空间，X_1 是 X 的线性

子空间，则 X_1 上的一切连续线性泛函 f 可以延拓到 X 上的连续线性泛函.

证明：令 $r(x)=\mathrm{Re}\,f(x)$（$f(x)$的实部），则 $r(x)$是 X_1（作为实数体上的空间）上实值连续线性泛函. 故集合 $\{x;\ x\in X_1,\ |r(x)|<1\}$ 是 X_1 的 0 点邻域，从而存在 X 中 0 点均衡凸邻域 V，使 $V\cap X_1=\{x;\ x\in X_1,\ |r(x)|<1\}$.

令 $p_V(x)$是 V 的 Minkowski 泛函，则 $p_V(x)$是 X 上连续半范，并且 $V=\{x;\ p_V(x)<1\}$. 从而 $r(x)\leqslant p_V(x)$，$\forall x\in X_1$.

由定理 2.2.5 存在 X 上线性泛函 $\tilde{r}(x)$，满足

$$\tilde{r}(x)=r(x),\ \forall x\in X_1,$$
$$\tilde{r}(x)\leqslant p_V(x),\ \forall x\in X.$$

令 $\tilde{f}(x)=\tilde{r}(x)-i\tilde{r}(ix)$. 则 $f(x)=\tilde{f}(x)$，当 $x\in X_1$ 时，并且 $\tilde{f}$ 是 X 上(复)线性泛函.

对任意 $x\in X$，令 $\tilde{f}(x)=e^{i\theta}|\tilde{f}(x)|$，则

$$|\tilde{f}(x)|=e^{-i\theta}\tilde{f}(x)=\tilde{f}(e^{-i\theta}x)$$
$$=\tilde{r}(e^{-i\theta}x)\leqslant p_V(e^{-i\theta}x)=p_V(x).$$

由定理 2.2.4 知 $\tilde{f}$ 是连续的. □

下面讨论 Hahn-Banach 型定理的几何形式——分离定理.

定理 2.2.7 设 X 是实局部凸空间，A 是 X 中均衡闭凸集，$x_0\in X\setminus A$，则存在 $f\in X^*$，使

$$\sup_{x\in A}|f(x)|\leqslant 1<|f(x_0)|.$$

证明：由于 $x_0\notin A$，故存在 0 点均衡凸邻域 V_1，使 $A\cap(x_0+V_1)=\emptyset$，取 $V=\frac{1}{2}V_1$，则 $(A+V)\cap(x_0+V)=\emptyset$. 从而 $a\notin\overline{A+V}$.

又因为 $A+V$ 是凸均衡吸收集，故存在相应的 Minkowski 泛函 $p(x)$，且 $p(x)$是连续的. 因 $x\notin\overline{A+V}$，故 $p(x_0)>1$.

令 $X_1=\mathrm{span}(x_0)$，$\varphi(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)$，$\forall\lambda$.

从而 $$\varphi(x)\leqslant p(x),\ \forall x\in X_1.$$

由定理 2.2.5, φ 可延拓为 X 上线性泛函 f, 且满足

$$f(x)\leqslant p(x),\ \forall x\in X.$$

由定理 2.2.4, $f\in X^*$, 且当 $x\in A(\subset A+V)$ 时,

$$|f(x)|\leqslant p(x)\leqslant 1<p(x_0)=\varphi(x_0)=f(x_0).\quad \square$$

推论 2.2.8 设 X 是实的(Hausdorff)局部凸线性拓扑空间, $x_0\neq 0$, 则存在 $f\in X^*$, 使 $f(x_0)\neq 0$. 特别地, $X^*\neq\{0\}$.

推论 2.2.8 表明, 当 X 是(Hausdorff)局部凸空间时, X 上有足够多的非 0 连续线性泛函(可以证明对复的局部凸空间也是成立的).

下面, 我们再列举几个常用的分离定理.

定理 2.2.9 若 A 是线性拓扑空间 X 的一个凸子集, $\operatorname{int} A\neq\phi$, 又 B 是 X 的非空凸子集, 且 $B\cap\operatorname{int} A=\emptyset$, 则存在实闭超平面分离 A、B, 就是说存在 $f\in X^*$, $c\in \boldsymbol{R}^1$, 使

$$A\subset\{x; f(x)\leqslant c\},\ B\subset\{x; f(x)\geqslant c\}.$$

若 A、B 都是开凸集, 且 $A\cap B=\emptyset$, 则存在实闭超平面 H 严格分离 A、B. 就是说, 存在 $f\in X^*$, $\alpha\in\boldsymbol{R}^1$, 使

$$f(x)<\alpha<f(y),\ \forall x\in A,\ y\in B.$$

证明: 见 Schaefer 著 «Topological vector spaces» (1971) p. 64.

定理 2.2.10 若 X 是局部凸空间, A 是闭凸集, B 是紧凸集, 且 $A\cap B=\emptyset$, 则存在一个实闭超平面 H 强分离 A、B, 即存在 $f\in X^*$, $\alpha\in\boldsymbol{R}^1$, 使

$$\sup f(B)<\alpha<\inf f(A).$$

证明: 见 Schaefer 著 «Topological vector spaces» (1971) p. 65.

定理 2.2.11(支撑定理) 若 X 是实局部凸空间, A 是凸实心体, 则对任 $x\in\partial A$(A 的边界)存在一个闭支撑超平面, 即存在 $f\in X^*$, 使 $f(x)=\sup f(A)$.

证明: 容易从定理 2.2.9 得到$\square$.

上面已证明，当 X 是局部凸线性空间时，则 $X^* \neq \{0\}$. 但是，是否非局部凸空间必不存在非 0 连续线性泛函呢？回答是否定的. 见下面例子.

例：$l_p = \left\{(\xi_i);\ \xi_i \in \boldsymbol{R}^1, \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty\right\}$,

$$\|(\xi_i)\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p,\ (0<p<1).\ \square$$

大家知道，坐标泛函 $f_1^*((\xi_i)) = \xi_1$ 是非零连续线性泛函. 下面我们证明 $l_p(0<p<1)$ 不是局部凸的. 为此，首先证明下面定理.

定理 2.2.12 若 X 是局部凸空间，则有界集 A 的凸包 $\mathrm{co}(A)$ 是有界的.

证明：由于 A 是有界的，对任何 0 点凸邻域 V，存在 $\lambda>0$，使 $A \subset \lambda V$，从而 $\mathrm{co}(A) \subset \lambda V$. 这就表明 $\mathrm{co}(A)$ 是有界的. $\square$

事实 2.2.13 在 $l_p(0<p<1)$ 中，集 A 是有界的 $\Leftrightarrow A$ 是度量有界的，其中，$l_p(0<p<1)$ 中度量定义为

$$d((\xi_i),\ (\eta_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p.$$

证明：由于 $N(0,\ 1) = \{(\xi_i);\ d(0,\ (\xi_i))<1\}$ 是 l_p 中 0 点邻域，若 A 是有界的，则存在正整数 n_0，使 $A \subset n_0 N(0,\ 1)$，从而，$\mathrm{diam}\, A \leqslant 2n_0^p$. 因此，$A$ 是度量有界的.

反之，设 A 是度量有界的，容易看到，$A \subset N(0,\ r)$，对某个 r.

令 G 是 0 点的一个邻域，由于 $\left\{N\left(0, \frac{1}{n}\right);\ n \text{ 是正整数}\right\}$ 构成 l_p 的局部基，故存在某个正整数 m，使 $N\left(0, \frac{1}{m}\right) \subset G$，则 $A \subset N(0,\ r) \subset r^{1/p} N(0,\ 1) = (mr)^{1/p} N\left(0, \frac{1}{m}\right) \subset (mr)^{1/p} G$. 从而 A 是有界的. $\square$

下面我们构造 $l_p(0<p<1)$ 的一个有界集 D，使它的凸包

不是有界的. 根据定理 2.2.12 知, $l_p(0<p<1)$不是局部凸的.

令 $D=\{(\xi_i);\ \|(\xi_i)\|\leqslant 1\}$, 显然 D 是度量有界的, 根据事实 2.2.13, D 是有界的.

令 $e_n=(0,\cdots,0,\overset{\text{第}n\text{项}}{1},0\cdots)$, 则 $e_n\in D$.

取 $a_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}e_i=\Big(\overbrace{\dfrac{1}{n},\cdots,\dfrac{1}{n}}^{n\text{项}},0,\cdots\Big)$, 则 $a_n\in\text{co}(D)$, 但是 $\|a_n\|=\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\dfrac{1}{n}\right|^p=n^{1-p}\to+\infty$, 故$\{a_n\}$是度量无界的, 从而 $\text{co}(D)$ 不是有界的.

§3 w 拓扑和 w* 拓扑

(一) (X,τ)上的 w 拓扑.

定义 2.3.1 设(X,τ)是局部凸空间, 定义在 X 上使得 $X^*=(X,\tau)^*$ 的元是连续的最弱的局部凸拓扑称为 X 上的 w 拓扑. 也记作$\sigma(X,X^*)$.

注 1: 实际上, w 拓扑的局部基是由下列形式集构成: $U(x_1^*,\cdots,x_n^*;\varepsilon)=\{x;\ |x_i^*(x)|<\varepsilon,\ i=1,\cdots,n\}$. 因此, X 上 w 拓扑实际上是由半范族 $\{|x^*|;\ x^*\in X^*\}$ 生成的.

注 2: 显然, w 拓扑$<\tau$.

由注 2, 我们知道 X 的子集 A 是 w 闭的, 那末 A 必是 τ 闭的. 反之却不然, 但对于凸集, 逆命题却是正确的. 这就是下面著名的 Mazur 定理.

定理 2.3.1 (Mazur) 设 A 是局部凸空间(X,τ)的凸子集, 则 A 是 τ 闭的$\Leftrightarrow A$ 是 w 闭的.

证明: 设 A 是 τ 闭的, $x_0\notin A$, 由定理 2.2.10, 存在 $f\in X^*$, 使 $f(x_0)>\sup\{f(y);\ y\in A\}=\alpha$, 故 $x_0\notin\{x;\ f(x)\leqslant\alpha\}\supset\overline{A}^{w}$(其中 $\overline{A}^{w}$ 表示 A 的 w 闭包), 从而 $\overline{A}^{w}=A$, 因此 A 是 w 闭

的. □

推论 2.3.2 设 X 是赋范线性空间,则范数是 w 下半连续的, 即任何 $\{x_\delta\}\subset X$, $x_\delta\xrightarrow{w}x$, 则 $\|x\|\leqslant\underline{\lim}_{\delta}\|x_\delta\|$.

证明: 因为对任何 $r>0$, $\{x; \|x\|\leqslant r\}$ 是 w 闭的□.

根据定理 2.1.4, 我们有

定理 2.3.3 若 X 是局部凸空间,则

(1) (X, w)是 Hausdorff 的.

(2) $(x_\delta)\subset X$, 则 $x_\delta\xrightarrow{w}x\Leftrightarrow x^*(x_\delta)\to x^*(x)$, $\forall x^*\in X^*$.

特别地,关于有界集我们有

定理 2.3.4 若(X, τ)是局部凸空间, A 是 X 的子集, 则下列等价:

(1) A 是 τ 有界的.

(2) A 是 $\sigma(X, X^*)$有界的.

(3) $\sup\limits_{x\in A}x^*(x)<+\infty$, $\forall x^*\in X^*$.

(4) A 是 $\sigma(X, X^*)$全有界的.

证明: (1)⇒(2) 由 $\tau>\sigma(X, X^*)$知. □

(2)⇒(3) 由定理 2.1.4 知, 对每个 $x^*\in X^*$, $x, y\in A$, 有 $|x^*(x-y)|<M$, 对某个 $M>0$. 任取 $x_0\in A$, 则对任何 $y\in A$, 有

$$|x^*(y)|\leqslant|x^*(x_0)|+|x^*(x_0-y)|<|x^*(x_0)|+M. \ \square$$

(3)⇒(2)容易看到,对一切 $x^*\in X^*$, 有

$$\sup_{x\in A}|x^*(x)|<+\infty,$$

根据定理 2.1.4 知, A 是 $\sigma(X, X^*)$有界的. □

(2)⇒(1)设 $\{p_\alpha; \alpha\in I\}$ 是生成 τ 的半范族, 只须证明对每个 α, $\sup p_\alpha(A)<+\infty$, 即可.

令 $N_\alpha=\{x; p_\alpha(x)=0\}$, 则 N_α 是 X 中 τ 闭子空间.

令 $X_\alpha=X/N_\alpha$, Q_α: $X\to X_\alpha$ 是商映像.

再令$\|Q_\alpha x\|_\alpha = p_\alpha(x)$，则$(X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$是赋范线性空间．又令$A_\alpha = Q_\alpha A$．问题转化为证明$A_\alpha$是$(X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$中的有界集．

任取$\Phi \in (X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)^*$，作$X$中泛函$x^*(x) = \Phi(Q_\alpha x)$，显然$x^* \in (X, \tau)^*$，由于$A$是$\sigma(X, X^*)$有界的，故

$$\sup_{y \in A_\alpha} |\Phi(y)| = \sup_{x \in A} |x^*(x)| < +\infty,$$

由共鸣定理，A_α是$(X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$中有界集．□

(4)⇒(2)显然成立．

(2)⇒(4)作乘积空间$P = \prod_{x^* \in X^*} K_{x^*}$（其中$K_{x^*} \equiv K$为数体）．

令$T: X \to \prod_{x^* \in X^*} K_{x^*}$，使$Tx = \{x^*(x); x^* \in X^*\}, \forall x \in X$．

显然，$TX \subset P$，由于X是局部凸(Hausdorff)空间，故若$x \neq y$，必存在$x^* \in X^*$，使$x^*(x) \neq x^*(y)$，从而映象T是$(X, \sigma(X, X^*))$到P内的1—1线性同胚．令$P_{x^*}: P \to K_{x^*}$是投影算子，则$P_{x^*}TA$是K_{x^*}中有界子集，因此$\overline{P_{x^*}TA}$是K_{x^*}中紧集．由Тихонов定理，$\prod_{x^* \in X^*} \overline{P_{x^*}TA}$是$P$中紧集，又$TA \subset \prod_{x^* \in X^*} \overline{P_{x^*}TA}$，故$TA$是$P$中全有界集，从而$A$是$(X, \sigma(X, X^*))$中全有界集．□

这个定理告诉我们，不同拓扑可以具有相同有界集．下面定理指出不同拓扑可以具有相同连续线性泛函．

定理 2.3.5 设(X, τ)是局部凸空间，则

$$(X, \sigma(X, X^*))^* = (X, \tau)^*.$$

证明：因为$\tau > \sigma(X, X^*)$，故$(X, \sigma(X, X^*))^* \subset (X, \tau)^*$．反之，由$\sigma(X, X^*)$定义知，

$$(X, \tau)^* \subset (X, \sigma(X, X^*))^*. \ \square$$

(二)X^*中的w*拓扑和强拓扑．

设(X, τ)是局部凸空间，则$(X, \tau)^* \neq \{0\}$．首先，我们在其中导入两种拓扑．

(1) w* 拓扑($\sigma(X^*, X)$).

对每个固定的$x\in X$，令$\hat{x}(x^*)=x^*(x)$，$\forall x^*\in X^*$，则$\hat{x}$是X^*上的线性泛函，称J_X: $X\to\hat{X}(J_X(x)=\hat{x})$是$X$到$X^{*\prime}$(其中$X^{*\prime}$是$X^*$上全体线性泛函的空间)的典型嵌入映象.

容易看到，$|\hat{x}(x^*)|\equiv|x^*(x)|$定义了$X^*$上的一个半范.

定义 2.3.2 若(X, τ)是局部凸空间，X^*上由半范族$\{|\hat{x}(x^*)|;\ x\in X\}$生成的$X^*$上的局部凸拓扑叫$X^*$上的 w* 拓扑，记作$\sigma(X^*, X)$.

注 1: 事实上，这个局部凸拓扑的局部基是如下形式集:

$U(x_1, \cdots, x_n;\ \varepsilon)=\{x^*;\ |x^*(x_i)|<\varepsilon,\ i=1, \cdots, n\}$.

注 2: 显然，若$\{x_\sigma^*\}\subset X^*$，则

$$x_\delta^*\xrightarrow{w^*}x^*\Leftrightarrow x_\delta^*(x)\to x^*(x),\ \forall x\in X.$$

注 3: 以后，我们也将$J_XX\equiv\hat{X}$记作X，并且把两者等同看待. 容易看到，$X\subseteq(X^*, \sigma(X^*, X))^*$，下面我们将证明等号成立.

(2) X^*中的强拓扑.

记(X, τ)中有界集全体为$\mathscr{B}$.

设$B\in\mathscr{B}$，定义

$$p^B(x^*)=\sup\{|x^*(x)|;\ x\in B\},\ \forall x^*\in X^*.$$

由于，B是(X, τ)中有界集，由定理 2.3.4 知，$p^B(x^*)$是有限值，并且容易验证，它是X^*上的半范.

定义 2.3.3 设(X, τ)是局部凸空间，$\mathscr{B}$为(X, τ)中全体有界集，由$\{p^B(x^*);\ B\in\mathscr{B}\}$这族半范生成的$X^*$上的局部凸拓扑称为$X^*$上的强拓扑，记为$\beta(X^*, X)$.

注 1: 容易看到，$\beta(X^*, X)$就是在(X, τ)的有界集上一致收敛的X^*上的拓扑. 这是因为对(X, τ)中任何有界集B和$\varepsilon>0$，$\{x^*;\ p^B(x^*)<\varepsilon\}$是$X^*$中 0 点的$\beta(X^*, X)$邻域.

注 2: 由于每个$x\in X$，显然是(X, τ)中有界集，故

$$\sigma(X^*, X) < \beta(X^*, X).$$

注 3：容易看到，对赋范空间$(X, \|\cdot\|)$，$\beta(X^*, X)$就是X^*中范数拓扑：

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)|;\ x \in U(X) \equiv \{x;\ \|x\| \leqslant 1\}\}.$$

注 4：以后不作特别声明，X^*总取强拓扑$\beta(X^*, X)$，而$(X^*, \beta(X^*, X))$称为X的共轭(线性拓扑)空间.

定理 2.3.6(Alaoglu-Bourbaki)　设(X, τ)是局部凸线性拓扑空间，p是(X, τ)上一个连续半范，X上关于p连续的线性泛函全体记为X_p^*(它是X上全体线性泛函组成的空间X'的一个子空间，且$X_p^* = \{x^* \in X';\ \sup\limits_{p(x)\leqslant 1} |x^*(x)| < +\infty\}$)，则$X_p^*$按范数$\|x^*\|_p = \sup\limits_{p(x)\leqslant 1} |x^*(x)|$成为 Banach 空间，并且$X_p^*$中单位球$U(X_p^*) = \{x^* \in X_p^*;\ \|x^*\|_p \leqslant 1\}$关于$X^*$中 w* 拓扑是紧的.

证明：(1)　$(X_p^*, \|\cdot\|_p)$是 Banach 空间.

事实上，显然$(X_p^*, \|\cdot\|_p)$是赋范空间．任取$\{x_\delta^*\} \subset U(X_p^*)$，若$\{x_\delta^*\}$是$\sigma(X^*, X)$的 Cauchy 定向列，则对每个$x \in X$，$x_\delta^*(x)$是$\boldsymbol{R}^1$中的一个 Cauchy 定向列，故$x_\delta^*(x) \to \alpha$(存在)，定义

$$x^*(x) = \lim_\delta x_\delta^*(x).$$

容易看到$x^* \in X'$，又由于$x_\delta^* \in U(X_p^*)$，故$|x_\delta^*(x)| \leqslant p(x)$，$\forall x \in X$，故$|x^*(x)| \leqslant p(x)$，从而$x^* \in U(X_p^*)$．因此$U(X_p^*)$关于$\sigma(X^*, X)$是完备的，从而是$\sigma(X^*, X)$闭的．又$X_p^*$中由$\|\cdot\|_p$导出的拓扑强于由$\sigma(X^*, X)$在$X_p^*$中导出的拓扑，根据定理 1.7.3 知，$U(X_p^*)$关于$\|\cdot\|_p$是完备的．从而$(X_p^*, \|\cdot\|_p)$是 Banach 空间．□

(2)　令T：$X_p^* \to \prod\limits_{x\in X} K_x$，$T(x^*) = (x^*(x);\ x \in X)$，$\forall x^* \in X_p^*$．显然，$TX_p^*$是$\prod\limits_{x\in X} K_x$的子空间，且$TU(X_p^*)$是$\prod\limits_{x\in X} K_x$中有界子集，故$TU(X_p^*)$是$\prod\limits_{x\in X} K_x$中全有界集(Тихонов 定理).

又由于T是$(X_p^*, \sigma(X^*, X))$到$\prod_{x\in X} K_x$的线性同胚，故$U(X_p^*)$是$\sigma(X^*, X)$的全有界集. 从而根据定理1.7.2知$U(X_p^*)$是$\sigma(X^*, X)$紧的. □

注：当$(X, \|\cdot\|)$是赋范空间时，这个定理告诉我们，

$$U(X^*)=\{x^*; \|x^*\|\leqslant 1\}$$

是w*紧的. 这是一个很有用的结论. 并且X^*中任何范有界集是w*相对紧的. 应用共鸣定理知，Banach空间X的共轭空间X^*中任何w*有界、w*闭的子集是w*紧的. 这就是说，$(X^*, \sigma(X^*, X))$是一个Motel空间.

推论 2.3.7 若(X, τ)是局部凸空间，A是X^*中子集，并且关于τ, A是一个等度连续集(即对每个$\varepsilon>0$，存在X中0点τ邻域V，使得当$x\in V$, $x^*\in A$时，有$|x^*(x)|<\varepsilon$)，则A是$\sigma(X^*, X)$相对紧的.

证明：由等度连续集定义知，存在一个连续半范p，使得当$x\in B_p$时，有$|x^*(x)|\leqslant M$, $\forall x^*\in A$, 对某个正数M. 故$A\subset MU(X_p^*)$，从而A是$\sigma(X^*, X)$相对紧的□.

定理 2.3.8 设X是局部凸线性空间，则

$$(X^*, \sigma(X^*, X))^*=X.$$

证明：显然，$X\subset(X^*, \sigma(X^*, X))^*$. 另一方面，若$y\in(X^*, \sigma(X^*, X))^*$，则对任何$\varepsilon>0$，存在$U(x_1, \cdots, x_n; \delta)$使

$$U(x_1, \cdots, x_n; \delta)\subset y^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)\equiv\{x^*; |x^*(y)|<\varepsilon\}.$$

从而$x_1^\perp\cap\cdots\cap x_n^\perp\subset y^\perp$，其中$x^\perp\equiv\{x^*; \ x^*(x)=0\}$. 故$y=\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$，对某组数$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. 因此$y\in X$. □

§4 端点(extreme point)

定义 2.4.1 设A是实线性空间X的凸集. E是A的子集. 若$x, y\in A$, $z=tx+(1-t)y$，对某个$0<t<1$，有$z\in E$，则

必有 $x, y\in E$, 那么称 E 为 A 的端子集. 当 E 为单点集 $\{x\}$ 时,则称 x 为 A 的端点. A 的全体端点组成的集记作 $\operatorname{ext} A$.

性质 1.4.1 (1) 若 A 是线性空间 X 的凸子集, 又 $E\subset B\subset A$, B 是 A 的端凸子集且 E 是 B 的端子集, 则 E 是 A 的端子集.

(2) 若 A 是线性空间 X 的凸子集, 又 E 是 A 的端凸子集,则 $\operatorname{ext} E=(\operatorname{ext} A)\cap E$.

(3) 若 A 是局部凸空间 X 的紧凸集, 则对任 $x^*\in X^*$, $\{x; x\in A,\ x^*(x)=\sup\limits_{y\in A} x^*(y)\}$ 是 A 的一个闭凸端子集.

这些性质的证明直接从定义验证即可.

端点是一个与代数运算有关的概念,但下面著名的定理,使我们可以用端点来表示一个紧凸集.

定理 2.4.2(Krein-Milman) 令 K 是局部凸空间 X 的紧凸集,则 K 是它的端点的闭凸包, 即 $K=\overline{\operatorname{co}}(\operatorname{ext} K)$.

证明: (一) $\operatorname{ext} K\neq\emptyset$.

事实上, 令 $\mathscr{F}=\{F;\ F$ 是 A 的闭凸端子集$\}$, 显然 $\mathscr{F}\neq\emptyset$. 在 $\mathscr{F}$ 中定义半序: $F_1<F_2\Leftrightarrow F_1\supset F_2$. 由 Zorn 引理, 存在 $\mathscr{F}$ 的一个极大元 F_0. F_0 必是单点集, 否则存在 $x_1, x_2\in F_0$, $x_1\neq x_2$. 故有 $x^*\in X^*$, 使 $x^*(x_1)<x^*(x_2)$. 令 $F_1=\{x;\ x\in F_0,\ x^*(x)=\sup\limits_{y\in F_0} x^*(y)\}$, 则 F_1 是 F_0 的真闭凸端子集, 故是 K 的一个闭凸端子集,这与 F_0 的定义矛盾. □

(二) 令 $K_1=\overline{\operatorname{co}}(\operatorname{ext} K)$, 若 $K_1\neq K$, 则存在 $x\in K$, 和 $x^*\in X^*$, 使 $\sup\limits_{y\in K_1} x^*(y)<x^*(x)$ (由分离定理).

令 $F=\{y;\ x^*(y)=\sup\limits_{z\in K} x^*(z)\}$, 则 F 是 K 的一个闭凸端子集, 并且 $F\cap K_1=\emptyset$. 另一方面, 由(一), $\operatorname{ext} F\neq\emptyset$, 且由性质 2.4.1 知 $\operatorname{ext} F\subset\operatorname{ext} K\subset K_1$, 又有 $F\cap K_1\neq\emptyset$, 这个矛盾表明 $K=K_1=\overline{\operatorname{co}}(\operatorname{ext} K)$. □

我们将在第 II 部分的第三章讨论各种具体的 Banach 空间单位球的端点。

§5 囿空间和桶形空间

(一)囿空间(Bornological space).

若(X, τ)是局部凸空间，$\mathscr{B}$表示(X, τ)中全体有界集. 由定理 2.3.4 知，(X, τ)中有界集与$(X, \sigma(X, X^*))$中的有界集是一致的. 一般地说τ与$\sigma(X, X^*)$是不同的. 于是产生下面问题：

(1) 若τ_1是X上使得τ_1有界集与τ有界集是一致的最强局部凸拓扑，那么τ_1应当如何构造？

由定理 1.5.2 知道，若$x^* \in (X, \tau)^*$，则x^*映有界集为有界集，但反之不然，于是就问：

(2) 若(X, τ)使X上映有界集为有界集的线性泛函必是连续的，那么τ应当具有什么特性？

由有界集的定义知，0 点的τ邻域必吸收一切τ有界集，反之，吸收一切τ有界集的集未必是 0 点的τ邻域，现在我们考虑：

(3) 若(X, τ)使得吸收一切有界集的集合必是 0 点邻域，那末τ应当具备什么条件？

我们将看到下面引入的囿空间就是满足上述条件的一种局部凸空间.

定义 2.5.1 若(X, τ)是局部凸空间，如果X上不能引入更强的局部凸拓扑，使其有界集与τ有界集一致，则(X, τ)称为囿空间.

注：定义就是说，若$\tau' > \tau$，且τ'有界集与τ有界集一致，则$\tau' = \tau$.

定理 2.5.1 若(X, τ)是局部凸空间，则下列等价：

(1) X 是囿空间.

(2) 吸收任意 τ 有界集的凸集都是 0 点 τ 邻域.

(3) 任何在 τ 有界集上取值有界的半范是连续的.

证明: ① 若 X 是囿空间, 且 V 是吸收任意 τ 有界集的凸集, 若 V 不是 0 点 τ 邻域, 则在 0 点 τ 邻域子基中补上 $V\cap(-V)$ 得到集 $\mathscr{B}_0$, 以 $\mathscr{B}_0$ 为 0 点邻域子基得到新的局部凸拓扑 τ'. 显然 τ' 严格强于 τ, 且 τ' 与 τ 有同样的有界集, 这与囿空间定义矛盾. 故(1)⇒(2). □

② 若 X 不是囿空间, 则在 X 中可引入局部凸拓扑 τ', 使 τ' 严格强于 τ, 且 τ' 与 τ 有同样的有界集. 从而必存在 0 点 τ' 邻域, 它不是 0 点 τ 邻域. 故(2)⇒(1). □

③ 若 X 中吸收任意 τ 有界集的凸集是 0 点 τ 邻域, 又 A 是 τ 有界的. p 是 X 的半范, 且当 $x\in A$ 时有 $p(x)\leqslant M$, 则 $p\left(\frac{x}{M+1}\right)<1$, $\forall x\in A$. 从而 $A\subset(M+1)V_p$, 故 V_p 吸收任意有界集, 因此 $0\in\operatorname{int}V_p$, 故 p 是连续的. 所以(2)⇒(3). □

④ 若 X 不是囿空间, 则存在局部凸拓扑 $\tau'>\tau$, 使 τ' 与 τ 有同样的有界集, 且存在一个凸的均衡吸收集 V, 它是 τ' 的 0 点邻域而不是 τ 的 0 点邻域, 故 p_V 是在每个 τ 有界集上取值有界的半范, 但 p_V 不是 τ 连续的. 故(3)⇒(1). □

注: 任给局部凸空间(X, τ), 我们在 X 上可以引入一个局部凸拓扑, 称为 τ_b, 它是以吸收任何 τ 有界集的一切凸集为 0 点局部基. 容易看到, (X, τ_b)是囿空间, τ_b 有界集与 τ 有界集是一致的, 且 $\tau_b>\tau$.

定理 2.5.2 任何赋可列半范的局部凸空间是囿空间. 特别地, 赋范空间是囿空间.

证明: 不妨设

$$p_1(x)\leqslant p_2(x)\leqslant\cdots. \tag{*}$$

若存在一个吸收任何有界集的凸集 V, 它不是 0 点邻域, 令

p_V 是相应的 Minkowski 泛函(不妨设 V 是均衡的)。

对 X 中任何有界集 E, 由于 V 吸收 E, 故有

$$\sup_{x\in E} p_V(x)<+\infty \tag{**}$$

但由于 V 不是 0 点邻域, 故对任何正整数 n 及 $\lambda>0$, 有 $\lambda B_{p_n}\not\subset V$, 从而存在 $x_{n,\lambda}\in\lambda B_{p_n}\backslash V$, 所以, $p_n(x_{n,\lambda})\leqslant\lambda$, 但 $p_V(x_{n,\lambda})\geqslant 1$, 令 $x_n=n\cdot x_{n,\frac{1}{n}}$, $E'=\{x_n\}$, 当 $n\geqslant m$ 时, 由(*),

$$p_m(x_n)\leqslant p_n(x_n)=np_n(x_{n,\frac{1}{n}})\leqslant n\cdot\frac{1}{n}=1,$$

故 E' 是 X 中有界集, 但 $p_V(x_n)=np_V(x_{n,\frac{1}{n}})\geqslant n$, 故

$$\sup_{x\in E'} p_V(x)=+\infty,$$

这与(**)矛盾. □

定理 2.5.3 设 (X,τ) 是局部凸空间, 则 X 是囿空间当且仅当从 X 到任意局部凸空间 Y 的线性有界算子是连续的.

证明: 设 X 是囿空间, Y 是局部凸空间, T: $X\to Y$ 是线性有界算子(有界指将有界集映成有界集). 设 W 是 Y 的 0 点凸邻域, 则 $V=T^{-1}(W)$ 是 X 中凸集, 且吸收 X 中任意有界集(事实上, 设 E 是 X 中有界集, 则 $G=T(E)$ 是 Y 中有界集, 故存在 $\lambda>0$, 使 $G\subset\lambda W$, 故 $E\subset T^{-1}(T(E))\subset\lambda T^{-1}(W)=\lambda V$). 由于 X 是囿空间, 故 V 是 0 点邻域, 从而 T 是连续的.

又令 $Y=(X,\tau_b)$, I: $(X,\tau)\to(X,\tau_b)$ 是恒等算子. 由定理 2.5.1 的注知道 I 是有界线性算子, (X,τ_b) 是局部凸空间, 由假设条件知 I 是连续的. 从而 $\tau_b<\tau$, 但另一方面, 显然 $\tau<\tau_b$, 故 $\tau=\tau_b$, 从而 (X,τ) 是囿空间. □

推论 2.5.4 若 X 是囿空间, 则 X 上的每个有界线性泛函必是连续的.

推论 2.5.5 若 X 是 Banach 空间, Y 是局部凸空间, 则任何有界线性算子 T: $X\to Y$ 必是连续的.

(二)桶形空间(Barreled space).

由定义 2.1.1 的注 1 知，局部凸空间(X, τ)有一组由桶所组成的局部基. 现在问，反过来是否每个桶必是 0 点的邻域？一般来说，这并不成立. 对于满足这种条件的局部凸空间我们称之为桶形空间.

定义 2.5.2 若局部凸空间(X, τ)中每个桶(闭凸均衡吸收集)是 0 点邻域，则称(X, τ)为桶形空间.

定理 2.5.6 局部凸空间 X 是桶形空间当且仅当 X 上的每个下半连续的半范是连续的.

证明：若 X 是桶形空间，p 是 X 的下半连续的半范，则 B_p 是闭凸均衡吸收集，故 B_p 是 0 点邻域，即 $0 \in \operatorname{int} B_p$，从而 p 是连续的.

反之，任取闭凸均衡吸收集 V，则 p_V 是下半连续的半范，由条件知 p_V 是连续的，从而 V 是 0 点邻域，故 X 是桶形空间. □

定理 2.5.7 Fréchet 空间是桶形空间.

注：这里，完备的局部凸的准赋范空间叫 Fréchet 空间 (Bourbaki 学派的定义). 有的书称完备的准赋范空间为 Fréchet空间，那么定理须改为局部凸的 Fréchet 空间是桶形空间. 特别地，Banach 空间是 Fréchet 空间.

证明：设 V 是 X 中闭凸均衡吸收集，故 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$. 由于 X 是完备的，由 Baire 纲定理知，$\operatorname{int} V \neq \emptyset$，由于 V 是均衡的，故 $0 \in \operatorname{int} V$，从而 V 是 0 点邻域. 因此 X 是桶形空间. □

定理 2.5.8 若 X 是桶形空间，则对任何从 X 到局部凸空间 Y 的连续线性算子族 $\{T_\alpha; \alpha \in I\}$，由 $\{T_\alpha; \alpha \in I\}$ 的逐点有界，即对任何 $x \in X$，$\{T_\alpha x; \alpha \in I\}$ 是 Y 中的有界集，推知 $\{T_\alpha; \alpha \in I\}$ 是等度连续的，即对 Y 中 0 点任何邻域 W，存在 X 中 0 点邻域 V，使 $T_\alpha(V) \subset W$，$\forall \alpha \in I$，或者说，$\bigcap_{\alpha \in I} T_\alpha^{-1}(W)$ 是 X 中 0 点邻域.

证明：任取 Y 的 0 点闭凸均衡邻域 W，令

$$V=\bigcap_{\alpha\in I}T_\alpha^{-1}(W),$$

则 $0\in V$, 故 $V\neq\emptyset$, 并且 V 是闭凸均衡集, 并且 V 还是吸收集(事实上, 由于对任何 $x\in X$, $\{T_\alpha x;\ \alpha\in I\}$ 是 Y 中有界集, 故存在 $\lambda>0$, 使 $T_\alpha(\lambda x)=\lambda T_\alpha x\in W$, $\forall\alpha\in I$. 从而 $\lambda x\in T_\alpha^{-1}(W)$, $\forall\alpha$, 亦即 $\lambda x\in V$), 由于 X 是桶形空间, 故 $0\in\operatorname{int}V$, 所以 $\{T_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 是等度连续的. □

定理 2.5.9(Banach-Steinhaus) 设 $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ 是从桶形空间 X 到局部凸空间 Y 的连续线性算子序列, 使得对每个 $x\in X$, $Tx=\lim\limits_n T_nx$, 则 T 也是从 X 到 Y 的连续线性算子.

证明: 显然, T 是线性的. 另外, 由于 $\lim\limits_n T_nx=Tx$, 故 $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ 是逐点有界的. 根据定理 2.5.8, $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ 是等度连续的. 任取 Y 中 0 点闭邻域 W, 则存在 X 中 0 点邻域 V, 使 $T_nV\subset W$, $\forall n$. 从而 $T_nx\in W$, $\forall n$, 当 $x\in V$ 时, 从而

$$Tx=\lim_n T_nx\in W,$$

当 $x\in V$ 时, 即 $V\subset T^{-1}(W)$, 故 T 是连续的. □

囿空间和桶形空间是两个互不包含的概念. 下面仅举一例说明, 囿空间不是桶形空间.

例: $(E_\infty;\ \|\cdot\|_2)=\{(\xi_i)_{i=1}^\infty;\ \xi_i$ 是实(或复)数, 且仅有有限项不为 $0\}$, $\|(\xi_i)\|_2=(\sum|\xi_i|^2)^{1/2}$, 则 $(E_\infty,\ \|\cdot\|_2)$ 是赋范空间, 从而是囿空间. 但它不是桶形空间. 事实上, 令 f_n: $E_\infty\to\boldsymbol{R}^1$(或复数体 E), $f_n((\xi_i))=n\xi_n$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是逐点有界的, 但 $\|f_n\|=n$, 故 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 不是等度连续的. □

第三章 对偶空间

在研究局部凸空间时，我们发现 X 与 X^* 有许多对称的性质. 下面将一般地讨论对偶空间. 把 X 与 X^* 处于同等的地位.

§1 线性空间的对偶与相容拓扑

定义 3.1.1 设 X、Y 是数域 K 上的两个线性空间，若存在一个从 $X\times Y$ 到 K 的双线性泛函 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$: $X\times Y\to K$, 即满足如下条件的泛函:

(1) $\langle a_1x_1+a_2x_2,\ y\rangle=a_1\langle x_1,\ y\rangle+a_2\langle x_2,\ y\rangle$,

$$\forall x_1,\ x_2\in X,\ y\in Y,\ a_1,\ a_2\in K,$$

(2) $\langle x,\ b_1y_1+b_2y_2\rangle=b_1\langle x,\ y_1\rangle+b_2\langle x,\ y_2\rangle$,

$$\forall x\in X,\ y_1,\ y_2\in Y,\ b_1,\ b_2\in K.$$

则称 X、Y 及 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 构成一个对偶. 记作 $\langle X,\ Y\rangle$.

若 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 还满足下列分离公理:

(1) 若对每个 $y\in Y$, 有 $\langle x,\ y\rangle=0$, 则 $x=0$,

(2) 若对每个 $x\in X$, 有 $\langle x,\ y\rangle=0$, 则 $y=0$,

则称 $\langle X,\ Y\rangle$ 是分离的. 此时称 $\langle X,\ Y\rangle$ 为对偶线性空间, 简称对偶空间.

象以前一样, 记 X 上全体线性泛函的集为 X'.

定义 3.1.2 X' 的子集 Y 称为在 X 上是全的, 如果 $x\neq0$, 则必存在 $y\in Y$, 使 $\langle x,\ y\rangle\neq0$.

定义 3.1.3 设 $\langle X,\ Y\rangle$ 为对偶空间, 定义 J_Y: $Y\to X'$,

$J_Y(y)(x)=\langle x, y\rangle$，则称 J_Y 为 Y 到 X' 的典型嵌入映像，同样定义 J_X: $X\to Y'$, $J_X(x)(y)=\langle x, y\rangle$，称 J_X 为 X 到 Y' 的典型嵌入映像.

注：若把 Y 中的元与 $J_Y(y)$ 视为同一的，则对偶空间 $\langle X, Y\rangle$ 实际上可看作由 X 与 X' 的子空间 Y 构成的.

定义 3.1.4 若 X 是(Hausdorff)局部凸空间，则 $\langle X, X^*\rangle$ 称为自然对偶.

在一般对偶空间(甚至对偶)中，我们可以用自然方式引入 w 拓扑.

定义 3.1.5 若 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，在 X 上引入使 Y 中的每个元是连续的最弱拓扑叫 X 上的 w 拓扑，记作 $\sigma(X, Y)$. 同样，在 Y 上引入使 X 中的每个元是连续的最弱拓扑叫 Y 上的 w 拓扑，记作 $\sigma(Y, X)$. 称 $\langle(X, \sigma(X, Y)), (Y, \sigma(Y, X))\rangle$ 为对偶拓扑空间.

注：事实上，$\sigma(X, Y)$ 是由半范族 $\{|\langle x, y\rangle|; y\in Y\}$ 生成 X 上的局部凸拓扑. 相应地，$\sigma(Y, X)$ 是由半范族 $\{|\langle x, y\rangle|; x\in X\}$ 生成的 Y 上的局部凸拓扑.

当 $Y=X^*$ 时，即在自然对偶中，$\sigma(X, X^*)$ 就是前面定义在 X 上的 w 拓扑，而 $\sigma(X^*, X)$ 就是 X^* 上定义的 w* 拓扑.

定理 3.1.1 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，则

$$\langle X, \sigma(X, Y)\rangle^*=Y, \langle Y, \sigma(Y, X)\rangle^*=X.$$

证明：与定理 2.3.8 相仿.

由这个定理知，若 (X, τ) 是局部凸空间，则有 $(X, \tau)^*=(X, \sigma(X, X^*))^*$，从而不同拓扑可以具有相同的连续线性泛函. 下面，我们将把具有这种性质的拓扑叫相容拓扑.

定义 3.1.6 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，τ 是 X 上的局部凸拓扑，若 $(X, \tau)^*=Y$，则称 τ 为 X 上关于 $\langle X, Y\rangle$ 的相容拓扑.

注：由这个定义及定理 3.1.1 知，$\sigma(X, Y)$ 是最弱的相容

拓扑.

定义 3.1.7 设$\langle X,Y\rangle$是对偶空间，称X上关于$\langle X,Y\rangle$的最强的相容拓扑为Mackey拓扑. 记为$m(X, Y)$.

§2 关于相容拓扑的对偶不变性

定义 3.2.1 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，P是X上的某个命题. 若P对X上某个相容拓扑τ_1成立，那么P对X上一切相容拓扑均成立，则称P为关于X上相容拓扑对偶不变的性质. 简称对偶不变的.

下面我们讨论哪些性质是对偶不变的.

定理 3.2.1 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，X中集合的有界性是对偶不变的.

证明：设τ是X上任意相容拓扑，则$(X, \tau)^*=Y$，由定理2.3.4知，τ有界性与$\sigma(X, X^*)$(即$\sigma(X, Y)$)有界性是一致的. □

注：定理的逆命题未必成立，即若τ有界集与$\sigma(X, Y)$有界集是一致的，τ未必是相容拓扑.

定理 3.2.2 设$\langle X, Y\rangle$是对偶空间，那么X的所有相容拓扑具有相同的闭凸集，相同的闭线性子空间，相同的均衡凸吸收闭集.

证明：设τ是X上任意相容拓扑，则$(X, \tau)^*=Y$. 由Mazur定理(定理2.3.1)，凸集A是τ闭的当且仅当A是$\sigma(X, Y)$闭的. □

对偶地，也可考虑Y上关于$\langle X, Y\rangle$的相容拓扑及Y的对偶不变性.

由此，今后一般地在研究相容拓扑时，若不加声明，X中有界集就是指$\sigma(X, Y)$有界集，同样，Y中的有界集就是指$\sigma(Y, X)$有界集.

§3 极(polar)

设 X 是 Banach 空间, X 上的 w 拓扑是以集

$$\{x\in X;\ |x_i^*(x)|<1,\ x_i^*\in X^*,\ i=1,\cdots n\}$$

数乘为局部基的. 且集合 $\{x^*;\ |x^*(x)|\leqslant 1,\ x\in U(X)=\{x;\ \|x\|\leqslant 1\}\}$ 是共轭空间 X^* 的单位球. 这种想法可以推广到局部凸空间. 为此,我们首先引入极的概念.

定义 3.3.1 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间. 若 $A\subset X$, 则 A 的极定义为

$$A^0=\{y\in Y;\ |\langle x, y\rangle|\leqslant 1,\ \forall x\in A\},$$

类似地,对 $B\subset Y$, 可定义 ${}^0B=\{x\in X;\ |\langle x, y\rangle|\leqslant 1,\ \forall y\in B\}$.

注 1: 在实线性空间,有时往往定义

$$A^0=\{y\in Y;\ \langle x, y\rangle\leqslant 1,\ \forall x\in A\}.$$

注 2: 若 X 是赋范空间, $(X, \|\cdot\|)^*=X^*$, 则

$$U(X)^0=U(X^*),\ {}^0U(X^*)=U(X).$$

注 3: 当 X_1 是 X 的线性子空间时,容易看到

$$X_1^0=X_1^\perp\equiv\{y\in Y,\ \langle x, y\rangle=0,\ \forall x\in X_1\}.$$

定理 3.3.1 极具有如下基本性质:

(1) 若 $A\subset B$, 则 $A^0\supset B^0$.

(2) $(tA)^0=\frac{1}{t}A^0,\ t\neq 0$.

(3) $(\bigcup_{j\in J}A_j)^0=\bigcap_{j\in J}A_j^0$.

(4) A^0 是 $\sigma(Y, X)$ 闭的均衡凸集.

(5) ${}^0(A^0)=\overline{\mathrm{aco}}^{\sigma(X,Y)}(A),\ ({}^0B)^0=\overline{\mathrm{aco}}^{\sigma(Y,X)}(B)$.

其中, $\mathrm{aco}(A)$ 表示 A 的均衡凸包. $\overline{\mathrm{aco}}^{\sigma(X,Y)}(A)$ 表示 A 的 $\sigma(X, Y)$ 闭的均衡凸包.

(6) $({}^0(A^0))^0=A^0$.

证明: (1)、(2)、(3)、(4),从定义出发,可以直接证明.

(5) 显然，$A\subset {}^0(A^0)$，且 ${}^0(A^0)$ 是 $\sigma(X, Y)$ 闭的均衡凸集. 故 $\overline{\mathrm{aco}}^{\sigma(X,Y)}(A)\subset {}^0(A^0)$，若存在 $x_0\in {}^0(A^0)\setminus\overline{\mathrm{aco}}^{\sigma(X,Y)}(A)$，由分离定理以及 $(X, \sigma(X, Y))^*=Y$ 知，存在 $y\in Y$，使

$$|\langle x_0, y\rangle|>1\geqslant\sup\{|\langle x, y\rangle|;\ x\in A\}.$$

故 $y\in A^0$，这又与 $x_0\in {}^0(A^0)$ 矛盾. 故 ${}^0(A^0)=\overline{\mathrm{aco}}^{\sigma(X,Y)}(A)$. 对 ${}^0(B^0)=\overline{\mathrm{aco}}^{\sigma(Y,X)}(B)$，可类似证明. □

(6) 由于 $A\subset {}^0(A^0)$，由(1)，$A^0\supset({}^0(A^0))^0$，反之，若 $y\in A^0$，则 $|\langle x, y\rangle|\leqslant 1$，$\forall x\in A$. 又由于 ${}^0(A^0)=\overline{\mathrm{aco}}^{\sigma(X,Y)}(A)$. 故 $|\langle x, y\rangle|\leqslant 1$，$\forall x\in {}^0(A^0)$. 故 $y\in({}^0(A^0))^0$，从而

$$A^0=({}^0(A^0))^0.\ \square$$

下面，我们用极来描述 τ_b（在 Y 的有界集上一致收敛的 X 上的拓扑），从而找出 $m(X, X^*)$ 的拓扑构造.

定理 3.3.2 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，则

(1) X 的子集 A 是 $\sigma(X, Y)$ 有界的充要条件为 A^0 是吸收的.

(2) 若 A 是 X 的子集，则 A^0 是 $\sigma(Y, X)$ 有界的充要条件为 ${}^0(A^0)$ 是吸收的.

证明：(1) 若 A 是 $\sigma(X, Y)$ 有界的，则对任 $y\in Y$，存在 $M_y>0$，使得当 $x\in A$ 时，有 $|\langle x, y\rangle|\leqslant M_y$，故 $\dfrac{y}{M_y}\in A^0$，由 A^0 是均衡的知，A^0 是吸收的. 反之，若 A^0 是吸收的，则对任何 $y\in Y$，$\exists\lambda>0$，使 $y\in\lambda A^0$，故当 $x\in A$ 时，$|\langle x, y\rangle|=\lambda\left|\left\langle x, \dfrac{y}{\lambda}\right\rangle\right|\leqslant\lambda$，因而 A 是 $\sigma(Y, X)$ 有界的. □

注：对 Y 的子集也有对偶的命题.

(2) 因为 $A^0\subset Y$，对称地，可以证明

A^0 是 $\sigma(Y, X)$ 有界的 $\Leftrightarrow {}^0(A^0)$ 是吸收的. □.

定理 3.3.3 若 X 是桶形空间，则 X^* 中子集 B 是等度连续的当且仅当 B 是 $\sigma(X^*, X)$ 有界的.

证明：考虑自然对偶 $\langle X, X^*\rangle$. 显然，X^* 中子集 B 是等度连续的当且仅当 ${}^0B$ 是 X 中 0 点 τ 邻域，从而 ${}^0B$ 是吸收的. 由定理 3.3.2(1)知，B 是 $\sigma(X^*, X)$有界的.

反之，B 是 $\sigma(X^*, X)$有界的，再应用定理 3.3.2 知，${}^0B$ 是吸收的. 故 ${}^0B$ 是 X 中 $\sigma(X, X^*)$闭的凸均衡吸收集，由于 X 是桶形空间，从而 ${}^0B$ 是 0 点 τ 邻域. □

注：容易看到，一般局部凸空间中，若 B 是 X^* 的子集，则

B 是等度连续的 $\Rightarrow$ B 是 $\beta(X^*, X)$ 有界的 $\Rightarrow$ B 是 $\sigma(X^*, X)$有界的.

（囿空间：B 是 $\beta(X^*, X)$ 有界的 $\Rightarrow$ B 是等度连续的；桶形空间：B 是 $\sigma(X^*, X)$有界的 $\Rightarrow$ B 是等度连续的.）

§4 可允许拓扑

首先，我们注意到，在 $\langle X, Y\rangle$ 中，X 的 $\sigma(X, Y)$拓扑实际上是在 Y 的有限集上一致收敛的 X 的拓扑. 这个拓扑是由半范族 $\{|\langle x, y\rangle|; y\in Y\}$ 生成的.

由于仅在有限集上一致收敛的拓扑是很弱的. 有时需要考虑在某个集类上一致收敛的拓扑，通常考虑 Y 中 $\sigma(Y, X)$有界的各种集类上一致收敛的拓扑. 例如，全体 $\sigma(Y, X)$有界集组成的类，全体 $\sigma(Y, X)$紧集组成的类，等等. 作为基本要求，我们将至少考虑具有如下性质的集类 $\mathscr{A}$：$\operatorname{span}\bigcup\{A; A\in\mathscr{A}\}=Y$. 因为否则所产生的拓扑将比 w 拓扑还弱，这是不行的.

定义 3.4.1 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，若 $\mathscr{A}$ 是 Y 中 $\sigma(Y, X)$有界集的某个类，使 $\operatorname{span}\bigcup\{A; A\in\mathscr{A}\}=Y$，则称 $\mathscr{A}$ 为可允许集族. 记 $T_{\mathscr{A}}$ 为在 $A\in\mathscr{A}$ 上一致收敛的拓扑，即由半范族 $\{p^A(x)=\sup\{|\langle x, y\rangle|; y\in A\}; A\in\mathscr{A}\}$ 决定的 X 上的局部凸拓扑. 若 X 上的一个拓扑 τ 等于某个 $T_{\mathscr{A}}$，则称 τ 为 X 中

关于 $\langle X, Y\rangle$ 的可允许拓扑，而 $\mathscr{A}$ 称为相应的可允许集族.

注：由于 $A\in\mathscr{A}$ 是有界的，故 $p^A(x)$ 是有限值，对每个 $x\in X$. 并且容易验证，它是一个半范. 实际上，$T_{\mathscr{A}}$ 的局部子基为 $\{U(A, \varepsilon)=\{x; |\langle x, y\rangle|<\varepsilon\}, A\in\mathscr{A}\}$（或者 $\{\varepsilon\cdot{}^0A; A\in\mathscr{A}\}$）.

有了可允许拓扑之后，我们着手描述 $m(X, X^*)$ 或 $m(X, Y)$. （下面我们将看到，实际上 $m(X, Y)$ 就是在 Y 的均衡凸 $\sigma(Y, X)$ 紧子集上一致收敛的 X 上的拓扑.）

为此，首先对一般局部凸拓扑予以描述.

定理 3.4.1 设 (X, τ) 是局部凸空间，则 τ 必是自然对偶 $\langle X, X^*\rangle$ 的可允许拓扑. 实际上，可以取 $\mathscr{A}$ 为 X^* 中关于 τ 等度连续集的全体，而 $\tau=T_{\mathscr{A}}$.

证明：设 V 是任何 0 点 τ 闭均衡凸 τ 邻域，则 V 是 $\sigma(X, X^*)$ 闭的. 故 $V={}^0(V^0)$，又 $V^0\in\mathscr{A}$，且 $B_{p^{V^0}}={}^0(V^0)=V$. 故 V 是 $T_{\mathscr{A}}$ 的一个邻域，从而 $\tau<T_{\mathscr{A}}$.

反之，C 是 X^* 中任何等度连续集，则存在 X 中 0 点 τ 闭凸均衡的 τ 邻域 V，使 $C\subset V^0$，故 ${}^0C\supset{}^0(V^0)=V$，从而 $B_{p^C}={}^0C\supset V$，所以 $T_{\mathscr{A}}<\tau$. □

推论 3.4.2 若 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，则 X 上的每个相容拓扑是可容许拓扑.

证明：若 τ 为相容拓扑，则 $(X, \tau)^*=Y$，故由定理知 τ 是 $\langle X, Y\rangle$ 的可允许拓扑. □

但反之不然，即存在可允许拓扑并不是相容拓扑.

若 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，我们看到 $\sigma(X, Y)$ 是最弱的可允许拓扑，而 $\beta(X, Y)$ 是最强的可允许拓扑.

在第一章 §7 中知，拓扑的强弱与完备性没有必然联系，但对可允许拓扑却有下面定理.

定理 3.4.3 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间，τ_1、τ_2 是两个可允许拓扑，且 $\tau_1<\tau_2$，若 X 的子集 A 关于 τ_1 完备（或序列完备或有

界完备)，则 A 关于 τ_2 也是完备(相应地，序列完备或有界完备).

证明：若 τ_1 由 $\{p^A;\ A\in\mathscr{A}_1\}$ 生成，其中 $\mathscr{A}_1$ 为 Y 中某个 $\sigma(Y,\ X)$ 有界集类. τ_2 由 $\{p^D;\ D\in\mathscr{A}_2\}$ 生成，其中 $\mathscr{A}_2$ 为 Y 中某个 $\sigma(Y,\ X)$ 有界集类.

$p^A(A\in\mathscr{A})$ 是 τ_1 连续的. 由于 $\tau_2>\tau_1$，故 $p^A(A\in\mathscr{A})$ 是 τ_2 连续的. 考虑半范 $p^D(D\in\mathscr{A}_2)$，由于对每个 $y\in Y$，$\langle x,\ y\rangle$ 是 $\sigma(X,\ Y)$ 连续的，又因为 τ_1 是可允许拓扑，故 $\tau_1>\sigma(X,\ Y)$，从而，我们有 $\langle x,\ y\rangle$ 是 τ_1 连续的，根据定义 $p^D(x)=\sup\{|\langle x,\ y\rangle|;\ y\in D\}$，容易看到，$p^D(x)$ 是 τ_1 上半连续的. 由定理 2.1.8 知，所证结论成立. □

推论 3.4.4 若 $(X,\ \tau)$ 是局部凸空间，则 X 中 $\sigma(X,\ X^*)$ 紧子集 A 是 τ 完备的.

证明：若 A 是 X 中 $\sigma(X,X^*)$ 紧子集，故 A 是 $\sigma(X,X^*)$ 完备的. 又 $(X,\ \tau)^*=X^*$，且 τ 是自然对偶 $\langle X,\ X^*\rangle$ 的可允许拓扑，而 $\sigma(X,\ X^*)$ 也是 $\langle X,\ X^*\rangle$ 的可允许拓扑，且 $\sigma(X,\ X^*)<\tau$，故 A 是 τ 完备的. □

§5 Mackey 定理

若 $\langle X,Y\rangle$ 是对偶空间，X 上最弱的相容拓扑是 $\sigma(X,Y)$，而 X 上最强的相容拓扑定义为 $m(X,\ Y)$，下面就研究它的局部基构造.

由于相容拓扑必是可允许拓扑，因而我们就设法找 Y 中 $\sigma(Y,\ X)$ 有界集的某个类 $\mathscr{A}$，使 $m(X,\ Y)=T_{\mathscr{A}}$.

引理 3.5.1 若 $\langle X,\ Y\rangle$ 是对偶空间，且 τ 是 X 上相容拓扑，则对 Y 中 τ 等度连续的任何子集 S，$({}^0S)^0$ 是 $\sigma(Y,\ X)$ 紧的.

证明：由于 S 是 τ 等度连续子集，故存在 X 中 0 点邻域

V, 使 $V\subset {}^0S$. 故 ${}^0S$ 是 0 点 τ 邻域, 从而 $p^{{}^0S}$ 是 X 上 τ 连续的半范, 由定理 2.3.6, $\{x^*;\ \sup\{|x^*(x)|;\ p^{{}^0S}(x)\leqslant 1\}\leqslant 1\}$ 是 $\sigma(Y, X)$ 紧的. (因为 $(X, \tau)^*=Y$). 但

$$({}^0S)^0=\{x^*;\ \sup\{|x^*(x)|;\ p^{{}^0S}(x)\leqslant 1\}\leqslant 1\},$$

故 $({}^0S)^0$ 是 $\sigma(Y, X)$ 紧的. □

引理 3.5.2 令 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间, $\mathscr{A}$ 是 Y 中一切 $\sigma(Y, X)$ 紧均衡凸子集, 则 $T_{\mathscr{A}}$ 是 X 上关于对偶 $\langle X, Y\rangle$ 的相容拓扑.

证明: 首先, 由于 $T_{\mathscr{A}}>\sigma(X, Y)$, 故

$$(X, T_{\mathscr{A}})^*\supset(X, \sigma(X, Y))^*=Y.$$

我们记得 $T_{\mathscr{A}}$ 是由半范 $\{p^A(x);\ A\in\mathscr{A}\}$ 生成的, 其中 $\mathscr{A}$ 是 Y 中一切 $\sigma(Y, X)$ 紧均衡凸子集.

若 $y\in(X, T_{\mathscr{A}})^*$, 则存在 $A_1, \cdots, A_n\in\mathscr{A}$ 和 $\varepsilon>0$, 使得当 $x\in U(p^{A_1}, \cdots, p^{A_n};\ \varepsilon)$ 时, 有 $|\langle x, y\rangle|<1$.

令 $D=\varepsilon\,\mathrm{co}(A_1\cup\cdots\cup A_n)$, 则容易看到 $D\in\mathscr{A}$, 并且, 当 $x\in V_{p^D}$ 时, $|\langle x, y\rangle|<1$. 故 $|\langle x, y\rangle|\leqslant p^D(x)$, $\forall x$. 任取 $x\in {}^0D$, 则 $|\langle x, z\rangle|\leqslant 1$, $\forall z\in D$, 所以

$$p^D(x)=\sup_{z\in D}|\langle x, z\rangle|\leqslant 1,\ \forall x\in {}^0D,$$

从而 $|\langle x, y\rangle|\leqslant p^D(x)\leqslant 1$, $\forall x\in {}^0D$, 故 $y\in({}^0D)^0$.

由于 D 是 $\sigma(Y, X)$ 紧的, (因 $\sigma(Y, X)$ 是 Hausdorff 拓扑), 故 D 是 $\sigma(Y, X)$ 闭的. 由定理 3.3.2(5) 知, $({}^0D)^0=D$, 故 $y\in D\subset Y$, 所以, $(X, T_{\mathscr{A}})^*=Y$. □

定理 3.5.3 (Mackey-Arens) 设 $\langle X, Y\rangle$ 是对偶空间, $\sigma(X, Y)$ 是 X 上的 w 拓扑, $T_{\mathscr{A}}$ 是在 Y 的在一切 $\sigma(Y, X)$ 紧均衡凸子集上一致收敛的拓扑, 则对 X 上任何局部凸拓扑 τ, τ 是相容的充要条件是 $\sigma(X, Y)<\tau<T_{\mathscr{A}}$.

特别地 $T_{\mathscr{A}}=m(X, Y)$.

证明: 若 τ 是相容的, 由定理 3.4.1, τ 是可允许拓扑, 即

$\tau=T_{\mathscr{A}_1}$, 其中 $\mathscr{A}_1$ 是 $(X, \tau)^*=Y$ 中关于 τ 等度连续集的全体. 由引理 3.5.1 知, 对任何 τ 等度连续集 S, $\overline{\text{aco}}^{\sigma(Y, X)}(S)=({}^0S)^0$ 是 $\sigma(Y, X)$ 紧的. 从而 $\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}$, 故 $\tau<T_{\mathscr{A}}$. 显然,

$$\tau>\sigma(X, Y).$$

反之,若 $\sigma(X, Y)<\tau<T_{\mathscr{A}}$, 则

$$(X, \sigma(X, Y))^*\subset(X, \tau)^*\subset(X, T_{\mathscr{A}})^*.$$

由定理 3.1.1 知 $(X, \sigma(X, Y))^*=Y$, 由引理 3.5.2 知, $(T_{\mathscr{A}})^*=Y$. 故 $(X, \tau)^*=Y$, 即 τ 是相容的.

由于 $m(X, Y)$ 是最强的相容拓扑, 且 $T_{\mathscr{A}}$ 是相容拓扑, 故 $m(X, Y)=T_{\mathscr{A}}$. □

根据这个定理,我们得到了 $m(X, Y)$ 的构造.

§6 Mackey 空间

定义 3.6.1 局部凸空间 (X, τ) 叫做 Mackey 空间, 如果 $\tau=m(X, X^*)$.

定理 3.6.1 桶形空间是 Mackey 空间.

证明: 由定理 3.5.3 知, $\tau<m(X, X^*)$.

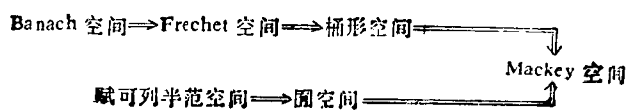
另一方面, 考虑 X^* 中 $\sigma(X^*, X)$ 紧均衡凸集 G, 由定理 3.3.2 知, G 是 τ 等度连续集, 故存在 0 点 τ 邻域 V, 使 $G\subset{}^0V$, 从而 $V\subset({}^0V)^0\subset G^0$, 因此, G^0 是 0 点 τ 邻域, 又 G^0 是 $m(X, X^*)$ 的局部子基的元, 故 $\tau>m(X, X^*)$. 从而

$$\tau=m(X, X^*). \quad □$$

定理 3.6.2 囿空间是 Mackey 空间.

证明: 因为 $(X, m(X, X^*))^*=X^*$, 由定理 3.2.1 知, τ 有界集与 $m(X, X^*)$ 有界集是一致的. 由囿空间定义, $\tau>m(X, X^*)$, 再由定理 3.5.3 知, $\tau=m(X, X^*)$. 故囿空间是 Mackey 空间. □

归纳上面定理，我们有



第二部分　Banach 空间的几何理论

第一章　Banach 空间中几种常用拓扑

在本文中，一般地，假设 X 是实的 Banach 空间，$X^* = (X, \|\cdot\|)^*$ 是 X 的共轭空间.

$$S(X) \equiv \{x; x \in X, \|x\| = 1\},$$
$$U(x) \equiv \{x; x \in X, \|x\| \leqslant 1\}.$$

类似地，记 $S(X^*)$，$S(X^{**})$，…；$U(X^*)$，$U(X^{**})$，…，等。

§1　Banach 空间 X 中的 w 拓扑及 X^* 中的 w* 拓扑

X 中的 w 拓扑 $\sigma(X, X^*)$ 和 X^* 中的 w* 拓扑 $\sigma(X^*, X)$ 的定义及一般性质已在第一部分线性拓扑空间中给出.

(一)一些主要结果.

(1) $(X, \sigma(X, X^*))^* = X^*$，$(X^*, \sigma(X^*, X))^* = J_X(X)$.

(2) Banach-Mazur 定理　若 A 是 Banach 空间 X 的凸集，则 A 是 w 闭 $\Leftrightarrow$ A 是范闭.

注 1：推论：若 $x_n \xrightarrow{w} x$，则存在 $\{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathrm{co}((x_n)_{n=1}^{\infty})$，使 $y_m \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

证明：否则，$x \notin \overline{\mathrm{co}}((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \overline{\mathrm{co}}^{w}((x_n)_{n=1}^{\infty})$，由分离定理即得矛盾. 证毕.

注 2：若 A 是 X^* 中凸集，则 A 是 w* 闭 $\Rightarrow$ A 是 w 闭 $\Leftrightarrow$

A 是范闭. 但下例说明 w 闭凸集不必是 w^* 闭的.

例: $X=L_1[0, 1]$, $X^*=L_\infty[0, 1]$, $C[0, 1]\subset L_\infty[0, 1]$. $C[0, 1]$ 是 $L_\infty[0, 1]$的范闭子空间,但不是 w^* 闭子空间. 事实上, $\overline{C[0, 1]}^{w^*}=L_\infty[0, 1]$. 这可如下证明: 任取 $f\in L_\infty[0, 1]$, 由 Лузин 定理,存在 $f_n\in C[0, 1]$, 使 $f_n\Rightarrow f$(测度收敛). 从而对任何 $x(t)\in L_1[0, 1]$,

$$f_n(x)=\int_0^1 f_n(t)x(t)\,dt\longrightarrow\int_0^1 f(t)x(t)\,dt=f(x),$$

即 $f_n\xrightarrow{w^*}f$, 从而 $f\in\overline{C[0, 1]}^{w^*}$. □

下面第四章讨论自反 Banach 空间时, 将看到, X 是自反的充要条件是 X^* 中任何 w 闭(凸)集必是 w^* 闭的.

(3) Banach-Alaoglu-Bourbaki 定理: $(U(X^*), \sigma(X^*, X))$是紧的 Hausdorff 拓扑空间.

注 1: 若 $A\subset X^*$, 则 A 是 $\sigma(X^*, X)$紧的 $\Leftrightarrow A$ 是范有界且$\sigma(X^*, X)$闭的. (由于 X 是 Banach 空间, 应用一致有界原理知, 范有界$\Leftrightarrow\sigma(X^*, X)$有界.)

同样也有,若 $A\subset X$, 则 A 是 $\sigma(X, X^*)$紧 $\Leftrightarrow A$ 是范有界且 $\sigma(X, X^*)$完备. (事实上, 应用一致有界原理, 范有界 $\Leftrightarrow\sigma(X, X^*)$有界, 且由 $\sigma(X, X^*)$性质知, $\sigma(X, X^*)$有界 $\Leftrightarrow\sigma(X, X^*)$全有界, 以及对线性拓扑空间中集$A$, A 是 $\sigma(X, X^*)$紧 $\Leftrightarrow A$ 是 $\sigma(X, X^*)$全有界并且 $\sigma(X, X^*)$完备的.)

注 2: 对赋范空间来讲, 可能存在一个 w^* 紧集, 并非范有界的, 见下例.

例: $X=\mathbf{R}^\infty\equiv\{(a_i)_{i=1}^\infty$; 仅有有限项为非 0 的实数,

$$\|(a_i)_{i=1}^\infty\|=\|(a_i)_{i=1}^\infty\|_1\equiv\sum|a_i|\}.$$

显然, $\boldsymbol{R}^\infty$ 不是完备的(关于上述范数),并且 $\boldsymbol{R}^\infty$ 是 $l^1\equiv l^1(\omega)$的子空间(不闭).

令 $\varphi_n\in X^*$: $\varphi_n((a_i)_{i=1}^\infty)=a_n$, 对于$(a_i)_{i=1}^\infty\in\boldsymbol{R}^\infty$.

令 $t_n>0$，且 $\lim t_n=+\infty$，再令 $G=\{0, t_1\varphi_1, t_2\varphi_2, \cdots\}\subset X^*$，则 G 是 X^* 中无界集(因为 $\|t_n\varphi_n\|=t_n$)，但是，$t_n\varphi_n\xrightarrow{w^*}0$，故 G 是 w^* 紧集. □

但是对赋范空间 X，若 w^* 紧集 G 是凸的，则 G 必是范有界的.

证明：因 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{G\cap nU(X^*)\}$.

G 是可数个 w^* 闭集之并，G 作为紧的拓扑空间，它是 Baire 空间，故 $G\cap nU(X^*)$ 的相对 w^* 开核不空，对某个 n. 亦即存在 $\varphi\in G\cap nU(X^*)$ 和 X^* 的 0 点 w^* 邻域 V，使

$$(\varphi+V)\cap G\subset G\cap nU(X^*)\subset nU(X^*).$$

另一方面，$G-G$ 是 w^* 有界，故被 V 吸收，即存在 λ，$0<\lambda<1$，使 $\lambda(G-G)\subset V$.

又因为 G 是凸的，故

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\varphi+\lambda G&\subset(\varphi+\lambda(G-G))\cap G\subset(\varphi+V)\cap G\\&\subset nU(X^*).\end{aligned}$$

故 $\lambda G\subset nU(X^*)-(1-\lambda)\varphi\subset MU(X^*)$，对某个 $M>0$.

从而 $G\subset\dfrac{M}{\lambda}U(X^*)$，亦即 G 是范有界的. □

(4) 我们将看到 $J_X(X)$ 在 (X^{**}, w^*) 中是一个“很大”的集合. 事实上，有

定理 1.1.1 (Goldstine-Weston 稠密性定理) $\overline{J_X(X)}^{w^*}=X^{**}$，其中 $J_X: X\to X^{**}$ 是典型嵌入映象.

证明：只须证明 $\overline{J_X(U(X))}^{w^*}=U(X^{**})$ 即可.

令 $\Phi\in U(X^{**})$，任取 Φ 的 w^* 邻域 V：

$V=\{\Psi\in X^{**};\ |<x_i^*, \Psi-\Phi>|<\varepsilon,\ x_i^*\in X^*,\ i=1, \cdots, n,\ \varepsilon>0\}$.

令 $r=\max\{\|x_i^*\|; i=1, \cdots n\}$，由 Helly 定理，存在 $x_\varepsilon\in X$ 使

$$\|x_\varepsilon\| \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2\gamma},\ \langle x_\varepsilon,\ x_i^*\rangle = \langle x_i^*,\ \Phi\rangle,\ i=1,\ \cdots,\ n.$$

再令$x_0 = \dfrac{\gamma}{\gamma+\varepsilon/2} x_\varepsilon$, 则 $\|x_0\| \leqslant 1$, 且

$$|\langle x_i^*,\ \hat{x}-\Phi\rangle| = |\langle x_0 - x_\varepsilon,\ x_i^*\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|x_0\| < \varepsilon.$$

故$\hat{x}_0 \equiv J_X(x_0) \in V$,所以$\Phi \in \overline{J_X(U(X))}^{w^*}$, 即

$$U(X^{**}) \subset \overline{J_X(U(X))}^{w^*}.$$

另一方面的包含关系, 由 Banach-Alaoglu-Bourbaki 定理即知. □

(5) 在无限维 Banach 空间中,范数拓扑严格强于 w 拓扑. 事实上,有下面定理.

定理1.1.2 若 X 是 Banach 空间, 则范数拓扑与 w 拓扑相同 $\Leftrightarrow \dim X < +\infty$.

证明: "$\Leftarrow$"显然.

"$\Rightarrow$" 设 X 中范数拓扑与 w 拓扑相同, 令 $V=\{x;\|x\|<1\}$ 是开单位球,则它也是 w 开集, 故存在 $x_1^*,\ \cdots,\ x_n^* \in X^*$, $\varepsilon>0$, 使

$$V_1 = \{x;\ |x_i^*(x)| < \varepsilon,\ i=1,\ \cdots,\ n\} \subset V,$$

故$\bigcap_{i=1}^{n}(x_i^*)^\perp \subset V$,由于$\bigcap_{i=1}^{n}(x_i^*)^\perp$是线性子空间,故

$$\bigcap_{i=1}^{n}(x_i^*)^\perp = 0,$$

因此,对任何$x^* \in X^*$, 有$\bigcap_{i=1}^{n}(x_i^*)^\perp \subset (x^*)^\perp$, 从而

$$x^* \subset \operatorname{span}\{x_1^*,\ \cdots,\ x_n^*\}.$$

故 X^* 是有限维的,从而 X 也是有限维的. □

注 1: X^* 的三种常用拓扑的关系如下:

$$w^* \text{拓扑} < w \text{拓扑} < \text{范数拓扑}.$$

第三章将证明, w^* 拓扑与 w 拓扑相等的充要条件为 X 是自反的.

注 2: 显然, 三种拓扑一般并不相同, 故引入以下一些性质,研究某些特殊情况.

定义 1.1.1 Banach 空间 X 称为具有 H 性质, 若 $x_n \xrightarrow{w} x$, $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$, 则 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. 即单位球面上序列的范数收敛与 w 收敛是一致的 (讨论见第五章) (有时也称之为 X 具 Kadec-Klee 范数).

定义 1.1.2 Banach 空间 X 称为 Schur 空间, 如果 X 中序列的 w 收敛与范数收敛是一致的(讨论见第五章).

定义 1.1.3 Banach 空间 X的共轭空间 X^*称为具有(**)性质,若在 X^* 中, $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x^*$, $\|x_\alpha^*\| \longrightarrow \|x^*\|$, 推得 $x_\alpha^* \xrightarrow{\|\cdot\|} x^*$,即在单位球面上范数拓扑与 w 拓扑一致(讨论见第七章).

定义 1.1.4 Banach 空间 X 叫做 Grothendieck 空间, 如果 X^* 中序列的 w^* 收敛与 w 收敛一致 (详细讨论见参考书[1] P. 229).

(二) w 拓扑与 w^* 拓扑的度量化问题.

首先列举以下三个定理(请比较它们的共同点和不同点), 然后分别证明之.

定理 1.1.3 $(X, \sigma(X, X^*))$或$(X^*, \sigma(X^*, X))$可度量化 $\Leftrightarrow \dim X < +\infty$.

定理 1.1.4 $(U(X^*), \sigma(X^*, X))$ 可度量化 $\Leftrightarrow X$ 是可分的. 此时$(U(X^*), \sigma(X^*, X))$成紧的度量空间(可分完备).

推论 X 可分 $\Leftrightarrow X^*$ 的每个闭球的相对 $\sigma(X^*, X)$拓扑可度量化.

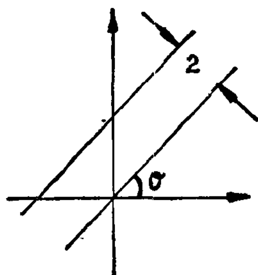
定理 1.1.5 $(U(X), \sigma(X, X^*))$可度量化 $\Leftrightarrow X^*$ 是可分的. 此时 $J_X(U(X))$成为紧度量空间 $(U(X^{**}), \sigma(X^{**}, X^*))$ 的稠子集.

下面分别证明这些定理. 为此首先需要下面引理.

引理 1.1.6 任何可数无穷集必包含不可数的子集族, 使

得每个子集是无限的，且两两的交集是有限的.

证明：不妨设这个可数无穷集 A 是平面上格点全体（即具整数坐标的点的全体）. 对每个 $\theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$，定义 A 的子集 A_θ：图中倾角为 θ，宽度为 2 的平行带中格点全体，则 $\left\{A_\theta;\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$ 即所求. □



引理 1.1.7 无穷维 Banach 空间 X 的 Hamel 维 $\geqslant c$（连续统）.

证明：由于 $\dim B=+\infty$，依 Hahn-Banach 定理，不难找到 $\{x_n\}\subset X$，$\{x_n^*\}\subset X^*$，使 $\|x_n\|=1$，$x_m^*(x_n)=\delta_{mn}$. 显然，$\{x_n\}$ 是线性无关的. 且 $x_n\notin\overline{\operatorname{span}}\{x_m;\ m\neq n\}$（因为 $\overline{\operatorname{span}}\{x_m;\ m\neq n\}\subset(x_n^*)^\perp$）. 依引理 1.1.6，对 $0<t<1$，可取正整数 N 的子集 N_t，使 N_t 的基数 $\operatorname{card}N_t=+\infty$，$\operatorname{card}(N_t\cap N_{t'})<+\infty$ $(t\neq t')$. 对任何 t，作 $x_t=\sum\limits_{n\in N_t}\frac{x_n}{2^n}$，显然 $x_t\in X$，且 $\{x_t;\ 0<t<1\}$ 是线性无关的. 事实上，若 $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i x_{t_i}=0$，其中 t_i 互不相同.

依作法，必存在 $n\in N_{t_1}\Big\backslash\left(\bigcup\limits_{i=2}^{k}N_{t_i}\right)$，故

$$0=x_n^*\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_{t_i}\right)=\frac{\alpha_1}{2^n},$$

从而 $\alpha_1=0$，同理 $\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$. 故 $\{x_t;\ 0<t<1\}$ 是线性无关的. 所以 X 的 Hamel 维 $\geqslant c$（连续统）. □

推论 1.1.8 可分无穷维 Banach 空间 X 的 Hamel 维 $=c$.

证明：设 $\{x_n\}$ 是 X 的稠子集. 任何 $x\in X$，必有 $x_{n_k}\xrightarrow{\|\cdot\|}x$，故 X 中任何元可以与 $\{n_k\}$ 对应，从而 $\operatorname{card}X\leqslant c$，由定理即知所要结论. □

推论 1.1.9 设 X 是无穷维 Banach 空间, $\{x_n\}\subset X$, 则必存在 $x\in X$, 使 $x\notin \operatorname{span}\{x_n; n=1, 2, \cdots\}$.

证明: 否则, X 的 Hamel 维为至多可数的. 矛盾! □

定理 1.1.3 的证明: 充分性显然成立, 以下证必要性. 设 $(X^*, \sigma(X^*, X))$ 可度量化, 故 X^* 具有可数 $\sigma(X^*, X)$ 局部基 $\{U_n\}$. 不妨设

$$U_n=U(x_1^n, \cdots, x_{m(n)}^n; 1).$$

若 $\dim X=+\infty$, 依推论 1.1.9, 存在 $x\in X$, $x\notin \operatorname{span}\{x_i^{(n)}; i=1, \cdots, m(n), n=1, 2, \cdots\}$.

作 X^* 的 0 点 $\sigma(X^*, X)$ 邻域 $U=U(x; 1)$, 则必有 n_0, 使 $\alpha U_{n_0}\subset U$, 由于 $x\notin \operatorname{span}\{x_1^{n_0}, \cdots, x_{m(n_0)}^{n_0}\}$, 依 Hahn-Banach 定理, 存在 $x^*\in X^*$, 使 $x^*(x)=1$, $x^*(x_i^{n_0})=0$, $i=1, \cdots, m(n_0)$, 从而 $x^*\in \alpha U_{n_0}\backslash U$, 矛盾.

关于 $(X, \sigma(X, X^*))$ 的结论可类似证明之. □

定理 1.1.4 的证明: 若 X 是可分的, 设 $\{x_n\}$ 是 X 中可数稠集. 令

$$\rho(f, g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|f(x_n)-g(x_n)|}{1+|f(x_n)-g(x_n)|}, \quad \forall f, g\in U(X^*).$$

易见 $(U(X^*), \rho)$ 是度量空间, 并且 $f_\delta\xrightarrow{w^*}f\Leftrightarrow\rho(f_\delta, f)\longrightarrow 0$. 又 $(U(X^*), \sigma(X^*, X))$ 是紧 Hausdorff 空间, 故 $(U(X^*), \rho)$ 是紧度量空间, 从而完备、可分.

反之, 设 $(U(X^*), \sigma(X^*, X))$ 可度量化, 则存在 $U(X^*)$ 的 0 点可数基 $\{U_n\}$, 使 $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\{0\}$.

不妨设 $U_n=\{x^*; x^*\in U(X^*); |x^*(x)|<\varepsilon_n, x\in A_n\}$, 其中 A_n 是 X 的有限子集, $\varepsilon_n>0$. 令 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. 若对某个 $x^*\in X^*\backslash\{0\}$, $x^*(A)=0$, 则 $\frac{x^*}{\|x^*\|}\in\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\{0\}$, 故 $x^*=0$, 矛盾. 从而有 $X=\overline{\operatorname{span}}(A)$, 即 X 是可分的. □

定理 1.1.5 的证明：若 X^* 可分，应用定理 1.1.4 知，$(U(X^{**}), \sigma(X^{**}, X^*))$ 可度量化，并且它是紧度量空间，故 $(U(X), \sigma(X, X^*))$ 可度量化，且它是 $(U(X^{**}), \sigma(X^{**}, X^*))$ 的稠集.

反之，设 $(U(X), \sigma(X, X^*))$ 可度量化，则存在 $U(X)$ 的可数 0 点邻域基 $\{U_n\}$，使 $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n=\{0\}$. 不妨设

$$U_n=\{x; x\in U(X),\ |x^*(x)|<\varepsilon_n,\ x^*\in B_n\},$$

其中 B_n 是 X^* 的有限子集，$\varepsilon_n>0$. 令 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

设 $x^*\in X^*\setminus\overline{\operatorname{span}}\,B$，则 $d=\operatorname{dist}(x^*, \overline{\operatorname{span}}\,B)=\inf\{\|x^*-y^*\|; y^*\in\overline{\operatorname{span}}\,B\}>0$. 由 Hahn-Banach 定理，存在 $\Phi\in X^{**}$，使 $\Phi(B)=0$, $\Phi(x^*)=1$, $\|\Phi\|=\frac{1}{d}$.

对 $U(X)$ 的 0 点 $\sigma(X, X^*)$ 邻域 $V=\left\{x; x\in U(X), |x^*(x)|<\frac{d}{2}\right\}$，有 n，使 $V\supset U_n$，又 $\|d\cdot\Phi\|=1$. 由Goldstine定理，存在 $x\in U(X)$，使 $|(d\Phi-\hat{x})(x^*)|<\frac{d}{2}$，$|(d\Phi-\hat{x})(y^*)|<\varepsilon_n$，$\forall y^*\in B_n$. $d=|d\cdot\Phi(x^*)|\leqslant|(d\cdot\Phi-\hat{x})(x^*)|+|x^*(x)|$，故

$$|x^*(x)|\geqslant d-|(d,\Phi-\hat{x})(x^*)|>d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2},$$

所以 $x\notin V$. 但 $|y^*(x)|=|(d\cdot\Phi-\hat{x})(y^*)|<\varepsilon_n$, $\forall y^*\in B_n$. 又得到 $x\in U_n$. 从而 $x\in U_n\setminus V$，矛盾！故 $X^*=\overline{\operatorname{span}}\,B$. 因此，$X^*$ 可分. □

(三)完备性.

无限维 Banach 空间 X	w 完备 ×(注 1)	w 亚完备 ⇒ w 序列完备 ⇕ 自反(第四章)(注 2)
无限维 Banach 空间 X^*	w* 完备 × (注 3)	w* 亚完备 ⇒ w* 序列完备 ✓(注 4)　✓(注 4)

注 1: 任何无限维赋范线性空间都不是 w 完备的. 证明见 Taylor, A. E., The weak topologies in Banach spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 25, 438–440(1939).

注 2: (1) 容易证明 l_1 是 w 序列完备的.

(2) 第四章中将证明自反 $\Leftrightarrow$ w 亚完备. 显然 w 亚完备 $\Rightarrow$ w 序列完备.

同时, 在第四章中也将证明, 对于 w 序列完备的 Banach 空间 X, 若 X^* 是可分的, 那么 X 是自反的.

注 3: 由于 $\dim X=+\infty$, 故存在 $f\in X'\backslash X^*$(事实上, 选 $\{x_\alpha;\alpha\in I\}$ 为 X 的 Hamel 基, $\operatorname{card} I\geqslant c$, 选 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset\{x_\alpha;\alpha\in I\}$. 对每个 n, 选 $\varepsilon_n\neq 0$, 使 $\|\varepsilon_n x_n\|<\dfrac{1}{n}$, 在 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 上定义 f:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_n} & \text{当 } x=x_n\\ 0 & \text{当 } x\in\{x_\alpha;\alpha\in I\}\backslash\{x_n;n=1,\ 2,\ \cdots\}\end{cases}$$

将 f 线性延拓为 X' 的元. 由于 $\varepsilon_n x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}0$, 但 $f(\varepsilon_n x_n)=1$, 故 $f\in X'\backslash X^*$).

$\mathscr{M}$ 是 X 的有限维子空间 M 的族, 以包含关系构成定向集. 对每个 $M\in\mathscr{M}$, 存在一个连续投影 P_M: $X\longrightarrow M$.

令 $\Phi_M=f\circ P_M$, 则 $\Phi_M\in X^*$. $\{\Phi_M;M\in\mathscr{M}\}$ 是 X^* 中一个 w* Cauchy 定向列, 但它在 X^* 中没有 w* 极限点. (事实上, 任取 0 点 w* 邻域 $V(a_1,\ \cdots,\ a_n;\ \varepsilon)$. 令 $M_0=\operatorname{span}\{a_1,\ \cdots,\ a_n\}$, 则当 M_1, $M_2\supset M_0$ 时, 有 $(\Phi_{M_1}-\Phi_{M_2})(a_i)=0$, $i=1,\ \cdots,\ n$. 故 $\{\Phi_M;\ M\in\mathscr{M}\}$ 是 w* Cauchy 定向列. 若 $\Phi_M\xrightarrow{w^*}g\in X^*$, 则对任何 $x\in X$, 考虑子定向列 $\{\Phi_{M'};\ M'\in\mathscr{M},\ M'$ 含 $x\}$, 故 $\Phi_{M'}(x)=f(x)\longrightarrow g(x)$, 故 $f=g\in X^*$, 矛盾, 从而 $\{\Phi_M;\ M\in\mathscr{M}\}$ 没有 w* 极限点.)

注 4: 由 Banach–Alaoglu 定理即知.

注 5：由于 Cauchy 序列必有界，应用共鸣定理，即知 w 亚完备 $\Rightarrow$ w 序列完备．w^* 亚完备 $\Rightarrow$ w^* 序列完备．

§2 共轭空间 X^* 中的有界 w^* 拓扑

在研究 Banach 空间时，在 X^* 中引入一种比 w^* 拓扑更强的有界 w^* 拓扑（bw^* 拓扑）是方便的．例如，引入 bw^* 拓扑之后，判断 X^{**} 中的元 $\Phi\in J_x(X)$（必须而且）只须判断 Φ 在这个较强的拓扑之下是连续的就可以了．换句话说，只须证 $\Phi^\perp\cap U(X^*)$ 是 w^* 闭的即可（Banach–Dieudonne 定理）．这就在应用上带来很大的方便．

相应地，也可以研究 Banach 空间 X 的有界 w 拓扑（bw 拓扑）．但我们这里不再讨论，读者可参阅参考书目 [2] p. 48.

下面，我们首先给出它的定义，然后找出它的局部基．从而得出这个拓扑的一些性质，并证明上述重要定理．

（一）有界 w^* 拓扑（bw^* 拓扑）的定义．

定义 1.2.1 设 X 是赋范空间，$A\subset X^*$，A 称为 bw^* 闭的，如果 $A\cap B$ 是 B 中 w^* 闭集，对 X^* 中每个范数有界集 B.

注 1：容易验证，这是 X^* 中一个拓扑．

注 2：容易看到，bw^* 拓扑是 X^* 上一种诱导拓扑，它由 X^* 中范有界集 B 上的内映射 I_B: $B\longrightarrow X^*$ 组成的映射族定义的．也就是说 bw^* 拓扑是 X^* 上，在每个范有界集上与 w^* 拓扑合同的拓扑，即使得一切 I_B: $B\longrightarrow X^*$ 是连续的最强拓扑，其中 B 为 X^* 中范有界集．

bw^* 拓扑的简单性质：

(1) X^* 中一个集 V 是 bw^* 开集 $\Leftrightarrow V\cap U(X^*, r)$ 是 $U(X^*, r)\equiv\{x^*; \|x^*\|\leqslant r\}$ 的 w^* 相对开集．

(2) X^* 中一个集 A 是 bw^* 闭 $\Leftrightarrow A$ 含有 A 中范有界 w^* 收敛 net 的 w^* 极限．

(1)的证明：V 是 bw* 开集 $\Leftrightarrow X^*\backslash V$ 是 bw* 闭集 $\Rightarrow (X^*\backslash V)\cap U(X^*, r)$ 是 w* 闭的 $\Leftrightarrow X^*\backslash[(X^*\backslash V)\cap U(X^*, r)]$ 是 w* 开的

$$\Rightarrow U(X^*, r)\cap[X^*\backslash[(X^*\backslash V)\cap U(X^*, r)]]$$
$$=V\cap U(X^*, r)$$

是 w* 相对开集.

反之, $V\cap U(X^*, r)$ 是 w* 相对开集 $\Rightarrow V\cap U(X^*, r)=H\cap U(X^*, r)$, 对某个 w* 开集 H,

$$\Rightarrow (X^*\backslash V)\cap U(X^*, r)$$
$$=(X^*\backslash(V\cap U(X^*, r)))\cap U(X^*, r)$$
$$=[X^*\backslash(H\cap U(X^*, r))]\cap U(X^*, r)$$
$$=(X^*\backslash H)\cap U(X^*, r)$$

是 w* 闭的.

任取范有界集 B, 则

$$(X^*\backslash V)\cap B\cap U(X^*, r)=(X^*\backslash V)\cap B,$$

对某个 $r>0$.

故 $(X^*\backslash V)\cap B$ 是 B 中 w* 闭集, 由定义, $X^*\backslash V$ 是 bw* 闭的. 从而 V 是 bw* 开的. □

注：从证明中看到：

A 是 bw* 闭的 $\Leftrightarrow A\cap U(X^*, r)$ 是 w* 闭的, $\forall r>0$.

(2)的证明："$\Rightarrow$" 若 $\{x_\delta^*\}\subset A$, $\{x_\delta\}$ 范有界且 $x_\delta^*\xrightarrow{w^*}x^*$.

所以, $\{x_\delta^*\}\subset U(X^*, r)\cap A$, 对某个 $r>0$. 由定义知, $U(X^*, r)\cap A$ 是 w* 闭的, 故 $x^*\in U(X^*, r)\cap A\subset A$. □

"$\Leftarrow$" 任取 $U(X^*, r)$, $\{x_\delta^*\}\subset A\cap U(X^*, r)$, 且 $x_\delta^*\xrightarrow{w^*}x^*$.

由条件知, $x^*\in A$, 又因为 $U(X^*, r)$ 是 w* 紧的, 从而它也是 w* 闭的, $\{x_\delta^*\}\subset A\cap U(X^*, r)\subset U(X^*, r)$, 故 $x^*\in U(X^*, r)$. 因此 $x^*\in A\cap U(X^*, r)$, 即对任何 $r>0$,

$A\cap U(X^*, r)$是 w^* 闭的，由(1)的证明后的注知，A 是 bw^* 闭的. □

(二) bw^* 拓扑的局部基.

我们知道，X^* 中 w^* 拓扑的局部基是由 X 中有限集 A 的 Polar A° 组成的. 下面将证明 bw^* 拓扑的局部基是由 X 中紧集 K 的 Polar K° 组成的. 由此知道:

(1) 这个拓扑的构造(它是局部凸拓扑).

(2) 这个拓扑严格强于 w^* 拓扑.

定理1.2.1 若 X 是赋范空间，则 $\{K^\circ;K\subset X, K$ 是紧集$\}$ 是 X^* 上 bw^* 拓扑的一个局部基.

证明: 令 K 是 X 的一个紧子集.

首先证明 $K^\circ=\{x^*;\ |x^*(x)|\leqslant 1,\ x\in K\}$ 是 0 点的 bw^* 邻域.

令 $V=\{x^*;\ |x^*(x)|<1,\ x\in K\}$，则 $V\subset K^\circ$. 只须证明对一切 $r>0$，$V\cap U(X^*, r)$是$U(X^*, r)$中 w^* 开集即可，容易看到，只须证明，对每个 $r>0$，$\exists 0$ 点 w^* 邻域 V_1，使

$$V_1\cap U(X^*, r)\subset V\cap U(X^*, r).$$

事实上，由 K 是紧的，取 K 的 $\frac{1}{2r}$ 网 $\{x_1, \cdots, x_n\}$.

令 $V_1=\left\{x^*;\ |x^*(x_i)|<\frac{1}{2},\ i=1, \cdots, n\right\}$，则 V 即为所求. 这是因为，若 $x^*\in V_1\cap U(X^*, r)$. 对任何 $x\in K$，选 x_i，使

$$\|x_i-x\|<\frac{1}{2r},$$

则

$$|x^*(x)|\leqslant|x^*(x_i)|+|x^*(x-x_i)|<\frac{1}{2}+r\cdot\frac{1}{2r}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

故 $x^*\in V\cap U(X^*, r)$，从而 $V_1\cap U(X^*, r)\subset V\cap U(X^*, r)$.

反之，设 V 是 X^* 中 0 点 bw^* 开邻域，我们将找到 X 中

紧集 K(实际上,可取 K 为收敛于 0 的序列),使 $K^\circ\subset V$.

由简单性质 1, $V\cap U(X^*)$是 $U(X^*)$的 w^* 相对开集,故存在 X 的有限子集 F_1, 使 $F_1^0\cap U(X^*)\subset V\cap U(X^*)\subset V$.

设对某个正整数 n, 存在 X 的有限子集 F_n, 使 $F_n^0\cap U(X^*, n)\subset V$, 我们说: 必存在 X 的有限子集 H_n, 使

$$H_n\subset U\left(X, \frac{1}{n}\right),$$

且

$$(F_n\cup H_n)^\circ\cap U(X^*, n+1)\subset V. \tag{*}$$

用反证法,若上述 H_n不存在,则集族

$$\mathscr{H}=\{(F_n\cup H)^\circ\cap U(X^*, n+1)\cap(X^*\backslash V);$$
$$H\text{ 为 }U\left(X, \frac{1}{n}\right)\text{中有限子集}\}$$

具有有限交性, 由于 $X^*\backslash V$ 是 bw^* 闭, 故$\mathscr{H}$组成 w^* 紧集 $U(X^*, n+1)$中具有有限交性的 w^* 闭子集族, 从而存在 x^*, 使

$$x^*\in\bigcap_H(F_n\cup H)^\circ\cap U(X^*, n+1)\cap(X^*\backslash V).$$

所以, 对$U\left(X, \frac{1}{n}\right)$中任何有限集 H, $x^*\in H^\circ$. 故当 $\|x\|\leqslant\frac{1}{n}$时, 有 $|x^*(x)|\leqslant 1$, 这表明, $\|x^*\|\leqslant n$. 从而

$$x^*\in F_n^\circ\cap U(X^*, n)\subset V,$$

这与 $x^*\in X^*\backslash V$ 矛盾. 故上述结论(*)成立.

令 $F_{n+1}=F_n\cup H_n$, 则

$$F_{n+1}^\circ\cap U(X^*, n+1)\subset V. \tag{1.1}$$

由归纳程序,(1.1)式对一切 n 成立.

令 $F=\bigcup\limits_{n=1}^\infty F_n$, 则 F 是可数的. 将 F 的元按 F_1, H_1, H_2, $\cdots$ 排列起来, 则 F 可记为 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. 由于 $H_n\subset U\left(X, \frac{1}{n}\right)$, 故 $x_n\xrightarrow{\|\ \|}0$, 从而 $K=\{0, x_n\}$ 是紧集, 且 $K^\circ\subset V$. □

推论 1.2.2 若 X 是赋范空间, 则 $\{\{x_n\}^\circ;\ \lim\limits_n x_n=0\}$ 是

bw^* 拓扑的一个局部基. (由定理证明中可看出.)

推论 1.2.3 X^* 中定向列是 bw^* 收敛的 $\Leftrightarrow$ 它在 X 的每个紧集上一致收敛.

证明: 由于紧集 K 的 Polar K° 是 bw^* 的一个局部基. □

推论 1.2.4 范有界的 w^* 收敛定向列是 bw^* 收敛的.

证明: 设 $\{x_\delta^*\}\subset U(X^*, r)$, 且 $x_\delta^* \xrightarrow{w^*} x^*$. 那么 $x^*\in U(X^*, r)$, 且 $x_\delta^*-x^* \xrightarrow{w^*} 0$, 及 $x_\delta^*-x^*\in U(X^*, 2r)$.

任取 0 点 bw^* 邻域 B, 则 $B\cap U(X^*, 2r)$ 是 w^* 相对开集, 从而存在含 0 点的 w^* 开集 A, 使

$$B\cap U(X^*, 2r)=A\cap U(X^*, 2r),$$

故存在 δ_0, 使得当 $\delta>\delta_0$ 时, 有

$$x_\delta^*-x^*\in A,$$

所以 $x_\delta^*-x^*\in B\cap U(X^*, 2r)\subset B$, 亦就是说 $x_\delta^* \xrightarrow{bw^*} x^*$. □

注 1: bw^* 拓扑是 Hausdorff 局部凸线性拓扑.

证明: 因为 $\sigma(X^*, X)<bw^*$, 而 $\sigma(X^*, X)$ 是 Hausdorff 的, 故 bw^* 也是 Hausdorff 的.

下面分三步证明 bw^* 拓扑是线性拓扑.

(1) 先证 bw^* 开集平移后是 bw^* 开集.

设 $f\in X^*$, B 是 bw^* 开集. 须证 $f+B$ 是 bw^* 开集, 即 $(f+B)\cap U(X^*, r)$ 是 $U(X^*, r)$ 的 w^* 相对开集, 对任 $r>0$.

设 $f+g\in(f+B)\cap U(X^*, r)$, 其中 $g\in B$. 因为, $B\cap U(X^*, r+\|f\|)$ 是 $U(X^*, r+\|f\|)$ 中的 w^* 相对开集, 又 $g\in B\cap U(X^*, r+\|f\|)$, 故存在 0 的 w^* 邻域 $V(x_1, \cdots, x_n; 1)$ 使

$$(g+V(x_1, \cdots, x_n; 1))\cap U(X^*, r+\|f\|)$$
$$\subset B\cap U(X^*, r+\|f\|)\subset B.$$

我们有

$$(f+g+V(x_1, \cdots, x_n; 1))\cap U(X^*, r)\subset f+B. \quad (1.2)$$

事实上，若 $h\in(f+g+V(x_1,\cdots,x_n;1))$，且 $\|h\|\leqslant r$，则

$$h-f\in(g+V(x_1,\cdots,x_n;1))$$

且 $$\|h-f\|\leqslant\|h\|+\|f\|\leqslant r+\|f\|.$$

故 $h-f\in(g+V(x_1,\cdots,x_n;1))\cap U(X^*,r+\|f\|)\subset B$.

从而，$h\in f+B$，即(1.2)成立. □

由此，结合定理1.2.1知，$\{f+\{x_n\}^\circ;\ \lim\limits_n x_n=0\}$ 是 $f(\in X^*)$ 的 bw* 邻域基.

(2) bw* 拓扑对加法是连续的.

设 $x^*+y^*+A^\circ$ 是 x^*+y^* 的任一 bw* 邻域. 则 $x^*+(2A)^\circ$, $y^*+(2A)^\circ$ 分别是 x^*, y^* 的 bw* 邻域，且

$$(x^*+(2A)^\circ)+(y^*+(2A)^\circ)\subset x^*+y^*+A^\circ. \ \square$$

(3) bw* 拓扑对数乘运算是连续的.

设 $\lambda x^*+\{x_n\}^\circ$ 是 λx^* 的任何 bw* 邻域.

取 $\varepsilon>0$，使 $\varepsilon\cdot\max\limits_n\{\|x_n\|\}\cdot\|x^*\|<\frac{1}{2}$. 取 0 点 bw* 邻域 $\{2(|\lambda|+\varepsilon)x_n\}^\circ$，及 λ 的 ε 邻域 $V_\varepsilon=\{\mu;\ |\lambda-\mu|<\varepsilon\}$. 则当 $\mu\in V_\varepsilon$, $y^*\in\{2(|\lambda|+\varepsilon)x_n\}^\circ$ 时，

$$\begin{aligned}&|(\mu(x^*+y^*)-\lambda x^*)(x_n)|\\&\leqslant|y^*(\mu x_n)|+|\mu-\lambda|\cdot\|x^*\|\cdot\|x_n\|\\&<(|\lambda|+\varepsilon)|y^*(x_n)|+\frac{1}{2}<1.\end{aligned}$$

从而 $\mu(x^*+y^*)\in\lambda x^*+\{x_n\}^\circ$，即

$$V_\varepsilon\cdot(x^*+\{2(|\lambda|+\varepsilon)x_n\}^\circ)\subset\lambda x^*+\{x_n\}^\circ. \ \square$$

由(2)、(3)，bw* 拓扑是线性拓扑，此外，由于 A° 是均衡凸集，故 bw* 拓扑是局部凸的. □

注 2：(X^*,bw^*) 是完备的.

证明：设 $\{x_\alpha^*\}$ 是 X^* 中 bw* Cauchy 定向列. 由于 $\mathrm{w}^*<\mathrm{bw}^*$，故 x_α^* 是 X^* 中 w* Cauchy 定向列，令

$$x^*(x)=\lim_\alpha x_\alpha^*(x),\ \forall x\in X.$$

则 $x^*\in X'$，我们可以证明 $x^*\in X^*$.

事实上，否则存在 $\{x_n\}\subset X$，$\|x_n\|\leqslant\frac{1}{n}$，$x^*(x_n)>n$.

由于 $\{x_n\}^\circ$ 是 X^* 中 0 点 bw* 邻域，故存在 α_0，使得当 $\alpha>\alpha_0$ 时，$x^*_{\alpha_0}-x^*_\alpha\in\{x_n\}^\circ$. 但这与 $x^*(x_n)>n$ 矛盾！故 $x^*\in X^*$.

容易看到，$x^*_\alpha\xrightarrow{bw^*}x^*$. □

(三)Banach-Dieudonné 定理.

定理 1.2.5(Banach-Dieudonné)　赋范空间 X 是 Banach 空间 $\Leftrightarrow$ X^* 上每个 bw* 连续泛函是 w* 连续的.

推论 1.2.6　若 X 是 Banach 空间，则

$$\Phi\in J_X(X)\Leftrightarrow\Phi^\perp\cap U(X^*)\text{是 w}^*\text{闭的}.$$

推论 1.2.6 的证明：$\Phi^\perp\cap U(X^*)$ 是 w* 闭的 $\Leftrightarrow\Phi^\perp\cap U(X^*,r)$ 是 w* 闭的，对一切 $r>0\Leftrightarrow\Phi^\perp$ 是 bw* 闭的 $\Leftrightarrow\Phi$ 是 bw* 连续的 $\xLongrightarrow{\text{定理 1.2.5}}\Phi$ 是 w* 连续的 $\Leftrightarrow\Phi\in J_X(X)$. □

为了证明定理 1.2.5，只须证明下面引理即可.

引理 1.2.7　若 X 是赋范空间，则

$$\overline{J_X(X)}\equiv\widetilde{X}=\{\Phi\in X^{**};\ \Phi\text{ 是 bw}^*\text{ 连续}\}.$$

若 X 是 Banach 空间，则 $\widetilde{X}\equiv\overline{J_X(X)}=J_X(X)$，由这个引理即知，定理 1.2.5 的必要性成立.

反之，若 X^* 上每个 bw* 连续泛函是 w* 连续的，由这个引理即知，$\overline{J_X(X)}\equiv\widetilde{X}=J_X(X)$，故 X 是完备的. 从而定理 1.2.5 的充分性成立.

证明：(1) 设 $\Phi\in X^{**}\setminus\widetilde{X}$，要证 Φ 不是 bw* 连续.

容易看到，只须证明 $H=\{x^*;\ \Phi(x^*)=1\}$ 不是 bw* 闭的. 实际上，只须证明存在 H 中范有界的定向列 $\{x^*_\delta\}$，使

$$x^*_\delta\xrightarrow{w^*}0(\notin H).$$

令 $d=\operatorname{dist}(\Phi,\ \widetilde{X})>0$，选 λ，使 $d\lambda>1$.

问题转化为要证

$$0\in\overline{U(X^*,\lambda)\cap H}^{w^*}. \tag{1.3}$$

令 $V=\{x_1,\cdots,x_n\}^\circ$ 是 X^* 中 0 点任意 w* 邻域，

$$A=U\left(X^*,\ \frac{1}{d}\right).$$

对集 A, Helly 定理的如下条件成立：

$$|\alpha|\leqslant\sup\left\{\left|\alpha\Phi(\varphi)+\sum_{i=1}^n\alpha_i\varphi(x_i)\right|;\ \|\varphi\|<\frac{1}{d}\right\}$$

$$\text{对一切 } \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n. \tag{1.4}$$

事实上，当 $\alpha=0$ 时，(1.4) 显然成立. 对 $\alpha\neq0$, 有

$$\sup\left\{\left|\alpha\Phi(\varphi)+\sum_{i=1}^n\alpha_i\varphi(x_i)\right|;\ \|\varphi\|\leqslant\frac{1}{d}\right\}$$

$$=|\alpha|\sup\left\{\left|\left\langle\varphi,\ \Phi-\left(-\sum_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{\alpha}\hat{x}_i\right)\right\rangle\right|;\quad\|\varphi\|\leqslant\frac{1}{d}\right\}$$

$$=|\alpha|\cdot\frac{1}{d}\cdot\left\|\Phi-\left(-\sum_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{\alpha}\hat{x}_i\right)\right\|\geqslant|\alpha|.$$

故(1.4)成立.

由 Helly 定理知，对每个 $\delta>0$, 存在 $\varphi_\delta\in(1+\delta)A$, 使 $\Phi(\varphi_\delta)=1$, $\hat{x}_i(\varphi_\delta)=0$, $i=1,\ \cdots,\ n$.

从而，当 δ 充分小时，有

$$\|\varphi_\delta\|\leqslant\frac{1+\delta}{d}<\lambda,$$

故
$$\varphi_\delta\in U(X^*,\lambda)\cap H\cap V.$$

所以(1.3)成立.

(2) 须证 $\Phi\in\widetilde{X}\equiv\overline{J_X(X)}\Rightarrow\Phi$ 是 bw* 连续的.

只须证存在 0 点 bw* 邻域 V, 使 $|\Phi(V)|\leqslant M$, 对某个 $M>0$.

事实上，因为 $\Phi\in\overline{J_X(X)}$, 故存在 $\{x_n\}\subset X$, 使 $\hat{x}_n\xrightarrow{\|\cdot\|}\Phi$.

令 $A=\{x_n\}$, 则容易看到 A° 是 0 点 bw* 邻域.

当 $\varphi\in A^\circ$ 时，不妨设 $\varphi\neq0$, 选 x_n, 使

$$\|\Phi-\hat{x}_n\|<\frac{1}{\|\varphi\|},$$

则

$$|\Phi(\varphi)|\leqslant|\varphi(x_n)|+|\langle\varphi,\ \Phi-\hat{x}_n\rangle|\leqslant 1+\|\varphi\|\cdot\|\Phi-\hat{x}_n\|\leqslant 2.$$

故 $|\Phi(A^\circ)|\leqslant 2$. □

Banach-Dieudonne 定理可推广到凸集的情况.

定理 1.2.8(Krein-Šmulian) 若 X 是 Banach 空间, A 是 X^* 的凸子集,则 A 是 w^* 闭的 $\Leftrightarrow$ A 是 bw^* 闭的.

证明: 因为 $\mathrm{w}^*<\mathrm{bw}^*$, 故 $\overline{A}^{\mathrm{w}^*}\supset\overline{A}^{\mathrm{bw}^*}$.

反之, 若 $\varphi\in\overline{A}^{\mathrm{w}^*}\backslash\overline{A}^{\mathrm{bw}^*}$, 则存在 bw^* 连续线性泛函 Φ, 分离$\overline{A}^{\mathrm{bw}^*}$ 与 φ, 由定理 1.2.5 知,Φ 是 w^* 连续的,这与 $\varphi\in\overline{A}^{\mathrm{w}^*}$ 矛盾. 故 $\overline{A}^{\mathrm{w}^*}=\overline{A}^{\mathrm{bw}^*}$. □

§3 Banach 空间中 w 紧集的构造

(一)各种紧性的定义.

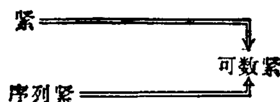
定义 1.3.1 设 Ω 是一个拓扑空间, $A\subset\Omega$.

A称为(相对)紧的,如果A中每个定向列有一个子定向列收敛于 $A(\Omega)$ 中一个点.(等价地,A的每个开复盖有有限子复盖.)

A 称为(相对)可数紧的, 如果 A 中每个序列有一个子定向列收敛于$A(\Omega)$中一个点. (即 A 中每个序列在 A 中 (在 Ω 中) 有一个聚点.)

A 称为(相对)序列紧的, 如果 A 中每个序列有一个子序列收敛于 $A(\Omega)$中一个点.

这三者一般关系如下:



当 Ω 是可度量化时, 三者是等价的. 故对 Banach 空间的范数拓扑, 三者是等价的.

但是,对无限维赋范空间 X,$\sigma(X,X^*)$和$\sigma(X^*,\ X)$, 一般

地是不可以度量化的. 然而, 关于$\sigma(X, X^*)$, 下面的 Eberlein Šmulian 定理指出, 这三者是等价的.

关于X^*中$\sigma(X^*, X)$拓扑, 下例表明三种紧性是不同的.

例: $X^*=l_\infty$, 则$(U(l_\infty), \text{w}^*)$是紧的. 但它不是序列紧的.

事实上, 取$f_n\in l_\infty^*: f_n((a_i))=a_n$, 对$(a_i)\in l_\infty$. 则$\|f_n\|=1$. 但是$\{f_n\}$的任何子序列$\{f_{n_i}\}$都不是$\text{w}^*$收敛的, 这是因为, 取$x=(a_n)$如下:

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^i+1}{2} & \text{如果 } n=n_i,\ i=1, 2, \cdots \\ 0 & \text{如果 } n\neq n_i,\ \forall i.\end{cases}$$

则
$$f_{n_i}(x)=\frac{1+(-1)^i}{2},$$

显然$\{f_{n_i}(x)\}$不收敛. □

J. Hagler 和 F. Sullivan 研究了满足下列条件的 Banach 空间.

定义 1.3.2 Banach 空间 X 称为具(ω)性质, 如果X^*的单位球$U(X^*)$是w^*序列紧的.

显然, X是可分的$\Rightarrow X$具(ω)性质.

详细讨论见 J. Hagler & F. Sullivan, Smootheness and w* sequential compactness. *Proc. A. M. S.* 78 (1980) *no*. 4. p 497~p. 503.

(二) $(X, \|\cdot\|)$中紧集.

上面已指出, 在$(X, \|\cdot\|)$中三种紧性是等价的. 这里我们给出一个有用的定理.

定理 1.3.1(Mazur) 若X是 Banach 空间, A是X中范紧集, 则A的闭凸包$\overline{\text{co}}(A)$是范紧集.

注: 若X是赋范空间, 则相应结论改为$\overline{\text{co}}(A)$是全有界的.

证明: 因为X是 Banach 空间, 故$\overline{\text{co}}(A)$是完备的. 下

面证明 $\overline{\text{co}}(A)$是全有界的. 从而 $\overline{\text{co}}(A)$是紧的.

任给 $\varepsilon>0$. 由于 A 是全有界的，故存在 A 的 $\frac{\varepsilon}{4}$ 网 $\{x_1, \cdots, x_n\}$. 令 $M=\text{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$. 这样，$\text{co}(x_1, \cdots, x_n)$是有限维空间 M 中的有界集，从而全有界. 因此存在 $\text{co}(x_1, \cdots, x_n)$的 $\frac{\varepsilon}{4}$ 网 $\{y_1, \cdots, y_m\}$.

我们有 $\{y_1, \cdots, y_m\}$ 是 $\overline{\text{co}}(A)$的 ε 网.

事实上，任给 $a\in\overline{\text{co}}(A)$，则存在 $y\in\text{co}(A)$，使

$$\|y-a\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

设
$$y=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i z_i,$$

其中
$$\alpha_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1,\ z_i\in A.$$

从而存在 $x_{n_i}\in\{x_1, \cdots, x_n\}$，使

$$\|x_{n_i}-z_i\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4},\ i=1, \cdots, k.$$

但 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_{n_i}\in\text{co}(x_1, \cdots, x_n)$，故存在 $y_l\in\{y_1, \cdots, y_m\}$，使

$$\|y_l-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_{n_i}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4},$$

故

$$\|a-y_l\|\leqslant\|a-y\|+\|y-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_{n_i}\|+\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_{n_i}-y_l\|$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon. \quad \square$$

(三) X^* 中 w^* 紧集.

定理 1.3.2 若 X 是 Banach 空间，A 是 X^* 的子集，则

A 是 w^* 紧的 $\Leftrightarrow$ A 是 w^* 闭范有界的.

证明：应用共鸣定理及 Banach-Alaoglu 定理即可. □

(四) X 中 w 紧集.

R. C. James 经过几十年的研究给出了判断 w 紧集的一个非常有力的准则. 我们将在(五)中专门介绍.

定理 1.3.3 若 A 是 X 的子集,则

$$A \text{ 是 w 紧的} \Leftrightarrow A \text{ 是范有界且 w 完备的.}$$

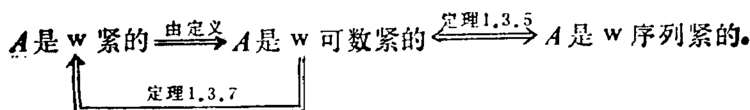
证明: 由共鸣定理, A 是范有界的 $\Leftrightarrow$ A 是 w 有界的. 并且 A 是 w 有界的 $\Leftrightarrow$ A 是 w 全有界的. □

对 w 紧集的范闭凸包也有下面定理.

定理 1.3.4(Krein-Šmulian) 若 A 是 Banach 空间 X 的 w 紧集,则 A的范闭凸包 $\overline{\mathrm{co}}(A)$ 也是 w 紧的.

证明: 本定理原来证明较为复杂, 下面将作为 James 定理(w 紧集判断定理)的应用,给出较简单的证明. □

在 Banach 空间 X 中 w 紧性、w 可数紧性、w 序列紧性是一致的. 即



定理 1.3.5 (Eberlein-Šmulian) 设 X 是赋范空间, A 是 X 的子集,则下列等价:

(1) A 是 w 序列紧的.

(2) A 是 w 可数紧的.

(3) 对任何 $\{x_n\} \subset A$, 存在 $\bar{x} \in A$, 使

$$\varliminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leqslant \varphi(\bar{x}) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \varphi(x_n), \quad \forall \varphi \in X^*. \tag{1.5}$$

(4) 如果 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中闭凸集递减序列 (即$C_n \supset C_{n+1}$), 使$A \cap C_n \neq \emptyset$,则

$$A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) \neq \emptyset.$$

(5) 如果 M 是 X 的可分闭子空间, $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是闭半空间

序列(即对某个 $\varphi_n\in X^*$, $r_n\in\mathbf{R}^1$, $H_n=\{x;\ \varphi_n(x)\geqslant r_n\}$), 使对每个 n, $A\cap M\cap H_1\cap\cdots\cap H_n\neq\emptyset$, 则

$$A\cap M\cap(\bigcap_{n=1}^{\infty}H_n)\neq\emptyset.$$

注: 对实局部凸空间, 有 (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5).

证明: (1)⇒(2) 由定义 1.3.1 知. □

(2)⇒(3) 设 $\{x_n\}\subset A$, 因 A 是 w 可数紧的, 故存在$\{x_n\}$的子定向列 $\{y_l\}$, 使 $y_l\xrightarrow{w}\bar{y}\in A$, $\bar{y}$ 即所求的.

事实上, 对任何 $\varphi\in X^*$, 令 $r=\overline{\lim\limits_{n}}\,\varphi(x_n)$. 如果对某个 $\varepsilon>0$, $\varphi(\bar{y})>r+\varepsilon$, 则有无限多个 n, 使 $\varphi(x_n)>r+\varepsilon$, 这与 r 的定义矛盾, 故

$$\varphi(\bar{y})\leqslant r=\overline{\lim_{n}}\,\varphi(x_n).$$

同理可得
$$\underline{\lim_{n}}\,\varphi(X_n)\leqslant\varphi(\bar{y}).$$

故(1.5)成立. □

(3)⇒(4) 如果 C_n 是 X 中闭凸集递减序列, 使 $A\cap C_n\neq\emptyset$, $\forall n$. 取 $x_n\in A\cap C_n$, 由(3), 存在 $\bar{y}\in A$, 使

$$\underline{\lim_{n}}\,\varphi(x_n)\leqslant\varphi(\bar{y})\leqslant\overline{\lim_{n}}\,\varphi(x_n),\quad\forall\varphi\in X^*.$$

由此,
$$\bar{y}\in A\cap(\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n).$$

事实上, 若 $\bar{y}\notin\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n$, 则存在某个 n_0, 使 $\bar{y}\notin C_{n_0}$, 由分离定理, 存在 $\varphi\in X^*$, 使

$$\varphi(\bar{y})>\sup\{\varphi(x);\ x\in C_{n_0}\}\geqslant\sup\{\varphi(x);\ x\in C_{n_0+1}\}\geqslant\cdots$$

从而
$$\varphi(\bar{y})>\overline{\lim_{n}}\,\varphi(x_n).$$

矛盾. 故 $\bar{y}\in A\cap(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n)$. □

(4)⇒(5) 取 $C_n=M\cap H_1\cap\cdots\cap H_n$ 即可. □

(5)⇒(1) 首先 A 是 w 有界的. 事实上, 否则存在 $\varphi\in X^*$, 使 $\sup\{\varphi(x);x\in A\}=+\infty$, 令 $H_n=\{x\in X;\varphi(x)\geqslant n\}$, 则

H_n满足(5)的条件，但

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n=\emptyset,$$

矛盾. 故 A 是 w 有界的.

设 $\{x_n\}\subset A$, 令 $M=\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}$, 因 M 是可分赋范空间, 故在 M^* 中存在关于 M 全的(total)序列 $\{\varphi_n\}$, 即当 $x, y\in M$, $x\neq y$ 时, 存在 φ_n, 使 $\varphi_n(x)\neq\varphi_n(y)$.

由于 A 是 w 有界的, 故对每个 m, $\{\varphi_m(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界数列. 用 Cantor 对角线法, 选 $\{x_n\}$ 的子列 $\{y_n\}$, 使

$$\lim_n \varphi_m(y_n)=c_m(\text{存在}),\ \text{对每个}\ m.$$

考虑半空间序列:

$$H_{m,k}^{+}=\left\{x\in X;\ \varphi_m(x)\leqslant\frac{1}{k}+c_m\right\},$$

$$H_{m,k}^{-}=\left\{x\in X;\ \varphi_m(x)\geqslant c_m-\frac{1}{k}\right\},$$

其中 m, k 为正整数.

由 y_n 选取知,

$$A\cap M\cap\Big(\bigcap_{m,k=1}^{n}(H_{m,k}^{+}\cap H_{m,k}^{-})\Big)\neq\emptyset.$$

由条件(5)知

$$A\cap M\cap\Big(\bigcap_{m,k=1}^{\infty}(H_{m,k}^{+}\cap H_{m,k}^{-})\Big)\neq\emptyset.$$

令
$$y\in A\cap M\cap\Big(\bigcap_{m,k=1}^{\infty}(H_{m,k}^{+}\cap H_{m,k}^{-})\Big),$$

则 $\varphi_m(y)=c_m$, 对一切 m.

下面证明 $y_n\xrightarrow{\mathrm{w}}y$. 事实上, 只须证明

$$\overline{\lim_n}\,\varphi(y_n-y)\leqslant 0,\ \text{对每个}\ \varphi\in X^*.$$

否则, 存在 $\varphi\in X^*$, 某个 $\varepsilon>0$ 和 $\{y_n\}$ 的子序列 $\{z_n\}$, 使

$$\varphi(z_n)\geqslant\varphi(y)+\varepsilon,\ \text{对一切}\ n.$$

设 $H=\{x\in X;\varphi(x)\geqslant\varphi(y)+\varepsilon\}$, 则对每个 n,

$$A\cap M\cap H\cap\left(\bigcap_{m,k=1}^{n}H_{m,k}^{+}\cap H_{m,k}^{-}\right)$$

含有 $\{z_n\}$ 的项，由(5)，存在 z，使

$$z\in A\cap M\cap H\cap\left(\bigcap_{m,k=1}^{\infty}H_{m,k}^{+}\cap H_{m,k}^{-}\right).$$

故 $\varphi_m(z)=c_m$, $\forall m$. 从而 $\varphi_m(z)=\varphi_m(y)$, $\forall m$. 由于 $\{\varphi_m\}$ 是在 M 上全的，故 $y=z\in H$，由 H 的定义知 $\varphi(y)\geqslant\varphi(y)+\varepsilon$. 矛盾!. 这表明 $y_n\xrightarrow{w}y$. □

为了证明 w 可数紧集 ⇒ w 紧集，我们先证明下述称为 Whitley 构造的引理.

引理 1.3.6(Whitley 构造) 设 A 是赋范空间 X 的相对 w 可数紧集，则对 $\Phi\in\overline{J_X(A)}^{w^*}$，存在 $x_n\in A$，使 $x_n\xrightarrow{w}x\in X$，且 $\hat{x}\equiv J_X(x)=\Phi$，即

$$\overline{J_X(A)}^{w^*}\subset J_X(\overline{A}^{sw})\subset J_X(X).$$

其中，J_X: $X\to X^{**}$ 是典型嵌入映象. $\overline{A}^{sw}$ 表示 A 的 w 序列闭包，即当 $x\in\overline{A}^{sw}$ 时，必存在 $\{x_n\}\subset A$，使 $x_n\xrightarrow{w}x$.

证明：(1) 先证一个命题：设 M 是 X^* 的一个有限维子空间，则存在 $x_1,\cdots,x_n\in S(X)$，使

$$\max\{|\varphi(x_k)|;\ 1\leqslant k\leqslant n\}\geqslant\frac{1}{2}\|\varphi\|,\ \forall\varphi\in M.$$

命题的证明：由于 M 是有限维的，故 $S(M)$ 是紧的，从而存在 $S(M)$ 的 $\frac{1}{4}$ 网 $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$. 选 $x_1,\cdots,x_n\in S(X)$，使

$$\varphi_k(x_k)>\frac{3}{4}.$$

则对任何 $\varphi\in M(\varphi\neq0)$，选 φ_{k_0}，使

$$\left\|\frac{\varphi}{\|\varphi\|}-\varphi_{k_0}\right\|<\frac{1}{4},$$

从而

$$\max\{|\varphi(x_k)|;1\leqslant k\leqslant n\}\geqslant|\varphi(x_{k_0})|$$
$$\geqslant\|\varphi\|\left(|\varphi_{k_0}(x_{k_0})|-\left|\frac{\varphi}{\|\varphi\|}(x_{k_0})-\varphi_{k_0}(x_{k_0})\right|\right)$$
$$\geqslant\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)\|\varphi\|=\frac{1}{2}\|\varphi\|.\ \square$$

(2) 下面分四步进行证明:

① 选 $\{x_n\}\subset A$, $\{\varphi_n\}\subset S(X^*)$, 和自然数增加序列 $m(n)$, 使

$$\max\{|\langle\varphi_k,\hat{x}_n-\Phi\rangle|,1\leqslant k\leqslant m(n)\}<\frac{1}{n}.\qquad(1.6)$$

事实上,因 $\Phi\in\overline{J_X(A)}^{w^*}$, 任选 $\varphi_1\in S(X^*)$, 则存在 $x_1\in A$, 使

$$|\langle\varphi_1,\hat{x}_1-\Phi\rangle|\leqslant1.$$

令 $M_1=\operatorname{span}\{\Phi,\hat{x}_1\}$, 由 (1) 中命题知,存在 $\varphi_2,\cdots,\varphi_{m(2)}\in S(X^*)$, 使

$$\max\{|\Psi(\varphi_k)|;2\leqslant k\leqslant m(2)\}\geqslant\frac{1}{2}\|\Psi\|,\ \forall\Psi\in M_1.$$

再根据 $\Phi\in\overline{J_X(A)}^{w^*}$, 存在 $x_2\in A$ 使

$$\max\{|\langle\varphi_k,\hat{x}_2-\Phi\rangle|;1\leqslant k\leqslant m(2)\}<\frac{1}{2}.$$

令 $M_2=\operatorname{span}\{\Phi,\hat{x}_1,\hat{x}_2\}$, 由 (1) 中命题知,存在 $\varphi_{m(2)+1},\cdots,\varphi_{m(3)}\in S(X^*)$, 使

$$\max\{|\Psi(\varphi_k)|;m(2)<k\leqslant m(3)\}\geqslant\frac{1}{2}\|\Psi\|.\quad\forall\Psi\in M_2.$$

再由 $\Phi\in\overline{J_X(A)}^{w^*}$, 存在 $x_3\in A$, 使

$$\max\{|\langle\varphi_k,\hat{x}_3-\Phi\rangle|;1\leqslant k\leqslant m(3)\}<\frac{1}{3}.$$

继续这过程, 即知 ① 的要求是可以做到的.

② 由于 $\{x_n\}\subset A$, 且 A 是相对 w 可数紧的, 故 $\{x_n\}$ 的 w

闭包点必存在. 首先证明若 x 是 $\{x_n\}$ 的 w 闭包点, 则

$$\sup\{|\langle\varphi_k,\ \hat{x}-\Phi\rangle|;\ k=1,\ 2,\ \cdots\}\geqslant\frac{1}{2}\|\hat{x}-\Phi\|. \qquad (1.7)$$

事实上, 令 $N=\overline{\text{span}}\{x_n\}$, $M_0=\overline{\text{span}}\ \{\Phi,\ \hat{x}_n\}$, 则 $x\in N$. 容易看到 $\hat{x}-\Phi\in M_0$.

当 $\Psi\in\text{span}\ \{\Phi,\ \hat{x}_n\}$ 时, 由 $\{\varphi_k\}$ 的选取知,

$$\sup\{|\Psi(\varphi_k)|;\ k=1,\ 2,\ \cdots\}\geqslant\frac{1}{2}\|\Psi\|.$$

从而, 当 $\Psi\in M_0=\overline{\text{span}}\{\Phi,\ \hat{x}_n\}$ 时, 也有

$$\sup\{|\Psi(\varphi_k)|;\ k=1,\ 2,\ \cdots\}\geqslant\frac{1}{2}\|\Psi\|.$$

(因为 $\Psi\in\overline{\text{span}}\ \{\Phi,\ \hat{x}_n\}$, 故可选 $\Psi_n\in\text{span}\{\Phi,\ \hat{x}_n\}$, 使 $\Psi_n\xrightarrow{\|\cdot\|}\Psi$. 对任 $\varepsilon>0$, 选 Ψ_n, 使 $\|\Psi_n-\Psi\|<\varepsilon$, 再选 φ_k, 使

$$|\Psi_n(\varphi_k)|>\sup\{|\Psi_n(\varphi_k)|,\ k=1,\ 2,\ \cdots\}-\varepsilon\geqslant\frac{1}{2}\|\Psi_n\|-\varepsilon,$$

则

$$\begin{aligned}\sup\{|\Psi(\varphi_k)|;\ k=1,\ 2,\ \cdots\}&\geqslant|\Psi(\varphi_k)|\geqslant|\Psi_n(\varphi_k)|-\varepsilon\\&\geqslant\frac{1}{2}\|\Psi_n\|-2\varepsilon\geqslant\frac{1}{2}\|\Psi\|-3\varepsilon,\end{aligned}$$

由 ε 任意性, 有

$$\sup\{|\Psi(\varphi_k)|,\ k=1,\ 2,\ \cdots\}\geqslant\frac{1}{2}\|\Psi\|.)$$

特别地, 因 $\hat{x}-\Phi\in M_0$, 故(1.7)成立.

③ 下面证明对 $\{x_n\}$ 的任何 w 闭包点 $\hat{x}$, 有

$$\langle\varphi_k,\ \hat{x}-\Phi\rangle=0,\quad \forall k. \qquad (1.8)$$

事实上, 固定 k, 对任何 $\varepsilon>0$. 因 $p\leqslant m(p)$, 故 $m(p)\nearrow+\infty$, 选充分大 p 使 $\dfrac{2}{p}<\varepsilon$, 且 $m(p)\geqslant k$. 考虑 x 的 w 邻域 $x+$

$V\left(\varphi_k;\ \frac{1}{p}\right)$，由于 x 是 $\{x_n\}$ 的 w 闭包点，可选 $n_1>m(p)$，使

$$|\varphi_k(x-x_{n_1})|<\frac{1}{p}.$$

由于 $n_1>m(p)\geqslant k$，故由(1.6)知

$$|\langle\varphi_k,\ \hat{x}_{n_1}-\Phi\rangle|<\frac{1}{p}.$$

$\left(\text{因为 } m(n_1)\geqslant n_1>m(p)\geqslant k, \text{故} |\langle\varphi_k,\hat{x}_{n_1}-\Phi\rangle|<\frac{1}{n_1}<\frac{1}{m(p)}<\frac{1}{p}\right)$.

从而

$$|\langle\varphi_k,\ \hat{x}-\Phi\rangle|\leqslant|\langle\varphi_k,\ \hat{x}_{n_1}-\Phi\rangle|+|\langle\varphi_k,\ \hat{x}_{n_1}-\hat{x}\rangle|$$
$$<\frac{2}{p}<\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，从而 $|\langle\varphi_k,\ \hat{x}-\Phi\rangle|=0$，$\forall k$. 即(1.8)成立.

④ 若 $\hat{x}$ 是 $\{x_n\}$ 的 w 闭包点，由(1.7)及(1.8)知，

$$\|\hat{x}-\Phi\|=0,$$

从而 $\hat{x}=\Phi$. 故 $\{x_n\}$ 有唯一的闭包点，这个闭包点就是 Φ. 因此 $x_n\xrightarrow{w}\Phi$. □

定理 1.3.7 若 A 是赋范空间 X 的子集，则

A 是相对 w 可数紧的 $\Leftrightarrow\overline{A}^w$ 是 w 紧的.

特别地，A 是 w 可数紧的 $\Rightarrow A$ 是 w 紧的.

证明：由于 A 是相对 w 可数的，由共鸣定理，A 是范有界的，从而 $\overline{J_X(A)}^{w^*}$ 是 w^* 紧的. 由引理 1.3.6,

$$\overline{J_X(A)}^{w^*}\subset J_X(X).$$

由于 $J_X: (X,\ w)\longrightarrow(J_X(X),\ w^*)$ 是线性同胚的，故 $\overline{A}^w$ 是 w 紧的.（事实上，这时有 $J_X(\overline{A}^w)=\overline{J_X(A)}^{w^*}$. 这是因为，显然，$J_X(\overline{A}^w)\subset\overline{J_X(A)}^{w^*}$，另一方面，由引理 1.3.6 知，

$$\overline{J_X(A)}^{w^*} \subset J_X(\overline{A}^{sw}) \subset J_X(\overline{A}^{w}),$$

故 $$J_X(\overline{A}^{w}) = \overline{J_X(A)}^{w^*}.)$$

当 A 是 w 可数紧时，则 A 也是相对 w 可数紧的，从而 $\overline{A}^w$ 是 w 紧．但 $A=\overline{A}^w$，故 A 是 w 紧的．（因 A 是 w 可数紧的，故 $\overline{A}^{sw} \subset A$，从而，由引理 1.3.6，

$$J_X(\overline{A}^{w}) = \overline{J_X(A)}^{w^*} \subset J_X(\overline{A}^{sw}) \subset J_X(A),$$

故 $\overline{A}^w \subset A \subset \overline{A}^w$，从而 $A = \overline{A}^w$.）□

注：X^* 中 w^* 紧集未必 w^* 序列紧，见本节(一)的例．

(五) James 定理．

(I) 由于 Banach 空间 X 是自反的当且仅当 $U(X)$ 是 w 紧的(证明也可见第四章)．所以 w 紧集的判别法与自反性有密切联系．

R. C. James 1950 年证明了，若 X 是具有基的 Banach 空间，则 $U(X)$ 是 w 紧的充要条件是对任何 $f \in X^*$，存在 $x \in S(X)$，使 $f(x) = \|f\|$.

1957 年，R. C. James 证明了上述定理在可分 Banach 空间情况下仍成立．1962 年 J. L. Klee 猜测，这个定理在一般 Banach 空间也成立．1964 年，R. C. James 证实了 Klee 这个猜想，并且在 1972 年他又给出了较初等的简化证明．

定理 1.3.8(James定理) 若 X 是亚完备的局部凸空间，A 是有界 w 闭子集，则

A 是 w 紧的当且仅当对任 $f \in X^*$，存在 $x \in A$，使

$$f(x) = \sup\{f(y);\ y \in A\}.$$

(II) James定理的证明．

(1) X 是可分 Banach 空间情况．

引理 1.3.9 若 X 是 Banach 空间，$0<\theta<1$，若 $(f_n) \subset U(X^*)$，使得当 $f \in \mathrm{co}(f_n)$ 时，$\|f\| \geq \theta$．又设 $\{\lambda_n\}$ 是正数序列，满足条件：$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$，则存在一个数 α，$\theta \leq \alpha \leq 1$，和一个序列

$\{g_n\}$，使得

① $g_n \in \mathrm{co}(f_n, f_{n+1}, \cdots)$，

② $\left\|\sum_n \lambda_n g_n\right\| = \alpha$，

③ 对每个 n，$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i\right\| < \alpha\left(1-\theta \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right)$

证明：首先选 $\{\varepsilon_n\}$，使 $\varepsilon_n > 0$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \varepsilon_n}{\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i\right)} < 1-\theta \tag{1.9}$$

$\left(例如取\ \varepsilon_n = \frac{1-\theta}{3^n}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i\right)\right)$.

下面分两步进行.

(A) 归纳地选取 $\{g_n\}$.

令 $\alpha_1 = \inf\{\|g\|;\ g \in \mathrm{co}(f_n)\}$，则 $\theta \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$.

选 $g_1 \in \mathrm{co}(f_n)$，使 $\|g_1\| \leqslant \alpha_1(1+\varepsilon_1)$.

令 $\alpha_2 = \inf\left\{\left\|\lambda_1 g_1 + \left(\sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i\right) g\right\|;\ g \in \mathrm{co}(f_2, f_3, \cdots)\right\}$，则 $\theta \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$.

选 $g_2 \in \mathrm{co}(f_2, f_3, \cdots)$，使

$$\left\|\lambda_1 g_1 + \left(\sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i\right) g_2\right\| \leqslant \alpha_2(1+\varepsilon_2).$$

继续这个过程，得到 $\{g_n\}$ 满足：

(a) $g_n \in \mathrm{co}(f_n, f_{n+1}, \cdots)$，

$$\text{(b)}\quad \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i + \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right) g_n\right\| \leqslant \alpha_n(1+\varepsilon_n), \tag{1.10}$$

其中

$$\alpha_n = \inf\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i g_i + \left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i\right) g\right\|;\ g \in \mathrm{co}(f_n, f_{n+1}, \cdots)\right\}.$$

(B) 验证 $\{g_n\}$ 满足定理的结论.

只须验证 ②、③ 成立.

(a) ② 成立: 显然, $\theta\leqslant\alpha_n\leqslant\alpha_{n+1}\leqslant 1$, 故 $\alpha_n\to\alpha$, 且 $\theta\leqslant\alpha\leqslant 1$.

由于 $\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i g_i\|\leqslant 1$, 又 X 是 Banach 空间, 故 $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i g_i$ 存在. 又由于

$$\alpha_n\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)g_n\right\|\leqslant\alpha_n(1+\varepsilon_n)$$

及 $\varepsilon_n\to 0$, 故

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i g_i\right\|&=\left\|\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)g_n\right)\right\|\\&=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)g_n\right\|\\&=\lim_{n}\alpha_n=\alpha.\end{aligned}$$

故②成立.

(b) ③ 成立: 首先证明对一切 n, 有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\right\|<&\left[\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right]\\&\times\left[\frac{\lambda_n\alpha_n(1+\varepsilon_n)}{\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)}+\frac{1}{\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i\right\|\right].\end{aligned}\quad(1.11)$$

事实上,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\right\|&=\left\|\frac{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\frac{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\lambda_n g_n\right\|\\&=\left\|\frac{\lambda_n+\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\frac{\lambda_n\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}g_n\right\|\\&\leqslant\frac{\lambda_n}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)g_n\right\|\end{aligned}$$

$$+\frac{\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i\right\|$$

$$<\frac{\lambda_n}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}(\alpha_n(1+\varepsilon_n))+\frac{\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i\right\|$$

$$=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\frac{\lambda_n\alpha_n(1+\varepsilon_n)}{\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i\right\|\right).$$

故(1.11)成立.

由(1.11),得到

$$\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i\right\|<\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)$$

$$\times\left(\frac{\lambda_{n-1}\alpha_{n-1}(1+\varepsilon_{n-1})}{\left(\sum_{i=n-1}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)}+\frac{1}{\sum_{i=n-1}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-2}\lambda_i g_i\right\|\right). \quad (1.12)$$

由(1.11)及(1.12),得到

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\right\|<\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)$$

$$\times\left(\frac{\alpha_n\lambda_n(1+\varepsilon_n)}{\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)}+\frac{\alpha_{n-1}\lambda_{n-1}(1+\varepsilon_{n-1})}{\left(\sum_{i=n-1}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sum_{i=n-1}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-2}\lambda_i g_i\right\|\right).$$

反复应用(1.11),得到

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\right\|<\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\alpha_i(1+\varepsilon_i)}{\left(\sum_{j=i}^{\infty}\lambda_j\right)\left(\sum_{j=i+1}^{\infty}\lambda_j\right)}$$

$$<\alpha\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\Big(\sum_{j=i}^{\infty}\lambda_j\Big)\Big(\sum_{j=i+1}^{\infty}\lambda_j\Big)}+1-\theta\Big)\ (\text{根据}(1.9))$$

$$=\alpha\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{\sum_{j=i+1}^{\infty}\lambda_j}-\frac{1}{\sum_{j=i}^{\infty}\lambda_j}\Big)+1-\theta\Big)$$

$$=\alpha\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big(\frac{1}{\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda_j}-\frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j}+1-\theta\Big)$$

$$=\alpha\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big(\frac{1}{\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i}-\theta\Big)=\alpha\Big(1-\theta\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big).$$

故③成立. □

定理 1.3.10 若 X 是可分的 Banach 空间，则下列等价：

① X 不是自反的.

② 若 $0<\theta<1$，则存在 $(f_n)\subset U(X^*)$，使得当 $f\in\text{co}(f_n)$ 时，有 $\|f\|\geqslant\theta$，且 $f_n\xrightarrow{w^*}0$.

③ 若 $0<\theta<1$，$\lambda_n>0(\forall n)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1$，则存在一个数 α，$\theta<\alpha<1$，和 $\{g_n\}\subset U(X^*)$，使

(A) $g_n\xrightarrow{w^*}0$,

(B) $\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n\Big\|=\alpha$,

(C) 对每个 n，$\Big\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\Big\|<\alpha\Big(1-\theta\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)$.

④ 存在 $f\in X^*$ 不达到它的范数，亦即 $\|f\|>f(x)$，$\forall x\in U(X)$.

证明：①⇒② 因为 X 是非自反 Banach 空间，从而 $\hat{X}=J_X(X)$ 是 X^{**} 的真闭子空间，由 Riesz 引理知，存在 $F\in S(X^{**})$，使 $\text{dist}(F,\hat{X})>\theta$.

选 $\alpha>0$，使

$$\frac{\theta}{\mathrm{dist}(F,\ \hat{X})}+\alpha<1.$$

因为 X 是可分的，故存在 X 中可数稠集 $\{x_n\}$。

对任何固定 $n>2$，令 $c_1=\cdots=c_{n-1}=0$，$c_n=\theta$.

对任何 a_1，$\cdots$，a_n(不妨设 $a_n\neq 0$)，我们有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right|=|a_n c_n|=|a_n|\theta=|a_n|\cdot\frac{\theta}{\mathrm{dist}(F,\ \hat{X})}\mathrm{dist}(F,\ \hat{X})$$

$$\leqslant |a_n|\frac{\theta}{\mathrm{dist}(F,\ \hat{X})}\left\|F+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{a_n}\hat{x}_i\right\|$$

$$=\frac{\theta}{\mathrm{dist}(F,\ \hat{x})}\left\|a_n F+\sum_{i=1}^{n-1}a_i\hat{x}_i\right\|.$$

于是 Helly 定理条件满足，应用 Helly 定理，存在 $f_{n-1}\in X^*$ 使

$$\|f_{n-1}\|\leqslant\frac{\theta}{\mathrm{dist}(F,\ \hat{x})}+\alpha\leqslant 1,$$

$$f_{n-1}(x_i)=0,\ 1\leqslant i\leqslant n-1,$$

$$F(f_{n-1})=\theta.$$

从而得到 $\{f_n\}\subset X^*$，使

$$\lim_n f_n(x_i)=0,\ \forall i.$$

因 $\{x_n\}$ 在 X 中范稠，故

$$f_n\xrightarrow{w^*}0.$$

又当 $f\in \mathrm{co}(f_n)$ 时，不妨设 $f=\sum_{i=1}^{k}\beta_i f_i$，其中 β_i 为"凸组合数"，则

$$F(f)=\sum_{i=1}^{k}\beta_i F(f_i)=\theta.$$

由于 $\|F\|=1$，故 $\|f\|\geqslant\theta$. □

② ⇒ ③ 由引理1.3.9知，存在 $\{g_n\}\in \mathrm{co}(f_n,\ \cdots)$，使

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i g_i\right\|=\alpha,$$

且对每个 n,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\right\|<\alpha\left(1-\theta\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right).$$

又因为 $f_n\xrightarrow{w^*}0$, 故

$$g_n\xrightarrow{w^*}0.\ \square$$

③⇒④ 在 ③ 中 $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i g_i$ 就是不达到范数的 X^* 中元.

事实上, 任取 $x\in U(X)$, 则 $g_n(x)\longrightarrow 0$.

选 n, 使得当 $m>n$ 时, 有 $g_m(x)<\alpha\theta$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i g_i(x)&<\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x)+\alpha\theta\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\\&\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\right\|+\alpha\theta\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\\&<\alpha\left(1-\theta\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)+\alpha\theta\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i=\alpha<1.\ \square\end{aligned}$$

④⇒① 若 X 是自反, 则对任何 $f\in X^*$, 由Hahn-Banach定理, 存在 $F\in X^{**}$, 使 $\|F\|=1$, 且 $\|f\|=F(f)$. 但 $X^{**}=J_X(X)$, 故存在某个 $x\in X$, 使 $F=\hat{x}$, 故 $\|x\|=1$, 且 $f(x)=\|f\|$. □

(2) 一般 Banach 空间情况.

先说明一个记号. 若 $\{\varphi_n\}$ 是 X^* 中有界序列, 记

$$L(\varphi_n)=\{W;\ W\in X^*,$$
$$\underline{\lim}\,\varphi_n(x)\leqslant W(x)\leqslant\overline{\lim}\,\varphi_n(x),\ \forall x\in X\}.$$

注 1: $L(\varphi_n)\neq\emptyset$.

事实上, 考虑映象 $T: X\longrightarrow l_\infty$, $T(x)=(\varphi_n(x))$, 则 $T\in B(X, l_\infty)$, 其中 $B(X, l_\infty)$表示 X 到 l_∞ 的有界线性算子全体, 且 $\|T\|\leqslant\sup\|\varphi_n\|$. 令 $\mathrm{Lim}\in l_\infty^*$ 是一个 Banach 极限 (参见关肇直编泛函分析讲义, 1958 年版, p. 99), 则

$$\underline{\lim}\,\varphi_n(x)\leqslant\mathrm{Lim}\ \varphi_n(x)\leqslant\overline{\lim}\,\varphi_n(x).$$

故 $\mathrm{Lim}\circ T\in L(\varphi_n)$.

注 2：若 $W\in L(\varphi_n)$，则 $\|W\|\leqslant\sup\|\varphi_n\|$. 事实上，

$$|W(x)|\leqslant\max\{|\underline{\lim}\,\varphi_n(x)|,\ |\overline{\lim}\,\varphi_n(x)|\}$$
$$\leqslant\sup\|\varphi_n\|\cdot\|x\|.$$

故 $\|W\|\leqslant\sup\|\varphi_n\|$.

引理 1.3.11 令 X 是任何 Banach 空间，$0<\theta<1$，$\{f_n\}\subset U(X^*)$，假设对任何 $f\in\mathrm{co}(f_n)$，$W\in L(f_n)$，有 $\|W-f\|\geqslant\theta$，并且设 $\lambda_n>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1$，则存在 α，$\theta\leqslant\alpha\leqslant2$，和 $\{g_n\}\subset U(X^*)$，具有下列性质：

① 对每个 $W\in L(g_n)$，$\left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g_n-W)\right\|=\alpha$.

② 对每个 $W\in L(g_n)$，和每个 n，

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i(g_i-W)\right\|<\alpha\left(1-\theta\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)\right).$$

证明：首先选 $\varepsilon_n>0$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\varepsilon_n}{\left(\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\sum\limits_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)}<1-\theta. \tag{1.13}$$

下面分两步进行.

(A) 先构造 g_n：

令 $\psi_i^{(0)}=f_i$，$\forall i$.

令

$$\alpha_1=\inf_{\substack{g\in\mathrm{co}(f_n)\\ \varphi_k\in\mathrm{co}(f_k,f_{k+1},\cdots)\\ k=1,2,\cdots}}\{\sup\{\|g-W\|;\ W\in L(\varphi_i)\}\}.$$

我们有 $\theta\leqslant\alpha_1\leqslant2$.

(事实上，因 $\|g-W\|\leqslant\|g\|+\|W\|\leqslant2$，故 $\alpha_1\leqslant2$，另一方面，因为 $\varphi_k\in\mathrm{co}(f_k,f_{k+1},\cdots)$，故

$$\underline{\lim}\,f_n(x)\leqslant\underline{\lim}\,\varphi_n(x)\leqslant\overline{\lim}\,\varphi_n(x)\leqslant\overline{\lim}\,f_n(x),\ \forall x\in X,$$

从而 $L(\varphi_n)\subset L(f_n)$，所以当 $W\in L(\varphi_n)$ $(\subset L(f_n))$，$g\in\mathrm{co}(f_n)$ 时，$\|g-W\|\geqslant\theta$，从而

$$\sup\{\|g-W\|;\ W\in L(\varphi_i)\}\geqslant\theta,$$
$$\forall g\in\operatorname{co}(f_n),\ \varphi_k\in\operatorname{co}(f_k,\ \cdots).$$
故 $\alpha_1\geqslant\theta$.).

选 $g_1\in\operatorname{co}(f_n)$ 和 $\{\varphi_i^{(1)}\}$, 使对一切 i, $\varphi_i^{(1)}\in\operatorname{co}(f_i,\ f_{i+1},\ \cdots)$ 且 $\alpha_1\leqslant\sup\{\|g_1-W\|;\ W\in L(\varphi_i^{(1)})\}<\alpha_1(1+\varepsilon_1)$.

选 $W'\in L(\varphi_i^{(1)})$, 使
$$\alpha_1(1-\varepsilon_1)<\|g_1-W'\|<\alpha_1(1+\varepsilon_1).$$
令 $\bar{x}_1\in U(X)$, 使
$$\alpha_1(1-\varepsilon_1)<(g_1-W')(\bar{x}_1). \tag{1.14}$$
由于
$$\underline{\lim}\ \varphi_i^{(1)}(\bar{x}_1)\leqslant W'(\bar{x}_1),$$
故有 $\{\varphi_i^{(1)}\}$ 的子序列 $\{\psi_i^{(1)}\}$, 使
$$\lim\psi_i^{(1)}(\bar{x}_1)=\underline{\lim}\ \varphi_i^{(1)}(\bar{x}_1),$$
则对 $W\in L(\psi_i^{(1)})$, 有
$$\underline{\lim}\ \varphi_i^{(1)}(\bar{x}_1)=\lim\psi_i^{(1)}(\bar{x}_1)=W(\bar{x}_1)\leqslant W'(\bar{x}_1).$$
由(1.14)知,
$$\alpha_1(1-\varepsilon_1)<(g_1-W)(\bar{x}_1),\ \forall W\in L(\psi_i^{(1)}).$$
再令
$$\alpha_2=\inf_{\substack{g\in\operatorname{co}(\psi_2^{(1)},\psi_3^{(1)},\cdots)\\ \varphi_k\in\operatorname{co}(\psi_k^{(1)},\psi_{k+1}^{(1)},\cdots)\\ k=2,3,\cdots}}\left\{\sup\left\{\left\|\lambda_1g_1+\left(\sum_{i=2}^{\infty}\lambda_i\right)g-W\right\|;\ W\in L(\varphi_k)\right\}\right\},$$
则 $\theta\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant2$. (因 $\|g_1\|\leqslant1$, $\|g\|\leqslant1$, $\|W\|\leqslant1$, 故 $\alpha_2\leqslant2$, 又 $\lambda_1g_1+\left(\sum_{i=2}^{\infty}\lambda_i\right)g\in\operatorname{co}(f_n)$, $\varphi_k\in\operatorname{co}(\psi_k^{(1)},\ \psi_{k+1}^{(1)},\cdots)\subset\operatorname{co}(f_k,\ f_{k+1},\ \cdots)$, 故 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$).

再选 $g_2\in\operatorname{co}(\psi_2^{(1)},\ \psi_3^{(1)},\ \cdots)$, 和 $\varphi_i^{(2)};\{i\geqslant2\}$, 使 $\varphi_i^{(2)}\in\operatorname{co}(\psi_i^{(1)},\ \psi_{i+1}^{(1)},\ \cdots)$, 对一切 $i\geqslant2$, 且
$$\alpha_2\leqslant\sup\left\{\left\|\lambda_1g_1+\left(\sum_{i=2}^{\infty}\lambda_i\right)g_2-W\right\|;\ W\in L(\varphi_i^{(2)})\right\}$$
$$<\alpha_2(1+\varepsilon_2).$$

选 $W'\in L(\varphi_i^{(2)})$，使

$$\alpha_2(1-\varepsilon_2)<\left\|\lambda_1 g_1+\left(\sum_{i=2}^{\infty}\lambda_i\right)g_2-W'\right\|<\alpha_2(1+\varepsilon_2).$$

令 $\bar{x}_2\in U(X)$，使

$$\alpha_2(1-\varepsilon_2)<\lambda_1 g_1(\bar{x}_2)+\left(\sum_{i=2}^{\infty}\lambda_i\right)g_2(\bar{x}_2)-W'(\bar{x}_2).$$

再选 $\{\varphi_i^{(2)};\ i\geqslant 2\}$ 的子列 $\{\psi_i^{(2)};\ i\geqslant 2\}$，使得

$$\alpha_2(1-\varepsilon_2)<\left(\lambda_1 g_1+\left(\sum_{i=2}^{\infty}\lambda_i\right)g_2-W\right)(\bar{x}_2),\ \forall W\in L(\psi_i^{(2)}).$$

继续这个过程，令

$$\alpha_n=\inf_{\substack{g\in\mathrm{co}(\psi_n^{(n-1)},\ \psi_{n+1}^{(n-1)},\ \cdots)\\ \varphi_k\in(\psi_k^{(n-1)},\ \psi_{k+1}^{(n-1)},\ \cdots)\\ k\geqslant n}}\left\{\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)g-W\right\|;\ W\in L(\varphi_k)\right\}\right\},$$

则 $\theta\leqslant\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_{n-1}\leqslant\alpha_n\leqslant 2$.

选 $g_n\in\mathrm{co}(\psi_n^{(n-1)},\ \psi_{n+1}^{(n-1)},\ \cdots)$和 $\{\varphi_i^{(n)};\ i\geqslant n\}$，使

$$\varphi_i^{(n)}\in\mathrm{co}(\psi_i^{(n-1)},\ \psi_{i+1}^{(n-1)},\ \cdots),\ \forall i\geqslant n,$$

且

$$\alpha_n\leqslant\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)g_n-W\right\|;\ W\in L(\varphi_i^{(n)})\right\}<\alpha_n(1+\varepsilon_n).\tag{1.15}$$

再选 $W'\in L(\varphi_i^{(n)})$，使

$$\alpha_n(1-\varepsilon_n)<\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)g_n-W'\right\|<\alpha_n(1+\varepsilon_n).$$

令 $\bar{x}_n\in U(X)$，使

$$\alpha_n(1-\varepsilon_n)<\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)g_n-W'\right)(\bar{x}_n).$$

又得到 $\{\varphi_i^{(n)};\ i\geqslant n\}$ 的子序列 $\{\psi_i^{(n)};\ i\geqslant n\}$，使得

$$\alpha_n(1-\varepsilon_n)<\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)g_i-W\right)(\bar{x}_n),$$
$$\forall W\in L(\psi_i^{(n)}). \tag{1.16}$$

这就完成了 $\{g_n\}$ 的构造.

(B) $\{g_n\}$ 即为所求的.

(a) 对一切 $W\in L(g_n)$, $\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i g_i-W\right\|=\alpha$.

事实上, 由于 $\theta\leqslant\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_{n-1}\leqslant\alpha_n\leqslant2$, 故 $\lim_n\alpha_n=\alpha$ 存在, 且 $\theta\leqslant\alpha\leqslant2$.

又由于 $L(g_n)\subset L(\psi_i^{(n)})\subset L(\varphi_i^{(n)})$,

$$g_1\in\mathrm{co}(\psi_i^{(0)})_{i\geq1},\qquad g_2\in\mathrm{co}(\psi_i^{(1)})_{i\geq2}\subset\mathrm{co}(\varphi_i^{(1)})_{i\geq2}\subset\mathrm{co}(\psi_i^{(0)})_{i\geq1},\ \cdots,$$

$$\cdots,\ g_{n_0}\in\mathrm{co}(\psi_i^{(n_0-1)})_{i\geq n_0}\subset\mathrm{co}(\varphi_i^{(n_0-1)})_{i\geq n_0}\subset\mathrm{co}(\psi_i^{(n_0-2)})_{i\geq n_0}\subset\mathrm{co}(\psi_i^{(n_0-2)})_{i\geq n_0-1},$$

$$g_{n_0+1}\in\mathrm{co}(\psi_i^{(n_0)})_{i\geq n_0+1}\subset\mathrm{co}(\varphi_i^{(n_0)})_{i\geq n_0+1}\subset\mathrm{co}(\psi_i^{(n_0-1)})_{i\geq n_0+1}\subset\mathrm{co}(\psi_i^{(n_0-1)})_{i\geq n_0}$$

故 $\{g_n;\ n\geq n_0\}\subset\mathrm{co}(\psi_i^{(n_0-1)})_{i\geq n_0}$
$\subset\mathrm{co}(\varphi_i^{(n_0-1)})_{i\geq n_0}.$

从而 $L(g_n)\subset L((\psi_i^{(n_0-1)})_{i\geq n_0})$, $\forall$ 正整数 n_0.

显然, $L((\psi_i^{(n_0-1)})_{i\geq n_0})\subset L((\varphi_i^{(n_0-1)})_{i\geq n_0})$, $\forall$ 正整数 n_0.

由(1.16), 对任何 $W\in L(g_n)\subset L(\psi_i^{(n)})$,

$$\alpha_n(1-\varepsilon_n)<\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)g_n-W\right)(\bar{x}_n).$$

故由(1.15)

$$\alpha_n(1-\varepsilon_n)\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)g_n-W\right\|$$

$$\leqslant\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i g_n\right)-W\right\|;W\in L(\varphi_i^{(n)})\right\}$$

$$\leqslant\alpha_n(1+\varepsilon_n),\quad \text{对一切 } W\in L(g_n). \tag{1.17}$$

同引理1.3.9(B)的证明，即知

$$\theta\leqslant\alpha=\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i g_i-W\right\|\leqslant 2,\quad \forall W\in L(g_n).$$

即(a)成立.

(b) 对每个 $W\in L(g_n)$，和每个 n,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i(g_i-W)\right\|<\alpha\left(1-\theta\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)\right).$$

事实上，首先，我们有下式成立：

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g_i-W)\right\|$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\frac{\lambda_n\alpha_n(1+\varepsilon_n)}{\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)}+\frac{1}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(g_i-W)\right\|\right)$$

$$\text{对一切 } n,\ \text{及 } W\in L(g_n). \tag{1.18}$$

事实上，

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g_i-W)\right\|$$

$$=\left\|\frac{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(g_i-W)+\frac{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\lambda_n(g_n-W)\right\|$$

$$=\left\|\frac{\lambda_n+\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(g_i-W)+\frac{\lambda_n\cdot\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}(g_n-W)\right\|$$

$$\leqslant\frac{\lambda_n}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(g_i-W)+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)(g_n-W)\right\|$$

$$+\frac{\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(g_i-W)\right\|$$

$$=\frac{\lambda_n}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i+\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)g_n-W\right\|$$

$$+\frac{\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(g_i-W)\right\| \text{(根据(1.17))}$$

$$\leqslant\frac{\lambda_n}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}(\alpha_n(1+\varepsilon_n))+\frac{\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(g_i-W)\right\|$$

$$=\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\left(\frac{\lambda_n\alpha_n(1+\varepsilon_n)}{\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)}+\frac{1}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(g_i-W)\right\|\right).$$

即(1.18)成立.

下面估计 $\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g_i-W)\right\|$.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g_i-W)\right\| \text{(根据(1.18))}$$

$$\leqslant\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\left[\frac{\lambda_n\alpha_n(1+\varepsilon_n)}{\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(g_i-W)\right\|\right] \text{(根据(1.18))}$$

$$\leqslant\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\left[\frac{\lambda_n\alpha_n(1+\varepsilon_n)}{\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)}+\frac{\lambda_{n-1}\alpha_{n-1}(1+\varepsilon_{n-1})}{\left(\sum_{i=n-1}^{\infty}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sum_{i=n-1}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-2}\lambda_i(g_i-W)\right\|\right]\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k\alpha_k(1+\varepsilon_k)}{\Big(\sum_{i=k}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=k+1}^{\infty}\lambda_i\Big)}$$

$$\leqslant\alpha\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k(1+\varepsilon_k)}{\Big(\sum_{i=k}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=k+1}^{\infty}\lambda_i\Big)}\text{(由(1.13))}$$

$$<\alpha\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\Big(\sum_{i=k}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big(\sum_{j=k+1}^{\infty}\lambda_i\Big)}+(1-\theta)\Big)$$

$$=\alpha\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big(\frac{1}{\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i}-\theta\Big)=\alpha\Big(1-\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\theta\Big).$$

故(b)成立，即$\{g_n\}$满足所要求的性质. □

定理 1.3.12(James 1964, 1972) 令 X 是 Banach 空间，则下列等价:

① X 是非自反的.

② 如果 $0<\theta<1$，则存在$\{f_n\}\subset U(X^*)$和X的一个子空间 X_0，使得对任何 $f\in \mathrm{co}(f_n)$及 $W\in X_0^{\perp}\equiv\{f;\ f\in X^*,\ f(x)=0,\ \forall x\in X_0\}$，有$\|f-W\|\geqslant\theta$，且 $f_n(x)\to 0$，$\forall x\in X_0$.

③ 如果$0<\theta<1$ 且$\lambda_n>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1$，则存在一个$\alpha$，$\theta\leqslant\alpha\leqslant 2$，和$\{g_n\}\subset U(X^*)$，使得对一切 $W\in L(g_n)$，有

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g_n-W)\Big\|=\alpha,$$

且
$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g_i-W)\Big\|<\alpha\Big(1-\theta\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big),$$

$\forall$ 正整数 n.

④ 存在$f\in X^*$不达到它的范数.

证明: ①⇒② 根据§1(四)，$U(X)$是 w 紧的当且仅当 $U(X)$是 w 序列紧的，容易得到，若 X 不是自反的，必存在一个可分子空间 X_0，它不是自反的. 应用定理 1.3.10 于X_0，得到一个序列$\{f_n\}\subset U(X^*)$(此处实际上应用 Hahn-Banach 定理将 $f_n\in U(X_0^*)$保范延拓为 $U(X^*)$的元)，使 $f_n(x)\to 0$，$\forall x\in X_0$，

且 $\|f\|_{X_0}\equiv\sup\{|f(x)|;\ x\in U(X_0)\}\geqslant\theta$, $\forall f\in\operatorname{co}(f_n)$, 从而对任何 $f\in\operatorname{co}(f_n)$, 及 $W\in X_0^{\perp}$, 有

$$\|f-W\|\geqslant\|f-W\|_{X_0}=\sup_{x\in U(X_0)}\{|f(x)-W(x)|\}=\|f\|_{X_0}$$

$$\geqslant\theta.\ \square$$

②⇒③　因为 $\lim\limits_n f_n(x)=0$, $\forall x\in X_0$, 故 $L(f_n)\subset X_0^{\perp}$. 从而 $\|g-f\|\geqslant\theta$, $\forall g\in L(f_n)$, 由引理1.3.10, 即得满足③中条件的 $\{g_n\}$. $\square$

③⇒④　首先取 $\lambda_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1$, 及 Δ, 使 $0<\Delta<\dfrac{\theta^2}{2}$, 且 $\lambda_{n+1}<\Delta\lambda_n$(事实上, 例如, 选 $\Delta=\dfrac{\theta^2}{2.5}$, $\lambda_1=1-\dfrac{\theta^2}{4-\theta^2}$, $\lambda_i=\left(\dfrac{\theta^2}{4}\right)^{i-1}$, $i\geqslant2$).

我们将证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g_n-W)$不达到它的范数, 对一切 $W\in L(g_n)$.

事实上, 若 $x\in U(X)$, 则 $\underline{\lim}\,g_n(x)\leqslant W(x)$, $\forall W\in L(g_n)$, 由于 $\theta\leqslant\alpha$, 必有正整数 $n(x)$, 使

$$(g_{n(x)+1}-W)(x)<\theta^2-2\Delta\leqslant\alpha\theta-2\Delta,$$

(否则, 从某项之后, 均有 $g_n(x)-W(x)\geqslant\theta^2-2\Delta>0$, 故 $\underline{\lim}\,g_n(x)>W(x)$矛盾.)

从而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g_n-W)(x)&<\sum_{i=1}^{n(x)}\lambda_i(g_i-W)(x)\\&\quad+(\alpha\theta-2\Delta)\lambda_{n(x)+1}+\sum_{i=n(x)+2}^{\infty}\lambda_i(g_i-W)(x)\\&<\left\|\sum_{i=1}^{n(x)}\lambda_i(g_i-W)\right\|+(\alpha\theta-2\Delta)\lambda_{n(x)+1}+2\sum_{i=n(x)+2}^{\infty}\lambda_i\\&<\alpha\Big(1-\theta\Big(\sum_{i=n(x)+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big)+(\alpha\theta-2\Delta)\lambda_{n(x)+1}+2\Delta\sum_{i=n(x)+1}^{\infty}\lambda_i\\&=\alpha-\sum_{i=n(x)+2}^{\infty}\lambda_i(\alpha\theta-2\Delta)<\alpha,\ \forall x\in U(X).\end{aligned}$$

但 $$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g_n-W)\right\|=\alpha,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g_n-W)$不达到它的范数. □

④⇒① 显然. □

(III) 关于 w 紧集充要条件的 James 定理.

(1) 可分情况.

定理 1.3.13(James) 设 X 是亚完备局部凸(Hausdorff)空间, B 是 X 的可分有界 w 闭子集, 则下列等价:

① B 不是 w 紧的.

② 存在 $\theta>0$ 和等度连续序列 $\{f_n\}\subset X^*$, 使

$$S_B(|f|)\equiv\sup\{|f(b)|:\ b\in B\}\geqslant\theta,\ \forall f\in\mathrm{co}(f_n),$$

且 $\lim\limits_{n} f_n(b)=0,\ \forall b\in B$.

③ 存在 $\theta>0$, 使得如果 $\lambda_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1$, 则对某个 $\alpha\geqslant\theta$ 和等度连续序列 $\{g_n\}\subset X^*$, 有

$$\lim_{n} g_n(b)=0,\ \forall b\in B,$$

$$S_B\left(\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n\right|\right)=\alpha$$

和 $$S_B\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\right|\right)<\alpha\left(1-\theta\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right),\ \forall n.$$

④ 存在 $g\in X^*$, 它在 B 上不达到上确界.

证明: ①⇒② 由于X是(Hausdorff)局部凸线性拓扑空间, 故 X 线性同胚于 $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的一个线性子空间, 其中 $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 是一族 Banach 空间 $\{X_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$ 的乘积空间.

又由于 X 是局部凸的, 故 $\overline{\mathrm{co}}(B)$是 X 中有界闭凸集, 且 X 是亚完备的, 故 $\overline{\mathrm{co}}(B)$ 是完备的. 从而 $\overline{\mathrm{co}}(B)$ 可以看作 $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的有界闭凸集, 由 Mazur 定理, 它是有界 w 闭凸

集. B 在 $\bar{co}(B)$ 中是 w 闭的，故 B 可看作 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 中的 w 闭子集.

令 $B_\gamma = P_\gamma B$, 其中 P_γ: $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to X_\gamma$ 是投影算子. 由于 B 是可分有界的，故 B_γ 也是 X_γ 中可分有界集.

由假设，B 不是 w 紧的，则至少有一个 γ，使 $\bar{B}_\gamma^w$ 在 X_γ 中不是 w 紧的. (若每个 $\bar{B}_\gamma^w$ 在 (X_γ, w) 中是紧的，由 Пихонов 定理，$\prod_{\gamma\in\Gamma} \bar{B}_\gamma^w$ 在 $\prod_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma, w)$ 中是紧的，但 w 拓扑的乘积等于乘积空间的 w 拓扑，故 $\prod_{\gamma\in\Gamma} \bar{B}_\gamma^w$ 在 $(\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma, w)$ 中是紧的. 又 $B \subset \prod_{\gamma\in\Gamma} \bar{B}_\gamma^w$，且 B 是 $(\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma, w)$ 中闭集，故 B 是 $(\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma, w)$ 中紧集. 故 B 是 w 紧的. 矛盾!)

令 $Y_\gamma = \overline{\text{span}}\ \bar{B}_\gamma^w = \overline{\text{span}}\, B_\gamma$，则 Y_γ 是 X_γ 中可分子空间，并且 $\bar{B}_\gamma^w$ 是有界 w 闭，但非 w 紧子集.

故不妨设 X 是可分 Banach 空间，B 是 X 的一个有界 w 闭但非 w 紧子集，$\overline{\text{span}}\, B = X$. (事实上，假如我们得到 X_γ^* 的等度连续子集 $\{f_\gamma^n\}$，使得当 $f_\gamma \in \text{co}(f_\gamma^n)$ 时，有 $S_{\bar{B}_\gamma^w}(|f_\gamma|) = \sup\{|f_\gamma(b)|;\ b\in \bar{B}_\gamma^w\} \geqslant \theta$，且

$$\lim_n f_\gamma^n(b) = 0,\ \forall b \in \bar{B}_\gamma^w,$$

那么，我们令 f^n 是 $(\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)^*$ 中第 γ 个坐标为 f_γ^n，而其余坐标为 0 的元. 又若 T: $X \to \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 是上述的线性同胚，则

$$\bar{f}^n = f^n \circ T \in X^*,$$

且 $\{\bar{f}^n\}$ 是 X^* 中等度连续集. 又当 $\bar{f} \in \text{co}(\bar{f}^n)$ 时，存在 $f_\gamma \in \text{co}(f_\gamma^n)$，使 $S_B(|\bar{f}|) = S_{B_\gamma}(|f_\gamma|)$ 故由 $S_{B_\gamma}(|f_\gamma|) = S_{\bar{B}_\gamma^w}(|f_\gamma|) \geqslant \theta$，知 $S_B(|\bar{f}|) \geqslant \theta$，并且，

$$\lim_n f^n(b) = \lim_n f_\gamma^n(P_\gamma b) = 0,\ \forall b \in B).$$

下面分两步进行.

(A) 令 C 是 X^* 赋以范数 $S_B(|f|)$ 所构成的赋范空间，即

$C=(X^*, S_B(|f|))$. 又令 $C^*=(X^*, S_B(|f|))^*$, 且在 C^* 上赋以相应于 $S_B(|f|)$ 的共轭范数 $\|\cdot\|_{C^*}$, 即对 $F\in C^*$,

$$\|F\|_{C^*}=\sup\{|F(f)|;\ f\in X^*,\ S_B(|f|)\leqslant 1\}.$$

将 B 中元嵌入到 C^* 中, 即对每个 $x\in B$, 令 $\tilde{x}(f)=f(x)$, $\forall f\in C$, 则 $B\subset U(C^*)$ (因为 $|\tilde{x}(f)|=|f(x)|\leqslant S_B(|f|)$, 故 $\|\tilde{x}\|_{C^*}\leqslant 1$).

根据 Banach-Aloglau 定理, $U(C^*)$ 是 $\sigma(C^*, C)$ 紧的. 故 $J_X(X)\cap C^*\subsetneqq C^*$. 事实上, 若 $J_X(X)\cap C^*=C^*$, 则

$$C^*\subset J_X(X).$$

由于 B 是 $\sigma(X, X^*)$ 闭的, 故 B 是 $\sigma(C^*, C)$ 闭的, 因为 $B\subset U(C^*)$, 从而 B 是 $\sigma(C^*, C)$ 紧的, 由此得到 B 是 $\sigma(X, X^*)$ 紧的, 矛盾! 故 $J_X(X)\cap C^*\subsetneqq C^*$.

(B) 选 $\eta\in C^*\backslash J_X(X)$. 且令 $M=\sup\{\|x\|; x\in B\}$.

令 $\|\eta\|$ 表示 η 在 X^{**} 中范数, 显然 $\|\eta\|\leqslant M\cdot\|\eta\|_{C^*}$.

因 X 是完备的. 故 $J_X(X)$ 在 X^{**} 中是闭的. 从而

$$d=\operatorname{dist}(\eta, J_X(X))>0.$$

令 $\Delta=\dfrac{d}{2}$. 又因 X 是可分的, 故在 X 中存在可数稠集 $\{x_n\}$, 应用 Helly 引理可选 $\{f_n\}\subset X^*$, 使 $\|f_n\|<1$, 且

$$f_n(x_1)=\cdots=f_n(x_n)=0,\quad \eta(f_n)=\Delta.$$

(事实上, 对任何固定 n, 考虑 $J_X(x_1), \cdots, J_X(x_n), \eta$, 和 $c_1=\cdots=c_n=0$, $c_{n+1}=\Delta$. 对任何纯量 $a_1, \cdots, a_{n+1}$, (不妨假设 $(a_{n+1}\neq 0)$), 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n+1} c_i a_i\right| &= |a_{n+1}\Delta| = |a_{n+1}|\frac{\Delta}{d}\cdot d\\ &\leqslant |a_{n+1}|\frac{\Delta}{d}\left\|\eta+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{n+1}}\hat{x}_i\right\|\\ &= \frac{1}{2}\left\|a_{n+1}\eta+\sum_{i=1}^{n}a_i\hat{x}_i\right\|,\end{aligned}$$

因此，应用 Helly 引理，存在 $f_n\in X^*$，$\|f_n\|<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<1$，使

$$f_n(x_1)=\cdots=f_n(x_n)=0,\ \eta(f_n)=\Delta)$$

容易看到，$f_n\xrightarrow{\sigma(\mathrm{x}^*,\ \mathrm{x})}0$，特别地，有

$$f_n(b)\to 0,\quad \forall b\in B.$$

又由于 $\|f_n\|<1$，故 $\{f_n\}$ 是等度连续的.

并且，若 $f\in \mathrm{co}(f_n)$，则 $f=\sum_{i=1}^{k}\beta_i f_i$，其中 β_i 为凸组合数，故

$$\eta(f)=\sum_{i=1}^{k}\beta_i\eta(f_i)=\Delta>0,$$

因此，
$$S_B(|f|)=\|f\|_C\geqslant\frac{|\eta(f)|}{|\eta\|_{C^*}}=\frac{\Delta}{\|\eta\|_{C^*}},$$

规定 $\theta=\frac{\Delta}{|\eta|_{C^*}}$，则 $\{f_n\}$ 即为(b)中所要求的. □

②⇒③ 同定理1.3.10证明，只须用 $S_B(|f|)$ 代替 $\|f\|$，并且利用 $\{f_n\}$ 的等度连续性及 B 的有界性得到 β，使得 $\theta\leqslant\alpha_n\leqslant\beta$(代替 $\theta\leqslant\alpha_n\leqslant 1$)，并且得到 $\alpha_n\nearrow\alpha$，及 $\theta\leqslant\alpha\leqslant\beta$，即可. □

③⇒④ 令 $g=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n$，则 g 在 B 上不达到它的上确界. 事实上，令 $x\in B$，则 $g_n(x)\to 0$，选 n，使得当 $m\geqslant n+1$ 时，有 $g_m(x)<\alpha\theta$，则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n(x)&<\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x)+\alpha\theta\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\\&<S_B\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\Big|\Big)+\alpha\theta\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\\&<\alpha\Big(1-\theta\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\Big)\Big)+\alpha\theta\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\\&=\alpha=S_B\Big(\Big|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i g_i\Big|\Big)\\&=\sup\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x)\Big|;\ x\in B\Big\}.\ \square\end{aligned}$$

④ ⇒ ① 根据 B 是 w 紧的及

$$f \in X^* = (X, \sigma(X, X^*))^*$$

即知. □

(2) 一般情况.

定理 1.3.14 若 B 是亚完备局部凸(Hausdorff)空间 X 中有界 w 闭子集,则下列等价:

① B 是不是 w 紧的.

② 存在 $\theta>0$, 和 B 的子集 B_0, 及 X^* 中等度连续子集 $\{f_n\}$, 使得当 $f\in \mathrm{co}(f_n)$, $W\in B_0^\perp=\{f; f\in X^*, f(B_0)=0\}$时, 有 $S_B(|f-W|)\geqslant\theta$, 且 $\lim\limits_n f_n(x)=0$, $\forall x\in B_0$.

③ 存在 $\theta>0$, 使得如果 $\{\lambda_n\}$ 是正数序列, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1,$$

则存在 $\alpha>0$ 和 X^* 的等度连续序列 $\{g_n\}$, 使得对每个 n 和 $W\in L(g_n)$, 有

$$S_B\left(\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g_n-W)\right|\right)=\alpha,$$

且
$$S_B\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g_i-W)\right|\right)<\alpha\left(1-\theta\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)\right).$$

④ 存在 X 上连续线性泛函 f, 使 f 在 B 上不达到它的上确界.

证明: ① ⇒ ② 如果 B 不是 w 紧的, 则 B 也不是 w 序列紧的(见参考书目[2]p. 51, 推论 2: 在亚完备局部凸空间中, 集合 B 是 w 紧的当且仅当它是 w 序列紧的), 故存在$\{x_n\}\subset B$, 使 $\{x_n\}$ 的任何子序列都不是 w 收敛的. 考虑 $B_1=\overline{\mathrm{co}}(x_n)$, 令

$$B_0=B_1\cap B,$$

则 B_0 是可分有界 w 闭, 但不 w 紧的(因为 B_1 是 w 闭的, 且 $\{x_n\}\subset B_0$).

应用定理 1.3.13, 存在 $\theta>0$ 和 X^* 的等度连续序列$\{f_n\}$, 使

$$S_{B_0}(|f|)=\sup\{|f(b)|;\ b\in B_0\}\geqslant\theta,\ \forall f\in\mathrm{co}(f_n),$$

且 $\lim\limits_{n} f_n(b)=0,\ \forall b\in B_0.$

这样，当 $f\in\mathrm{co}(f_n)$，$W\in B_0^{\perp}$ 时，有

$$S_B(|f-W|)\geqslant S_{B_0}(|f-W|)=S_{B_0}(|f|)\geqslant\theta.\ \square$$

②⇒③，③⇒④，④⇒① 的证明同定理 1.3.12. □

(IV) James 定理的注记和推论.

James 定理是泛函分析中最深刻、最有影响的定理之一. 为了进一步掌握，首先给出一些注记和推论.

注 James 定理(定理 1.3.14) 对不完备的赋范空间未必成立. 见下列.

例：设 X 是自反的 Banach 空间，$U(X)$是它的闭单位球. 令 $K=\mathrm{co}(\mathrm{ext}\,U(X))$，$Y=\mathrm{span}\,K$. 则 Y 是 X 的范稠子空间(因为 $U(X)$是 w 紧的，故 $\overline{K}^{\mathrm{w}}=\overline{K}=U(X)$，所以 $\overline{Y}=X$). 从而任取 $f\in Y^*$ 可保范延拓为 X^* 的元$\tilde{f}$，由于 X 自反，故$\tilde{f}$ 必定在 $U(X)=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}\,U(X))$ 上达到它的范数，并且$\tilde{f}$ 必定在 $\mathrm{ext}U(X)$上达到它的范数，从而 f 在 K 上达到它的最大值. 但显然，K 不是 w 紧的(当 $Y\neq X$ 时). □

推论 1.3.15 若 X 是 Banach 空间，B 是 X 的有界 w 闭子集，则

B 是 w 紧的 ⇔ 每个 $f\in X^*$ 在 B 上达到它的上确界.

证明：由定理 1.3.14 即知. □

推论 1.3.16 若 X 是 Banach 空间，A 是 X 的有界 w 闭子集，则

A是 w 紧的 ⇔ 对每个有界 w 闭子集 B，使得 $A\cap B=\emptyset$ 有 $\mathrm{dist}(A,\ B)>0$.

证明："⇒" 设 $a_n\in A$，$b_n\in B$，且 $\|a_n-b_n\|\to 0$，则由于 A 是 w 紧的，从而 A 是 w 序列紧的. 因此存在 $\{a_n\}$ 的子序列 $\{a_{n_i}\}$，使 $a_{n_i}\xrightarrow{\mathrm{w}} a\in A$，于是，对任何 $f\in X^*$，

$$|f(a-b_{n_i})| \leqslant |f(a_{n_i}-a)| + |f(a_{n_i}-b_{n_i})|$$
$$\leqslant |f(a_{n_i}-a)| + \|a_{n_i}-b_{n_i}\| \cdot \|f\| \to 0.$$

从而 $b_{n_i} \xrightarrow{w} a$, 因为 B 是 w 闭的, 故 $a \in B$, 因此 $a \in A \cap B$, 矛盾! □

"$\Leftarrow$" 依 James 定理, 若 A 不是 w 紧的, 则存在 $f \in X^*$, 使 $f(x) < \sup\{f(x); x \in A\} = c$, $\forall x \in A$.

令 $$B = \{x; \|x\| \leqslant 2M\} \cap \{x; f(x) = c\},$$
其中 $$M = \sup_{x \in A} \|x\|,$$
则 B 是有界 w 闭凸子集, 且 $A \cap B = \emptyset$.

不妨设 $c > 0$ (否则 $f(A) < 0$, 考虑 $-f$).

对任 ε, $0 < \varepsilon < \frac{c}{2}$, 选 $x \in A$, 使 $c < f(x) + \varepsilon$, 则

$$f(x) > c - \varepsilon > \frac{c}{2},$$

令 $y = \frac{cx}{f(x)}$, 则 $f(y) = c$, 且

$$\|y\| = \frac{\|cx\|}{|f(x)|} \leqslant 2\|x\| \leqslant 2M,$$

故 $y \in B$, 但

$$\|y-x\| \leqslant \frac{\|x\|}{f(x)}(c - f(x)) < \frac{2M}{c} \cdot \varepsilon,$$

故 $d(A, B) = 0$, 矛盾! □

实际上, 这里证明了:

A 是 w 紧的 $\Leftrightarrow$ 对每个有界闭凸子集 B, 使 $A \cap B = \emptyset$, 有 $d(A, B) > 0$.

推论 1.3.17 设 X 是 Banach 空间, A 是 X 的有界闭凸子集, 则

A 是 w 紧的 $\Leftrightarrow$ 对任何有界闭凸集 B, 使 $B \cap A = \emptyset$, A、B 可以强分离.

证明: A 是 w 紧的 $\Leftrightarrow$ 对任何有界闭凸集 B, 使 $B \cap A =$

$\emptyset$, 有 $d(A, B)>0$

$\Leftrightarrow$ 对任何有界闭凸集 B, 使 $B\cap A=\emptyset$, 有 $0\notin\overline{A-B}$.

$\Leftrightarrow$ 对任何有界闭凸集 B, 使 $B\cap A=\emptyset$, A、B 可以强分离. □

(V) James 定理的应用.

James 定理有广泛应用. 这里仅举两例.

定理 1.3.18(Pettis) 若 X 是一致凸的 Banach 空间, 则 X 是自反的.

证明: 由一致凸空间定义, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\|x+y\|>2-\delta$ 时, 有 $\|x-y\|<\varepsilon$.

任取 $f\in S(X^*)$, 则存在 $\{x_n\}\subset S(X)$, 使 $f(x_n)\to 1$. 对任何 $\varepsilon>0$, 考虑一致凸空间定义中相应于 ε 的 $\delta>0$, 因 $f(x_n)\to 1$, 从而存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时, 有 $f(x_n)>1-\delta/2$, 故

$$\|x_n+x_m\|\geqslant f(x_n+x_m)>2-\delta,$$

当 n, $m\geqslant N$ 时. 因此, $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$, 当 n, $m\geqslant N$ 时. 因此 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 由于 X 是 Banach 空间, 故

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x\in X,$$

从而 $f(x)=\|x\|=1$, 由 James 定理, X 是自反的. □

定理 1.3.19 (Krein-Milman) 若 X 是 Banach 空间, A 是 w 紧集, 则 A 的闭凸包 $\overline{\mathrm{co}}(A)$ 也是 w 紧集.

证明: 任取 $f\in X^*$, 则 $f\in(X, \sigma(X, X^*))^*$, 由于 A 是 w 紧的, 故存在 $x_0\in A$, 使 $f(x_0)=\sup\{f(x); x\in A\}$, 但是另一方面, $\sup\{f(x); x\in A\}=\sup\{f(x); x\in\overline{\mathrm{co}}(A)\}$, 故

$$f(x_0)=\sup\{f(x); x\in\overline{\mathrm{co}}(A)\}.$$

故 f 在 $\overline{\mathrm{co}}(A)$ 上达到它的上确界, 显然 $\overline{\mathrm{co}}(A)$ 是有界 w 闭凸集. 根据 James 定理 $\overline{\mathrm{co}}(A)$ 是 w 紧的. □

注: 实际上, 从证明中还知, A 的均衡闭凸包 $\overline{\mathrm{aco}}(A)$ 也是 w 紧的.

第二章　Banach 空间中基的初步理论

基的理论是 Banach 空间理论的一个重要分支. 本章仅介绍这方面基础知识. 首先讨论 Schauder 基的基本性质. 然后研究三种特殊的基: 有界完备基, 收缩基及无条件基. 最后, 研究逼近性质.

§1　绍德尔 (Schauder) 基

在 Hilbert 空间中, 完全正交系是极有用的. 例如, 借助于它可以将可分的 Hilbert 空间与 l_2 空间建立等距同构. 借助于这个想法, 我们讨论 Banach 空间的 Schauder 基.

定义 2.1.1　设 X 是 Banach 空间, $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中一个序列, 若对 X 中每个元 x, 存在唯一数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i,$$

其中级数是按范数收敛, 则称 X 为具有可列 Schauder 基的(简称为具基的), 而 $\{x_n\}$ 叫 X 的一个 Schauder 基 (简称为基). a_n 称为 x 关于基 $\{x_n\}$ 的第 n 个坐标.

首先, 关于基我们有下列简单性质.

基本性质 1　基是线性无关的.

基本性质 2　具有基的 Banach 空间是可分的.

基本性质 3　$f_n: x \mapsto a_n$ 是 X 上的线性泛函(我们称 f_n 为相应于基 $\{x_n\}$ 的坐标泛函).

基本性质 4　在有限维空间中, Schauder 基与 Hamel 基是一致的.

这些基本性质的证明是容易的.

例 1：可分 Hilbert 空间 H 必具有基.

事实上，任一完全正规化正交系就是一个基. □

例 2：$l^p(1\leqslant p<+\infty)$, c_0 具有基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其中

$$e_n=(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots),$$

称它为自然基.

收敛数列空间 c(具 sup 范数)具有基 $\{e_0, e_n; n=1, \cdots\}$, 其中 $e_0=(1, 1, \cdots)$. □

定义 2.1.2 一个基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 称为正规化的，如果

$$\|x_n\|=1, \quad \forall n.$$

很清楚，若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个基，则 $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 就是一个正规化基.

关于基本性质 3, 我们进一步问：是否每个 f_n 属于 X^*?

对于 Banach 空间来说，答案是肯定的. 为此，我们分几步完成.

定义 2.1.3 一个基称为单调基，如果对每个 $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$, 序列 $\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|;\ n=1, 2, \cdots\right\}$ 是单调增加的.

引理 2.1.1 若 X 是 Banach 空间，$a\in X\setminus\{0\}$. 令 f 是 X 的一个线性泛函，令 g: $X\to X$, $g(x)=f(x)\cdot a$, 若 g 是一个连续线性算子，则 $f\in X^*$.

证明：若 f 不是连续的，则存在 $\{x_n\}\subset X$, 使

$$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}0,$$

但 $|f(x_n)|\geqslant\varepsilon>0$, 对某个 ε.

从而，$g(x_n)\xrightarrow{\|\cdot\|}0$, 故

$$\frac{g(x_n)}{f(x_n)}\xrightarrow{\|\cdot\|}0,$$

但 $\dfrac{g(x_n)}{f(x_n)}-a\neq 0$, 矛盾! □

定理 2.1.2 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中单调基, 则相应的坐标泛函 f_n, $n=1, 2, \cdots$, 都是连续的.

证明: 对任何正整数 n, 定义算子 g_n: $X\to X$, $g_n(x)=f_n(x)x_n$, 则 g_n 是 X 到 X 的线性算子,且

$$\begin{aligned}\|g_n(x)\|=\|f_n(x)x_n\|&=\left\|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)x_k-\sum_{k=1}^{n-1}f_k(x)x_k\right\|\\&\leqslant\left\|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)x_k\right\|+\left\|\sum_{k=1}^{n-1}f_k(x)x_k\right\|\\&\leqslant 2\|x\|.\end{aligned}$$

故 g_n 是连续的,由引理 2.1.1 知, $f_n\in X^*$. □

定理 2.1.3 若 X 是 Banach 空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一个基,则相应坐标泛函 $f_n\in X^*$, $\forall n$.

证明: 根据定理 2.1.2, 我们只须证明在 X 中可以引入等价的新范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$(即存在 α、$\beta>0$, 使 $\alpha\|\cdot\|\leqslant|\!|\!|\cdot|\!|\!|\leqslant\beta\|\cdot\|$), 使 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 关于新范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ 成为单调基就可以了.

对 $x\in X$, $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$, 令

$$|\!|\!|x|\!|\!|=\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|;\ n=1,\ 2,\ \cdots\right\},$$

显然, $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$是一个赋范空间,且

$$\|x\|=\lim_{n}\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|\leqslant|\!|\!|x|\!|\!|.$$

下面将证明$(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$是完备的,于是利用 Banach 逆算子定理,即知 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ 是一个等价范数. 并且,当 $n>m$ 时,

$$\left|\!\left|\!\left|\sum_{i=1}^{m}a_ix_i\right|\!\right|\!\right|=\sup_{1\leqslant j\leqslant m}\left\|\sum_{i=1}^{j}a_ix_i\right\|\leqslant\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left\|\sum_{i=1}^{j}a_ix_i\right\|=\left|\!\left|\!\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|\!\right|\!\right|,$$

故 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 关于这个等价的新范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ 成为单调基.

设 $\{y^k\}$ 是$(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$中一个 Cauchy 列,

$$y^k=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^kx_i,\quad\forall k.$$

对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n, m\geqslant N$ 时，有

$$\|y^n-y^m\|=\sup_j\left\|\sum_{i=1}^{j}(a_i^n-a_i^m)x_i\right\|<\varepsilon. \tag{2.1}$$

故当 $n, m\geqslant N$ 时，对任一自然数 l，

$$\|(a_l^n-a_l^m)x_l\|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{l}(a_i^n-a_i^m)x_i\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{l-1}(a_i^n-a_i^m)x_i\right\|<2\varepsilon,$$

从而，当 $m, n\geqslant N$，对任一自然数 l，有

$$|a_l^n-a_l^m|<\frac{2\varepsilon}{\|x_l\|}.$$

故 $\{a_l^n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 数列．从而对每个自然数 l，存在数 a_l，使

$$\lim_n a_l^n=a_l.$$

由(2.1)知，当 $n, m\geqslant N$ 时，对任一 j，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{j}(a_i^n-a_i^m)x_i\right\|<\varepsilon,$$

令 $m\to+\infty$，则当 $n\geqslant N$ 时，对每个 j，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{j}(a_i^n-a_i)x_i\right\|\leqslant\varepsilon. \tag{2.2}$$

对任 p、q，有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{p}a_ix_i-\sum_{i=1}^{q}a_ix_i\right\|&\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{p}(a_i^N-a_i)x_i\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{q}(a_i^N-a_i)x_0\right\|\\&\quad+\left\|\sum_{i=1}^{p}a_i^Nx_i-\sum_{i=1}^{q}a_i^Nx_i\right\|\\&\leqslant2\varepsilon+\left\|\sum_{i=1}^{p}a_i^Nx_i-\sum_{i=1}^{q}a_i^Nx_i\right\|.\end{aligned} \tag{2.3}$$

因为 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i^Nx_i=y^N$，故存在 M，当 $p, q\geqslant M$ 时，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{p}a_i^Nx_i-\sum_{i=1}^{q}a_i^Nx_i\right\|<\varepsilon. \tag{2.4}$$

结合(2.3)、(2.4)，知 $\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $(X, \|\cdot\|)$ 中 Cauchy 列，由于 X 是 Banach 空间，故存在 $y\in X$，使

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i.$$

由(2.2)，当 $n \geqslant N$ 时，

$$\|y^n - y\| = \sup_j \left\| \sum_{i=1}^{j} (a_i^n - a_i) x_i \right\| \leqslant \varepsilon,$$

故 $y^n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$，从而$(X, \|\cdot\|)$是完备的. □

定理 2.1.4 若 X 是具基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Banach 空间，定义

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

则投影 P_n: $X \to X$ 是有界线性算子，并且 $\sup_n \|P_n\| < +\infty$.

证明：显然 P_n 是线性的，且是幂等的$(P_n^2 = P_n)$. 根据定理 2.1.3，存在 X 上新范数 $|||\cdot|||$，及 $K \geqslant 1$，使

$$\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant K\|x\|, \quad \forall x \in X,$$

并且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 $|||\cdot|||$ 组成一个单调基. 从而，对一切 n，有

$$\|P_n x\| \leqslant |||x||| \leqslant K\|x\|, \quad \forall x \in X,$$

从而，

$$\sup_n \|P_n\| \leqslant K < +\infty. \ \square$$

定义 2.1.4 定理 2.1.4 中的投影算子 P_n，称为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的自然投影，而数 $\sup_n \|P_n\|$ 称为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基常数，在不致引起混淆的情况下，简称基常数.

容易看到，一个基是单调的充要条件是它的基常数等于 1.

命题 2.1.5 设 X 是具基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Banach 空间，则对相应坐标泛函 f_n，有

$$\|f_n\| \leqslant \frac{2K}{\|x_n\|},$$

其中 K 为基常数.

证明：

$$|f_n(x)| = |a_n| = \left\| \frac{a_n x_n}{\|x_n\|} \right\| = \frac{1}{\|x_n\|} \|P_n x - P_{n-1} x\|$$

$$\leqslant \frac{2K}{\|x_n\|} \cdot \|x\| \quad \forall x \in X,$$

故 $$\|f_n\| \leqslant \frac{2K}{\|x_n\|}. \quad \square$$

定义 2.1.5 若 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中序列，若 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 中序列，使 $\varphi_m(x_n)=\delta_{m,n}$，即

$$\varphi_m(y_n)=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n,\end{cases}$$

则称 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为相应于 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的正交泛函序列，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也称为双正交序列.

命题 2.1.6 设 X 是具基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Banach 空间，则相应坐标泛函列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是唯一的相应正交泛函列.

证明是容易的.

命题 2.1.7 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的基，则对任 $x\in X$，$f\in X^*$，有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)f_i(x),$$

即 $$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)f_i \xrightarrow{w^*} f,$$

这时，也称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X^* 的一个 w^* 基.

证明：对任 $x\in X$，$f\in X^*$，

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)f_i(x)=f(P_n x),$$

但 $P_n x \xrightarrow{\|\cdot\|} x$，故 $f(P_n x)\to f(x)$，即

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)f_i(x). \quad \square$$

注：命题中 w^* 收敛一般不能改为 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)f_i$ 范数收敛于 f，即 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 未必是 X^* 的基，下一节将讨论何种条件下，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的基，特别地，当 X 是自反 Banach 空间时，$\{f_n\}$ 必是 X^* 的基.

以下先给出 Banach 空间 X 中序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基的充要条件. 它是一个非常有力的准则.

定理 2.1.8 令 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的一个序列，则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基的充要条件为下列三个条件成立：

(1) $x_n \neq 0$, $\forall n$.

(2) 存在一个常数 K，使得对任意数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和正整数 $n<m$，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leqslant K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

(3) $\overline{\operatorname{span}}\{x_n\} = X$.

证明："$\Rightarrow$" (1)、(3) 显然成立.

由定理 2.1.4，令 $\sup\|P_n\| = K$，设 $x = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$，则

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| = \|P_n x\| \leqslant K\|x\| = K\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|. \quad \square$$

"$\Leftarrow$" 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0$，由 (1)、(2) 以及归纳法即知，对一切 n，$a_n = 0$. 又由于

$$X = \overline{\operatorname{span}}\{x_n\},$$

故只须证 $B = \left\{x;\ x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i,\ a_i \text{ 是数}, i = 1, 2, \cdots\right\}$

是 X 的闭子空间，就知道 X 中每个元可唯一地表成 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 形式，从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的基.

如定理 2.1.3，在 B 中引入新的范数 $\|\!|x|\!\|$，由 (2) 知，

$$\|x\| \leqslant \|\!|x|\!\| \leqslant K\|x\|,$$

由定理 2.1.3 的证明知 B 关于 $\|\!|\cdot|\!\|$ 是完备的，从而 B 关于 $\|\cdot\|$ 是闭的，所以 B 是 $(X, \|\cdot\|)$ 的闭子空间. $\square$

定义 2.1.6 Banach 空间 X 的一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为基序列，如果它是 $\overline{\operatorname{span}}\{x_n\}$ 的一个 Schauder 基.

对基序列也可引入相应的基常数概念.

从定理 2.1.8 的证明知道下面这个定理是成立的.

定理 2.1.9 Banach 空间 X 的一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基序

列的充要条件是下列两个条件成立:

(1) $x_n \neq 0$, $\forall n$.

(2) 存在一个常数 K, 使得对任意数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和正整数 n、m, $n<m$, 有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leqslant K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

命题 2.1.10 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的一个基, 则相应坐标泛函序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基序列, 且 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基常数不超过 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基常数 K. 当 $K=1$, 或 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的基时两者相同.

证明: 若 $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为一个数列, $n<m$. 令

$$f=\sum_{i=1}^{m} b_i f_i.$$

显然, $f(x_i)=b_i$, 从而

$$f=\sum_{i=1}^{m} f(x_i) f_i.$$

对任何 $x=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$, 有

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{n} b_i f_i\right)(x)\right| = \left|f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\right| \leqslant \|f\| \cdot K \cdot \|x\|,$$

故
$$\left\|\sum_{i=1}^{n} b_i f_i\right\| \leqslant K\|f\| = K \cdot \left\|\sum_{i=1}^{m} b_i f_i\right\|.$$

由定理 2.1.9, 即知 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基序列.

对任 $f \in \overline{\text{span}}(f_n)_{n=1}^{\infty}$, 令 $Q_n f=\sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i$, 则一方面有

$$\|Q_n f\| \leqslant \|f\| \cdot K,$$

从而 $\|Q_n\| \leqslant K$.

另一方面若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的基时, 对任 $x=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, 选 $f \in \overline{\text{span}}\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使

$$\|f\|=1, \ f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)=\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|,$$

则

$$\|P_n x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| = \left|f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\right| = |(Q_n f)(x)|$$

$$\leqslant \|Q_n\| \cdot \|x\| \leqslant \sup\{\|Q_n\|\} \cdot \|x\|.$$

故 $\sup\{\|Q_n\|\} = \sup\{\|P_n\|\} = K$. □

注：容易看到 Q_n 等于 P_n 的共轭算子 P_n^* 在 $\overline{\text{span}}\{f_n\}$ 上的限制. 即 $Q_n = P_n^*|_{\overline{\text{span}}(f_n)}$.

关于基本事实 2, 1932 年 Banach 提出一个重要而著名的问题:

是否每个可分的 Banach 空间都具有 Schauder 基?

几十年来,人们对许多熟知的具体可分 Banach 空间几乎都找到了基(例如, 1974 年, S. V. Botschkariev 证明了圆盘代数(disc algebra)

$A = \{f(\xi); f(\xi)$ 是复变量复值函数, 在 $|\xi| < 1$ 中解析, 在 $|\xi| \leqslant 1$ 中连续, $\|f(\xi)\| = \sup\limits_{|\xi| \leqslant 1} \{|f(\xi)|\}$ 中存在 Schauder 基 (Matem Sbornik 24, 1—16(1976)).

于是,人们试图探讨这个问题的肯定回答. 然而, 1973 年, P. Enflo 第一个作出反例, 指出存在可分的 Banach 空间, 它不具 Schauder 基. 从而给长期悬而未决的问题以否定的回答. 尔后, A. M. Davie 又使用随机变量及 Abel 群的工具给出一个简化的反例.

虽然如此,下面的结论却仍然是正确的.

定理 2.1.11 每个无限维 Banach 空间包含一个具基的闭子空间.

为了证明定理,首先证明一个引理.

引理 2.1.12 若 X 是一个无限维 Banach 空间, 令 B 是 X 的一个有限维子空间, $\varepsilon > 0$, 则存在 $x \in S(X)$, 使

$$\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\| \quad \forall y \in B \text{ 及 } \lambda.$$

证明: 不妨设 $\varepsilon < 1$, 令 $\{y_i\}_{i=1}^{m}$ 是 B 中范数为 1 的元, 且使得

$$\{y; y\in B, \|y\|=1\}\subset\bigcup_{i=1}^{m}\{y; \|y-y_i\|<\frac{\varepsilon}{2}, \|y\|=1, y\in B\}.$$

令 $y_i^*\in X^*$, 使 $\|y_i\|=y_i^*(y_i)=\|y_i^*\|=1$, $i=1, \cdots, m$.

令 $x\in\bigcap_{i=1}^{m}\{x; \|x\|=1, y_i(x)=0\}$, 则 x 即所求的. 事实上, 由于 X 是无限维的, 故上述交集非空. 且对任 $y\in B$, $\|y\|=1$, 必有某个 i, $1\leqslant i\leqslant m$, 使 $\|y-y_i\|<\frac{\varepsilon}{2}$, 从而对任何数 λ 有

$$\|y+\lambda x\|\geqslant\|y_i+\lambda x\|-\frac{\varepsilon}{2}\geqslant y_i^*(y_i+\lambda x)-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=1-\frac{\varepsilon}{2}\geqslant\frac{\|y\|}{1+\varepsilon}. \quad \square$$

定理 2.1.11 的证明: 对任 $\varepsilon>0$, 选正数列 $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)\leqslant 1+\varepsilon.$$

选 $x_1\in S(X)$, 由引理 2.1.12, 归纳地构造一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$, 使得对每个 $n(\geqslant 1)$, 有

$$\|y\|\leqslant(1+\varepsilon_n)\|y+\lambda x_{n+1}\|, \quad \forall y\in \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}, \lambda.$$

于是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 就是 X 的一个基序列. 事实上, 对任何数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $n<m$, 有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|\leqslant(1+\varepsilon_n)\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+a_{n+1}x_{n+1}\right\|$$

$$\leqslant\prod_{i=1}^{\infty}(1+\varepsilon_i)\left\|\sum_{i=1}^{m}a_ix_i\right\|.$$

由定理 2.1.9 知, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基序列. 令 $Y=\overline{\operatorname{span}}\{x_n\}$, 即所求. $\square$

下面讨论具有基的 Banach 空间中, 基是否是唯一的.

定义 2.1.7 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$、$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分别为 X、Y 中的基. 它们称为等价的, 如果存在一个 T: $X\to Y$ 上的线性同胚, 使

$$Tx_n=y_n, \ \forall n.$$

命题 2.1.13 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是等价的充要条件为下式成立：

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ 收敛} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \text{ 收敛}.$$

证明："$\Rightarrow$" 若 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = x$，则

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i T x_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i,$$

故 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ 收敛. 反之亦然. □

"$\Leftarrow$" 定义 $T: X \to Y$，$T\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$，由条件，$T$ 是可以定义的. 显然，T 是 1-1 的，线性的，且 $TX = Y$. T 还是闭算子. 事实上，若

$$z^n = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(z^n) x_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} f_i(z) x_i = z,$$

$$Tz^n = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(z^n) y_i \to u = \sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i,$$

则由定理 2.1.2 知 $f_i(z^n) \to f_i(z)$，$f_i(z^n) \to b_i$，$\forall i$，故

$$b_i = f_i(z), \quad \forall i,$$

从而 $u = Tz$. 故 T 是闭算子.

由闭图象定理知，T 是线性同胚，且显然

$$Tx_n = y_n, \quad \forall n. \ \square$$

定理 2.1.14 令 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的具基常数 K 的正规化基，若 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，满足

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - y_i\| < \frac{1}{2K},$$

则 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是等价于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基.

证明：若 $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$，则 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ 也收敛.（事实上，

$$\left\|\sum_{i=n}^{m} a_i y_i\right\| \leqslant \sum_{i=n}^{m} |a_i| \cdot \|y_i - x_i\| + \left\|\sum_{i=n}^{m} a_i x_i\right\|$$

$$\leqslant 2K \cdot \|x\| \cdot \sum_{i=n}^{m} \|y_i - x_i\| + \left\|\sum_{i=n}^{m} a_i x_i\right\|,$$

由 $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i-y_i\|<\frac{1}{2K}$, 及 $\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$ 收敛, 即知 $\left\{\sum_{i=1}^{n}a_iy_i\right\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Banach 空间 X 中的 Cauchy 列, 故 $\sum_{i=1}^{\infty}a_iy_i$ 收敛.)

令 $Tx=\sum_{i=1}^{\infty}a_iy_i$, 则

$$\|x-Tx\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\cdot\|x_i-y_i\|\leqslant 2K\cdot\|x\|\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i-y_i\|,$$

故 $\|I-T\|<1$, 容易看到 T 是 X 到 X 上的一个线性同胚, 于是 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 就是与 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 等价的一个基. □

注: 容易看到, 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的具常数 K 的基, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$, 满足 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\|y_i-x_i\|}{\|x_i\|}<\frac{1}{2K}$, 则 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是等价于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基. 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为基序列, 则 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是等价于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基序列.

这个定理告诉我们, 对基作微小变动之后, 可得到与原来等价的基. 更进一步 A. Pelczynski & I. Singer (*Studia Math.* 25 (1964) 5～25) 证明每个具基的 Banach 空间必存在不可数多个互不等价的正规化基.

定义 2.1.8 令 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间的一个基 (基序列), 若 $p_1<p_2<\cdots$ 是正整数增加序列, $\{a_n\}$ 是任何数列, 又

$$u_j=\sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}}a_nx_n,$$

则称 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个块基(块基序列).

显然, 块基(块基序列)是一个基序列, 并且它的基常数不超过 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基常数.

定理 2.1.15 令 X 是具基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Banach 空间, Y 是 X 的一个无限维闭子空间, 则存在 Y 的一个闭子空间 Z, 它具有一个基, 且这个基与 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个块基等价.

证明: 首先, 由 Y 是无限维的, 故对每个 p, 存在

$$y=\sum_{n=p+1}^{\infty}a_nx_n,\ \|y\|=1,\ y\in Y.$$

（事实上，取 $Y\cap f_1^{\perp}\cap\cdots\cap f_p^{\perp}$ 中范数为 1 的元即可.）

下面归纳地构造 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个块基.

令 $y_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n,1}x_n\in Y$, $\|y_1\|=1$. 令 p_1 是一个正整数，使

$$\|y_1-u_1\|<\frac{1}{4K},$$

其中
$$u_1=\sum_{n=1}^{p_1}a_{n,1}x_n,$$

K 是基常数.

令 $y_2=\sum\limits_{n=p_1+1}^{\infty}a_{n,2}x_n\in Y$, $\|y_2\|=1$，再选正整数 p_2，使 $p_2>p_1$，且 $\|y_2-u_2\|<\dfrac{1}{4^2K}$，其中 $u_2=\sum\limits_{n=p_1+1}^{p_2}a_{n,2}x_n$.

继续下去，得到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个块基 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$，同时，

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|y_j-u_j\|}{\|u_j\|}<\frac{1}{2K}.$$

根据定理 2.1.14 注知，$\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是一个基序列，它与 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ 等价，令 $Z=\overline{\operatorname{span}}\{y_j\}$，则 Z 即所求的空间. □

本节的结尾我们介绍一个有关有限维 Banach 空间的有趣和常用的结果.

定理 2.1.16(Auerbach) 令 X_n 是 n 维 Banach 空间，则存在 $\{x_i\}_{i=1}^{n}\subset S(X_n)$, $\{f_i\}_{i=1}^{n}\subset S(X_n^*)$，使

$$f_i(x_j)=\delta_{ij}.$$

证明：任取 X_n 的一个 Schauder(Hamel)基 $\{e_i\}_{i=1}^{n}$.

对 $\{y_i\}_{i=1}^{n}\subset U(X_n)$, $y_i=a_{i,1}e_1+\cdots+a_{i,n}e_n$.

令
$$V(y_1,\ \cdots,\ y_n)=\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\cdots a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\cdots a_{2,n}\\ \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2}\cdots a_{n,n}\end{vmatrix},$$

则 $V(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ 在 $\{x_i\}_{i=1}^{n}\subset S(X_n)$ 达到它的最大值.

令

$$f_i(x)=\frac{V(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n)}{V(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n)},\quad i=1,\ \cdots,\ n.$$

则 $\{x_i\}_{i=1}^n\subset S(X)$ 及 $\{f_i\}_{i=1}\subset S(X^*)$ 即为所求的. □

对无限维 Banach 空间, A. Pelczynski(*Studia Math*. 55 (1976)295- 304)证明,对每个可分 Banach 空间,每个 $\varepsilon>0$,必存在双正交序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$, $\{x_n^*\}\subset X^*$, 使

$$\sup\|x_n\|\cdot\|x_n^*\|<1+\varepsilon.$$

且 $\overline{\text{span}}\{x_n\}=X$, $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 在 X 上是全的(total)(即对任 $x\neq0$, 必存在 x_n^*, 使 $x_n^*(x)\neq0$). 但是上式中 $1+\varepsilon$ 是否可用 1 来代替仍然是一个尚未解决的问题.

§2 有界完备基与收缩基

本节讨论具有某些性质的基.

若 X 是具基 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的 Banach 空间,对任何

$$x=\sum_{i=1}^\infty a_ix_i\in X,$$

由定理 2.1.4 知

$$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^n a_ix_i\right\|=\sup_n\|P_nx\|\leqslant K\|x\|.$$

但是反之,若存在一个数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, 使

$$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^n a_ie_i\right\|<+\infty,$$

未必 $\sum\limits_{i=1}^n a_ie_i$ 收敛. 例如,在 c_0 中,令 $a_i=1$, $i=1,\ 2,\ \cdots$, 则

$$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^\infty a_ix_i\right\|=1<+\infty,$$

但,显然, $\sum\limits_{i=1}^\infty a_ix_i$ 不收敛于 c_0 的元.

定义 2.2.1 Banach 空间 X 的基 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 称为有界完备的,如果对每个数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, 当

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < +\infty$$

时，必有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 收敛.

例 1: c_0 的基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是有界完备的. □

例 2: l_p 的基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ 是有界完备的. 事实上，若

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| = \sup_n \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} < +\infty,$$

则

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} < +\infty,$$

从而 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ 收敛. □

定义 2.2.2 Banach 空间 X 的基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为收缩基 (Shrinking basis)，若对每个 $f \in X^*$，有

$$\lim_{n \to \infty} F_n(f) = 0,$$

其中 $F_n(f) = \sup\{f(x);\ x = (I - P_n)x \equiv R_n x,\ \|x\| \leqslant 1\}$.

利用收缩基的概念可得到相应的坐标泛函 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的基的一个充要条件.

定理 2.2.1 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一个基，则相应的坐标泛函 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的基的充要条件是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为收缩基.

证明: "$\Rightarrow$" 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的基，则对每个 $g \in X^*$，$g = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) f_i$. 故 $P_n^* g = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) f_i$，$R_n^* g = g - P_n^* g$，从而 $\|R_n^* g\| \to 0$. 由于 $F_n(P_{n-1}^* g) = 0$，故

$$\lim_{n \to \infty} F_n(g) = \lim_{n \to \infty} F_n(R_{n-1}^* g) \leqslant \lim_{n \to \infty} \|R_{n-1}^* g\| = 0.$$

因此，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为收缩基. □

"$\Leftarrow$" 假设 $F_n(g) \to 0$，$\forall g \in X^*$.

令 $x \in S(X)$，则

$$(g - P_n^* g)(x) = g(R_n x) \leqslant (K+1) F_n(g),$$

其中 K 为基常数. 故

$$\|g-P_n^*g\|\leqslant(K+1)F_n(g)\to 0,$$

即 $g=\sum_{i=1}^{\infty}g(x)f_i$, 所以 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的基. □

注: 当 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为收缩基时, 根据命题 2.1.10,

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\text{ 是单调基}\Leftrightarrow\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\text{ 是单调基}.$$

收缩基与有界完备基, 在某种意义上, 是共轭的概念. 我们有

命题 2.2.2 如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的收缩基, 则相应的坐标泛函 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的有界完备基.

证明: 若 $\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}a_if_i\right\|<+\infty$.

令 $g_n=\sum_{i=1}^{n}a_if_i$, 取 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 中稠子集. 对固定 k, $\{g_n(z_k)\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界数列, 利用对角线法, 得到 $\{g_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, 使得对每个 k, $\{g_n(z_k)\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的.

容易看到, 对任何 $x\in X$, $\{g_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 是收敛的. 定义

$$g(x)=\lim_{i\to\infty}g_{n_i}(x),\quad\forall x\in X,$$

则 $g\in X^*$. 设 $g=\sum_{i=1}^{\infty}b_if_i$, 则

$$b_i=g(x_i)=\lim_{j\to\infty}g_{n_j}(x_i)=a_i,\ \forall i,$$

故 $g=\sum_{i=1}^{\infty}a_if_i$, 即 $\sum_{i=1}^{\infty}a_if_i$ 是收敛的. □

容易看到, c_0 的自然基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收缩基. l_1 的自然基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是收缩基. 但 $l_p(1<p<+\infty)$ 的自然基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收缩的.

一个 Banach 空间 X 的基是有界完备的这个条件是比较强的. 事实上, 我们有下面定理.

定理 2.2.3 一个具有界完备基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Banach 空间 X 必线性同胚于某个可分的共轭空间. 实际上, X 线性同胚

于 X^* 的子空间 $Z\equiv\overline{\operatorname{span}}\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的共轭空间.

证明：令 $J: X\to Z^*$, $(Jx)(z)=z(x)$, $\forall z\in Z$.

J 显然是线性有界算子. 事实上,

$$\begin{aligned}\|Jx\|&=\sup\{|(Jx)(z)|;z\in Z,\ \|z\|\leqslant 1\}\\&=\sup\{|z(x)|;\ \|z\|\leqslant 1,\ z\in Z\}\leqslant\|x\|,\end{aligned}$$

故 $\|J\|\leqslant 1$.

同时, J 还是一个线性同胚. 事实上, 若 $x\in\operatorname{span}\{x_i\}_{i=1}^n$, 选 $f\in X^*$, $\|f\|=1$, 使 $f(x)=\|x\|$, 则

$$P_n^*(f)=\sum_{i=1}^n f(x_i)f_i,$$

故 $P_n^*(f)\in Z$, 则

$$\begin{aligned}\|x\|&=f(x)=(P_n^*f)(x)=(Jx)(P_n^*f)\\&\leqslant\|Jx\|\cdot\|P_n^*f\|\leqslant K\|Jx\|,\end{aligned}$$

其中 K 是基常数. 故 $\|Jx\|\geqslant\frac{\|x\|}{K}$, 从而

$$\frac{1}{K}\|x\|\leqslant\|Jx\|\leqslant\|x\|\quad\forall x\in\underline{\operatorname{span}}(x_i)_{i=1}^n,$$

由此,容易知道 J 是线性同胚.

$JX=Z^*$(即 J 是满的). 事实上,首先因为

$$(Jx_n)(f_m)=f_m(x_n)=\delta_{m,n}.$$

故 $\{Jx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Z^* 中的正交泛函. 任取 $h\in Z^*$, 我们有 $\left\{\sum_{i=1}^n h(f_i)(Jx_i)\right\}_{i=1}^{\infty}$ 是范数有界的. 事实上,因为对任何 $f\in Z$, 由命题 2.1.10, $f=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)f_i$, 且

$$\left|\sum_{i=1}^n h(f_i)(Jx_i)(f)\right|=\left|\sum_{i=1}^n h(f_i)f(x_i)\right|\leqslant\|h\|\cdot\|f\|\cdot K.$$

故
$$\left\|\sum_{i=1}^n h(f_i)(Jx_i)\right\|\leqslant K\|h\|.$$

从而
$$\left\|\sum_{i=1}^n h(f_i)x_i\right\|\leqslant K^2\|h\|.$$

由于基是有界完备的，故 $\sum_{i=1}^{\infty} h(f_i)x_i$ 收敛于 X 中的某个元 x.

很清楚 $h=Jx$. (因为对任何 $z=\sum_{i=1}^{\infty} z(x_i)f_i\in Z$,

$$h(z)=\sum_{i=1}^{\infty} z(x_i)h(f_i),\ (Jx)(z)=\sum_{i=1}^{\infty} z(x_i)f_i(x),$$

且 $$f_i(x)=f_i\left(\sum_{j=1}^{\infty} h(f_j)x_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty} h(f_j)f_i(x_j)=h(f_i),$$

故 $h(z)=(Jx)(z)$, $\forall z\in Z$, 从而 $h=Jx$.) 这就证明了 $JX=Z^*$. □

利用收缩基和有界完备基的概念可以给出具有基的 Banach 空间的自反性的特征.

定理 2.2.4 若 X 是具基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Banach 空间，则

X 是自反的 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收缩且有界完备的.

证明: "$\Rightarrow$" 若 X 是自反的，则 $\overline{\text{span}}\{f_n\}=X^*$. 事实上，否则，存在 $f\in X^*\setminus\overline{\text{span}}\{f_n\}$, 则由 Hahn Banach 定理，存在 $x^{**}=J_X(x)\in X^{**}=J_X(X)$, 使 $f(x)=1$; $g(x)=0$, $\forall g\in\overline{\text{span}}\{f_n\}$. 特别地，有 $\left(\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)f_i\right)(x)=0$, 由命题 2.1.7, $f(x)=0$, 矛盾！故

$$\overline{\text{span}}\{f_n\}=X^*.$$

再由命题 2.1.10 知，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的基. 由定理 2.2.1 知，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收缩基.

又设 $\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right\|<+\infty$, 对某个数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, 由于自反空间的单位球是 w 紧的，根据定理 1.3.5 及定理 1.3.7 知 $U(X)$ 是w序列紧的，故存在子序列 $\left\{\sum_{i=1}^{n_j} a_ix_i\right\}_{j=1}^{\infty}$, 和 $x\in X$, 使 $\sum_{i=1}^{n_j} a_ix_i \xrightarrow{w} x$. 设 $x=\sum_{i=1}^{\infty} b_ix_i$.

对固定 i, $f_i\left(\sum_{k=1}^{n_j} a_kx_k\right)\to f_i(x)$, 但另一方面，$f_i\left(\sum_{k=1}^{n_j} a_kx_k\right)$

$\to a_i$, 因此 $f_i(x)=b_i=a_i$, $\forall i$. 从而 $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$, 即 $\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$ 是收敛的. 这表明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界完备的. □

"$\Leftarrow$" 若 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}\subset U(X)$, 利用对角线法, 选 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{y_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, 使

$$\lim_{j\to\infty}f_n(y_{k_j})=a_n(\text{存在}),\ \text{对每个}\ n.$$

因此,
$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f_i(y_{k_j})x_i=\lim_{j\to\infty}P_ny_{k_j},$$

因为
$$\|P_ny_{k_j}\|\leqslant K,$$

其中 K 为基常数. 故

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|\leqslant K,\quad \forall n,$$

即
$$\sup_n\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|\right\}\leqslant K.$$

由于基是有界完备的, 故存在 $y\in X$, 使 $y=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$.

根据 a_n 的定义,

$$f_n(y)=a_n=\lim_{j\to\infty}f_n(y_{k_j}),\quad \forall n. \tag{2.5}$$

由于基是收缩的, 根据命题 2.2.2, $\{f_n\}$ 是 X^* 的基, 因此, 对任何 $f\in X^*$, 有 $f=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)f_i$, 从而

$$\begin{aligned}|f(y)-f(y_{k_j})|\leqslant&\left|f(y)-\left(\sum_{i=1}^{n}f(x_i)f_i\right)(y)\right|\\&+\left|\left(\sum_{i=1}^{n}f(x_i)f_i\right)(y)-\left(\sum_{i=1}^{n}f(x_i)f_i\right)(y_{k_j})\right|\\&+\left|\left(\sum_{i=1}^{n}f(x_i)f_i\right)(y_{k_j})-f(y_{k_j})\right|\\\leqslant&(1+\|y\|)\left\|f-\sum_{i=1}^{n}f(x_i)f_i\right\|\\&+\sum_{i=1}^{n}\|f\|\cdot\|x_i\|\cdot|f_i(y)-f_i(y_{k_j})|\end{aligned}$$

由(2.5)知，$f(y_{k_i})\to f(y)$. 从而 $\|y\|\leqslant 1$，且 $y_{k_i}\xrightarrow{w} y$. 这表明 $U(X)$ 是 w 序列紧的. 所以 X 是自反的. □

M. Zipin 还证明：若 X 是一个具基的 Banach 空间，则

X 是自反的 $\Leftrightarrow$ X 的每个基是收缩的.

$\Leftrightarrow$ X 的每个基是有界完备的.

(见 *Isreal J. Math.* 6(1968)74—79.)

大家知道，X 具有基，则 X^* 不必具有基. 但另一方面，W. B. Johnson & H. P. Rosenthal & M. Zipin (*Studia Math.* 43(1972)77—92) 证明若 X^* 存在基，则 X 必存在基，且这个基是收缩的(从而 X^* 必有一个有界完备基).

我们看到，由定理 2.2.4 可立即得出 c_0 的自然基是收缩基但不是有界完备的；l_1 的自然基是有界完备的但不是收缩的. $l_p(1<p<+\infty)$ 的自然基既是有界完备又是收缩的.

§3 无条件基

Banach 空间中基的存在并没有给出这个空间结构方面的太多性质. 如果要深入研究空间的结构，就需要导入具有各种性质的基. 在 §2 中讨论的有界完备基和收缩基就是其中的两种. 本节将引入另一类重要基——无条件基.

为此，首先研究 Banach 空间中级数的各种收敛性.

定义 2.3.1 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 中的序列，如果对自然数列的每个置换 π，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ 是收敛的，那么称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是无条件收敛的.

显然，无条件收敛级数必定是收敛的. 而无条件收敛级数就是任意改变元的顺序得到的新级数仍然是收敛的那种级数. 容易看到，在 Banach 空间中，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是绝对收敛的

$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<+\infty\right)$，则它必是无条件收敛. 对有限维空间，无条件收敛与绝对收敛是等价的. 而对任何无限 Banach 空间，却成立下列著名的 Dvoretzky-Rogers 定理.

Dvoretzky-Rogers 定理 令 X 是无限维 Banach 空间，令 $\{\lambda_n\}$ 是一个正数序列，使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2<+\infty$，则在 X 中，必存在一个无条件收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$，使 $\|x_n\|=\lambda_n$，$\forall n$.

由这个定理看到，若令 $\lambda_n=\dfrac{1}{n}$，则所得到的级数就是无条件收敛但不绝对收敛的级数. 定理的证明可见参考书 [3] p. 16.

下面给出级数无条件收敛的充要条件. 这在以后的讨论中是很有用的.

命题 2.3.1 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 中的序列，则下列等价：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 是无条件收敛的.

(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_{n_i}$ 是收敛的，对自然数的每个增加序列 $\{n_i\}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\theta_n x_n$ 是收敛的，对 $\theta_n=\pm1$，$\forall n$.

(4) 对每个 $\varepsilon>0$，存在正整数 n，使得 $\left\|\sum\limits_{i\in\sigma}x_i\right\|<\varepsilon$，对自然数的每个有限子集 σ，使 $\min\{i;\ i\in\sigma\}>n$.

(5) 对每个有界数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x_n$ 是收敛的.

证明. (2)⇔(3)："⇒"令 $N_1=\{n_1,\ n_2,\ \cdots;$ 其中 $n_i<n_{i+1}$，$n_i\in N$，且 $\theta_{n_i}=1\}$（其中 N 表示自然数全体），$N_2=N\setminus N_1$，则当 $n\in N_2$ 时，$\theta_n=-1$. 由条件(2)

$$\sum_{n_i\in N_1}x_{n_i}=x,\quad \sum_{m_i\in N_2}x_{m_i}=y,\ \text{对某}\ x,\ y\in X,$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n x_n=\sum_{n_i\in N_1}x_{n_i}-\sum_{m_i\in N_2}x_{m_i}=x-y.$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ 是收敛的．所以(3)成立．

"$\Leftarrow$" 由条件(3)，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$，对某个 $x \in X$．任取自然数的增加序列 $\{n_i\}$，令

$$N_1 = N \setminus \{n_i\}_{i=1}^{\infty}，且\ \theta_n = \begin{cases} -1 & 当\ n \in N_1\ 时 \\ 1 & 当\ n \in \{n_i\}_{i=1}^{\infty}\ 时， \end{cases}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n = y \in X$，从而

$$2\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_i} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n = x + y,$$

故 $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} = \frac{1}{2}(x+y)$．所以条件(2)成立．□

(4)⇒(1)及(4)⇒(2)：若(4)成立，则条件(1)、(2)中出现的级数满足 Cauchy 条件，从而收敛于 Banach 空间 X 中的一个元．□

(2)⇒(4)：若条件(4)不成立，则存在 $\varepsilon > 0$ 和正整数的有限子集族 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$，使

$$q_n = \max\{i;\ i \in \sigma_n\} < p_{n+1} = \min\{i;\ i \in \sigma_{n+1}\},$$

且
$$\left\| \sum_{i \in \sigma_n} x_i \right\| \geq \varepsilon，对\ \forall n.$$

令 $\sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$，则 σ 是自然数的增加子序列，且 $\sum_{i \in \sigma} x_i$ 不收敛，这与条件(2)矛盾！□

(1)⇒(4)：若条件(4)不成立，同上，得 $\varepsilon > 0$ 和 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$，作正整数集 N 的一个置换如下：

当 $i \in \{i;\ q_n < i < p_{n+1}\}$ 时，$\pi(i) = i$．

当 $i \in \{i;\ p_n \leq i \leq q_n\}$ 时，对 $i = p_n + j$，规定 $\pi(p_n + j)$ 是 σ_n 的第 $j+1$ 个元，$j = 0, 1, \cdots, K_n - 1$（$K_n$ 是 σ_n 的基数），对其余的 i，规定 $\pi(i)$ 为 p_n 与 q_n 之间不属于 σ_n 的元按大小顺序排列中的元．则 $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ 不收敛，这与条件(1)矛盾．□

(5)⇒(3)：只须取 $a_n=\theta_n$ 即可．□

(4)⇒(5)：由条件(4)，对每个 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)>0$，使当 σ 是正整数的有限子集，且满足 $\min\{i; i\in\sigma\}>n$ 时，有

$$\left\|\sum_{i\in\sigma} x_i\right\|<\varepsilon.$$

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为任一有界数列，令 $\sup_n |a_n|=M$，对 n、$m>N(\varepsilon)$，令 $N_1=\{j; n\leqslant j\leqslant m,\ a_j\geqslant 0\}$，$N_2=\{j; n\leqslant j\leqslant m,\ a_j<0\}$，则

$$\left\|\sum_{i=n}^{m} a_i x_i\right\|\leqslant\left\|\sum_{i\in N_1} a_i x_i\right\|+\left\|\sum_{i\in N_2} a_i x_i\right\|. \tag{2.6}$$

不妨设 $a_{i_1}\geqslant a_{i_2}\geqslant\cdots\geqslant a_{i_l}>0$，其中 l 为 N_1 的基数，$i_j\in N_1$，$j=1,\cdots,l$．故

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i\in N_1} a_i x_i\right\| = \bigg\|a_{i_1}\bigg(x_{i_1}+\frac{a_{i_2}}{a_{i_1}}\bigg(x_{i_2}+\frac{a_{i_3}}{a_{i_2}}\\ \times\bigg(x_{i_3}+\cdots+\frac{a_{i_{l-1}}}{a_{i_{l-2}}}\bigg(x_{i_{l-1}}+\frac{a_{i_l}}{a_{i_{l-1}}}x_{i_l}\bigg)\bigg)\cdots\bigg)\bigg\|,\end{aligned}$$

又因为若 $\|x\|\leqslant A$，$\|y\|\leqslant A$，$\|x+y\|\leqslant A$，对某个 $A>0$，又 $0<\alpha<1$，则 $\|x+\alpha y\|=\|(1-\alpha)x+\alpha(x+y)\|\leqslant A$，故由归纳法，知

$$\left\|\sum_{i\in N_1} a_i x_i\right\|\leqslant\varepsilon M,$$

同理
$$\left\|\sum_{i\in N_2}(-a_i)x_i\right\|\leqslant\varepsilon M.$$

根据(2.6)，当 m，$n>N(\varepsilon)$ 时，有

$$\left\|\sum_{i=n}^{m} a_i x_i\right\|\leqslant 2\varepsilon M,$$

所以 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 是收敛的，即条件(5)成立．□

容易看到，若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 无条件收敛于 x，则对任一置换，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ 也收敛于 x．此外还有：

命题 2.3.2 若 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 无条件收敛，则

$$\left\{x;\quad x=\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i x_i;\quad \theta_i=\pm 1\right\}$$

是紧集.

证明：根据 Тихонов 定理，$\{1,\ -1\}^N$ 为紧集．且

$$T:\ \{-1,\ 1\}^N \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\theta_i x_i$$

为连续映象．又紧集的连续象是紧集．即得所要结论．□

命题 2.3.3 若 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ 是无条件收敛的，

$$T:\ l_\infty \to X,\ T(a_1,\ a_2,\ \cdots)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i x_i,$$

其中 $(a_i)\in l_\infty$，则 T 是有界线性算子．

证明：T 显然是线性的．且

$$\sup\{\|\sum_{i\in\sigma}a_i x_i\|;\ \sigma \text{ 为 } N \text{ 的有限子集}\}$$

$$\leqslant 2\cdot\sup_i|a_i|\cdot\sup\{\|\sum_{i\in\sigma}x_i\|;\ \sigma \text{ 为 } N \text{ 的有限子集}\},$$

故 $$\|T\|\leqslant 2\sup\{\|\sum_{i\in\sigma}x_i\|;\ \sigma \text{ 为 } N \text{ 的有限子集}\}.$$ □

命题 2.3.4 在 Hilbert 空间中，若 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ 是无条件收敛的，则 $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2<+\infty$.

证明：对任何 $\varepsilon>0$，选 $N(\varepsilon)>0$，使得对正整数集 N 的任何有限子集 σ，若 $\min\{i;\ i\in\sigma\}>N(\varepsilon)$，有

$$\|\sum_{i\in\sigma}x_i\|<\varepsilon.$$

又令 $M=\sup\{\|\sum_{i\in\sigma_1}\theta_i x_i\|;\ \sigma_1$ 是 $\{1,\ \cdots,\ N(\varepsilon)\}$ 的有限子集，$\theta_i=\pm 1\}$，令 $K=\max\{2\varepsilon,\ M\}$，则对任何 n 和 $\theta_i=\pm 1$，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i\right\|^2\leqslant 4K^2.$$

但利用平行四边形法则，容易归纳地证明

$$\sum_{\theta_i=\pm 1}\frac{\left\|\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i\right\|^2}{2^n}=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.$$

故 $\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\leqslant 4K^2$. 从而 $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2<+\infty$. □

定义 2.3.2 Banach 空间 X 的基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为无条件基，如果对任何 $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$, 级数 $\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$ 是无条件收敛的. 相应地，可定义无条件基序列.

例 1: 在 c_0 中 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无条件基.

事实上，若 $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n$, 则 $a_n\to 0$, 故对 $\{a_n\}$ 的任何子序列 $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, 有 $a_{n_i}\to 0$, 从而 $\sum_{i=1}^{\infty}a_{n_i}e_{n_i}$ 在 c_0 中是收敛的，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n$ 是无条件收敛的. 从而 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是 c_0 的无条件基. □

例 2: $l_p(1\leqslant p<+\infty)$的自然基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无条件基. □

定理 2.3.5 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 的基，则下列等价:

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无条件基.

(2) 对正整数的每个置换 π, $\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是无条件基.

(3) 若 $\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$ 是收敛的，则对正整数集 N 的每个子集 σ, $\sum_{n\in\sigma}a_nx_n$ 是收敛的.

(4) 若$\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$ 是收敛的，则当 $|b_i|\leqslant|a_i|$, $i=1, 2, \cdots$, 时，$\sum_{i=1}^{\infty}b_ix_i$ 是收敛的.

证明: (1)⇒(2): 设 π 是正整数的一个置换，对 $x\in X$, $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$, 由条件(1)，这个级数无条件收敛，并且

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_{\pi(i)}x_{\pi(i)}=x.$$

显然，上述表法是唯一的. 故 $\{x_{\pi(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 是基，并且容易看到，它也是一个无条件基. □

(2)⇒(1): 显然.

(1)⇒(3): 设 σ 为正整数集的一个子集，若

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = x,$$

由命题 2.3.1 及级数是无条件收敛的知道，$\sum_{i\in\sigma} a_i x_i$ 是收敛的. □

(3) ⇒ (1)：对任 $x \in X$，$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$，由条件 (3) 及命题 2.3.1 知，$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 无条件收敛，故 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是无条件基. □

(1)⇒(4)：若 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 收敛于 x，且对每个 i，$|b_i| \leqslant |a_i|$，则当 $a_i \neq 0$ 时，$\left|\frac{b_i}{a_i}\right| \leqslant 1$，由命题 2.3.1，及 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 无条件收敛，即知 $\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ 收敛. □

(4)⇒(1)：对任 $x \in X$，$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$，当 $\theta_n = \pm 1$ 时，$|\theta_n a_n| = |a_n|$，故由条件(4) 知 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \theta_i x_i$ 收敛. 应用命题 2.3.1 即知，$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 是无条件收敛的. 这表明 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是无条件基. □

注：将定理中基换成基序列也成立.

定理 **2.3.6** 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一个无条件基（或无条件基序列），σ 是正整数集的一个子集，定义

P_σ: X（相应地，$\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}$）$\to X$（相应地，$\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}$）

$$P_\sigma\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n\in\sigma} a_n x_n,$$

则 P_σ 是有界线性投影.

证明：P_σ 显然是线性且幂等的.

若
$$y_m = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^m x_i \xrightarrow{\|\cdot\|} y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i,$$

且
$$P_\sigma(y_m) = \sum_{i\in\sigma} a_i^m x_i \xrightarrow{\|\cdot\|} z = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i,$$

则由定理 2.1.2 知，对每个 i，$a_i^m \to a_i$，且当 $i \in \sigma$ 时 $a_i^m \to b_i$. 故当 $i \notin \sigma$ 时，$b_i = 0$；当 $i \in \sigma$ 时，$b_i = a_i$. 所以 $P_\sigma(y) = z$. 因此，P_σ 是闭算子，由闭图象定理知，P_σ 为连续性算子. □

定义 2.3.3 如定理 2.3.6 中定义的算子 P_σ 称为关于无条件基 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ (相应地,无条件基序列)的自然投影.

容易看到,当 $\sigma=\{1, 2, \cdots, n\}$ 时,P_σ 与前面定义的关于基(相应地,基序列)的自然投影是相同的.

定理 2.3.7 若 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 的一个无条件基(或无条件基序列),$\theta=\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ 是一个符号选取(即 $\theta_n=\pm1$). 定义:

M_θ: X (相应地,$\overline{\text{span}}\,\{x_n\}$)$\to X$(相应地,$\overline{\text{span}}\{x_n\}$)

$$M_\theta\Big(\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\Big)=\sum_{n=1}^\infty a_n\theta_n x_n,$$

则 M_θ 为一个有界线性算子.

证明: M_θ 显然是线性的.

若
$$y_m=\sum_{i=1}^\infty a_i^m x_i \xrightarrow{\|\cdot\|} y=\sum_{i=1}^\infty a_i x_i,$$
$$M_\theta(y_m)=\sum_{i=1}^\infty \theta_i a_i^m x_i \xrightarrow{\|\cdot\|} z=\sum_{i=1}^\infty b_i x_i,$$

则由定理 2.1.3 知,对一切 i, $a_i^m\to a_i$. 从而 $\theta_i a_i^m\to\theta_i a_i$, $\forall i$. 又因对一切 i, $\theta_i b_i^m\to b_i$, 故对一切 i,

$$b_i=\theta_i a_i,$$

从而 $z=\sum\limits_{i=1}^\infty \theta_i a_i x_i=M_\theta y$, 由闭图象定理,即知 M_θ 是连续线性算子. □

定理 2.3.8 对如上定义 P_σ, M_θ, 有下列成立:

(1) 若 $\sigma=\{n;\theta_n=1\}$, 则 $P_\sigma=\dfrac{I+M_\theta}{2}$.

(2) 若 $\theta=\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$, $\eta=\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ 是两个符号选取,则

$$M_\theta M_\eta=M_{\theta\eta},$$

其中
$$(\theta\eta)_n=\theta_n\eta_n.$$

(3) $\sup\limits_\sigma\|P_\sigma\|\leqslant\sup\limits_\theta\|M_\theta\|\leqslant 2\sup\limits_\sigma\|P_\sigma\|<+\infty$.

证明: (1) $2P_\sigma(x)=2\cdot\sum\limits_{i\in\sigma}a_i x_i$, 其中 $x=\sum\limits_{i=1}^\infty a_i x_i$. 又

$$(I+M_\theta)(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i+\sum_{i\in\sigma}a_ix_i-\sum_{i\in\sigma}a_ix_i=2\sum_{\sigma\in i}a_ix_i,$$

故 $P_\sigma=\dfrac{I+M_\theta}{2}$. □

(2) 对任何 $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\in X$,

$$(M_\theta M_\eta)(x)=M_\theta\left(M_\eta\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right)\right)=M_\theta\left(\sum_{i=1}^{\infty}\eta_ia_ix_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i\eta_ia_ix_i=M_{\theta\eta}(x),$$

故 $M_\theta M_\eta=M_{\theta\eta}$. □

(3) $$\|P_\sigma\|=\left\|\frac{1}{2}(I+M_{\theta_0})\right\|\leqslant\frac{1}{2}\|I\|+\frac{1}{2}\|M_{\theta_0}\|$$

$$\leqslant\sup_\theta\{\|M_\theta\|\},$$

其中 $\theta_0=\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\theta_n=\begin{cases}1 & \text{当 } n\in\sigma \text{ 时},\\ -1 & \text{当 } n\notin\sigma \text{ 时}.\end{cases}$

又对任 $\theta=\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$, 令 $\sigma_1=\{n;\ \theta_n=1\}$, $\sigma_2=\{n;\ \theta_n=-1\}$, 则对任何 $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$,

$$\|M_\theta x\|=\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\theta_ia_ix_i\right\|\leqslant\left\|\sum_{i\in\sigma_1}a_ix_i\right\|+\left\|\sum_{i\in\sigma_2}a_ix_i\right\|$$

$$=\|P_{\sigma_1}x\|+\|P_{\sigma_2}x\|\leqslant(2\sup_\sigma\|P_\sigma\|)\cdot\|x\|,$$

故 $\|M_\theta\|\leqslant2\sup_\sigma\|P_\sigma\|$, 从而

$$\sup_\theta\|M_\theta\|\leqslant2\sup_\sigma\|P_\sigma\|.$$

对任 $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\in X$, $\|x\|\leqslant1$. 由级数是无条件收敛的, 及命题 2.3.1, 存在 $N(1)$, 使得当正整数集的有限子集 σ, 满足 $\min\{i;\ i\in\sigma\}>N(1)$时, 有

$$\left\|\sum_{i\in\sigma}a_ix_i\right\|\leqslant1.$$

令 $M(x)=\sup\{\sum_{x\in\sigma_1}\|a_ix_i\|+1;\ \sigma_1$ 是 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ N(1)\}$ 的子集$\}$. 故对正整数集的任一子集 σ, 令

$$\sigma_1 = \{n; n\in\sigma,\ n\leqslant N(1)\},\ \sigma_2=\{n; n\in\sigma,\ n>N(1)\},$$

则 $$\Big\|\sum_{i\in\sigma_1} a_i x_i\Big\| \leqslant \sum_{i\in\sigma_1}\|a_i x_i\| + \Big\|\sum_{i\in\sigma_2} a_i x_i\Big\| \leqslant M(x),$$

从而 $\|P_\sigma x\|\leqslant M(x)$，故

$$\sup_\sigma \|P_\sigma x\|\leqslant M(x),$$

由一致有界原理知，

$$\sup_\sigma \|P_\sigma\| < +\infty.\ \square$$

定义 2.3.4 若 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Banach 空间 X 的无条件基(或无条件基序列)，M_θ 是如上定义的，则称数 $\sup\limits_\theta \|M_\theta\|$ 为 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的无条件基(相应地，无条件基序列)常数.

容易看到，无条件基常数不小于基常数.

命题 2.3.9 若 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 的无条件基，则存在 X 上一个等价范数，使 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的无条件基常数等于 1.

证明：定义 $|\!|\!|x|\!|\!| = \sup\limits_\theta \|M_\theta x\|$，对任 $x\in X$，则

$$\|x\| = \lim_n \|P_n x\| \leqslant \sup_\theta \|M_\theta x\| = |\!|\!|x|\!|\!| \leqslant \|x\|\cdot\sup_\theta \|M_\theta\|,$$

故 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ 是等价范数.

关于新范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$，

$$|\!|\!|M_\theta x|\!|\!| = \sup_\eta \|M_{\theta\eta} x\| \leqslant |\!|\!|x|\!|\!|,$$

故 $|\!|\!|M_\theta|\!|\!|\leqslant 1$，所以 $\sup\limits_\theta |\!|\!|M_\theta|\!|\!|\leqslant 1$.

设 $I=\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$，其中 $\theta_n=1$. 则

$$|\!|\!|M_I x|\!|\!| = \sup_\theta \|M_{I\theta} x\| = \sup_\theta \|M_\theta x\| = |\!|\!|x|\!|\!|,$$

故 $|\!|\!|M_I|\!|\!|=1$，从而 $\sup\limits_\theta |\!|\!|M_\theta|\!|\!| = 1$. $\square$

命题 2.3.10 若 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 的一个具无条件基常数 K 的无条件基，则相应坐标泛函 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X^* 的一个无条件基序列，它具无条件基序列常数. 不超过 K；当 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X^* 的基时，等于 K.

证明：由命题 2.1.10 知，$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是基序列.

又若 $f\in\overline{\operatorname{span}}\{f_n\}$，则 $f=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)f_i$，对正整数的任一置换 π，由定理 2.3.5 知，$\{x_{\pi(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个无条件基，故 $\{f_{\pi(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 为相应的坐标泛函，再由命题 2.1.10 知 $\{f_{\pi(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\overline{\operatorname{span}}\{f_n\}$ 的一个基，故 $f=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_{\pi(i)})f_{\pi(i)}$，这样，对任一置换 π，$\sum_{i=1}^{\infty}f(x_{\pi(i)})f_{\pi(i)}$ 收敛．故 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为无条件基序列。

对任一符号选取 $\theta=\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$，令

$$H_\theta(f)=\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i f(x_i)f_i,\quad 其中\quad f=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)f_i,$$

我们有

$$|H_\theta(f)(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i f(x_i)f_i(x)\right|=\left|f\left(\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i f_i(x)x_i\right)\right|$$
$$\leqslant \|M_\theta\|\cdot\|f\|\cdot\|x\|$$

对一切 $x\in X$，故 $\|H_\theta\|\leqslant\|M_\theta\|$，从而

$$\sup_\theta\|H_\theta\|\leqslant\sup_\theta\|M_\theta\|.$$

另一方面，当 $X^*=\overline{\operatorname{span}}(f_n)$ 时，

$$|f(M_\theta x)|=\left|f\left(\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i f_i(x)x_i\right)\right|=\left|\left(\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i f(x_i)f_i\right)(x)\right|$$
$$\leqslant\|H_\theta\|\cdot\|f\|\cdot\|x\|,\quad \forall x\in X,\quad f\in\overline{\operatorname{span}}\{f_n\}_{n=1}^{\infty}=X^*,$$

故 $\|M_\theta\|\leqslant\|H_\theta\|$，从而

$$\sup_\theta\|M_\theta\|\leqslant\sup_\theta\|H_\theta\|,$$

故

$$K=\sup_\theta\|M_\theta\|=\sup_\theta\|H_\theta\|.\quad\square$$

注：定理证明中 $H_\theta=M_\theta^*|_{\overline{\operatorname{span}}(f_n)}$.

有了这些准备工作之后，我们开始讨论，当 X 具无条件基时，X 将具有什么性质．

定理2.3.11 若 X 是具有无条件基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Banach 空间，则下列等价：

(1) 基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界完备的.

(2) X 是 w 序列完备的.

(3) X 没有闭子空间线性同胚于 c_0.（记为 $c_0 \not\hookrightarrow X$).

我们首先证明两个引理.

引理 2.3.12 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 的无条件基，它的无条件基常数是 K，则对于使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 收敛的数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，及有界数列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$，有

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n \right\| \leqslant 2K \sup_n |\lambda_n| \cdot \left\| \sum_{n=1}^{n} a_n x_n \right\|. \qquad (2.7)$$

注：当 X 是实 Banach 空间时，(2.7)的右边 $2K$ 可用 K 来代替.

证明：设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界数列，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 是收敛的.

选 $f \in S(X^*)$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n f(x_n) = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n \right\|.$$

先考虑实 Banach 空间情况.

令 $\theta = \{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $\theta_n = \begin{cases} 1 & \text{当 } a_n f(x_n) \geqslant 0 \text{ 时}, \\ -1 & \text{当 } a_n f(x_n) < 0 \text{ 时}, \end{cases}$ 则

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n \right\| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \cdot |a_n f(x_n)| \leqslant \sup_n |\lambda_n| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n f(x_n) \\ &\leqslant \sup_n |\lambda_n| \cdot f\left(M_\theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) \right) \\ &\leqslant \sup_n |\lambda_n| \cdot K \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|. \end{aligned}$$

对复 Banach 空间情况，分别考虑 $\sum_{n=1}^{n} a_n f(x_n)$ 的实部与虚部就可以了. □

引理 2.3.13 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间的无条件基，$\{f_n\}$ 是相应的坐标泛函，若 $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X 中一个有界序列，使对每个 $f \in X^*$，$\lim_{i \to \infty} f(y_i)$ 存在，且对每个 n，$\lim_{i \to \infty} f_n(y_i) = 0$，则

$$y_i \xrightarrow{\mathrm{W}} 0.$$

证明：由命题2.3.9，不妨设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的无条件基常数等于1.

反证法．若对某个$f\in S(X^*)$和$\varepsilon>0$，有$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$的子列，仍记作$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$，使$f(y_i)\geqslant\varepsilon$，$\forall i$.

由于对一切n，$\lim\limits_{i\to\infty}f_n(y_i)=0$，故对正整数集的任何有限子集$\mu$，$\lim\limits_{i\to+\infty}\|P_\mu y_i\|=0$.

取$\eta=\dfrac{\varepsilon}{8}$，则存在正整数的两个增加子序列$\{n_k\}$，$\{m_k\}$如下：

$m_1=1$，选$n_1>m_1$，使$\|R_{m_1}y_{n_1}\|<\eta$；

选$n_2>n_1$，使当$n\geqslant n_2$时，$\|P_{m_1}y_n\|<\eta$；

选$m_2>m_1$，使$\|R_{m_2}y_{n_2}\|<\eta$；

选$n_3>n_2$，使得当$n\geqslant n_3$时，有$\|P_{m_2}y_n\|<\eta$，

……．

令$z_k=P_{m_k}R_{m_{k-1}}y_{n_k}$，$k=1, 2, \cdots$，则对一切$k$，

$$\begin{aligned}\|z_k-y_{n_k}\|&=\|P_{m_k}R_{m_{k-1}}y_{n_k}-y_{n_k}\|\\&=\|P_{m_k}y_{n_k}-P_{m_k}P_{m_{k-1}}y_{n_k}-y_{n_k}\|\\&=\|R_{m_k}y_{n_k}-P_{m_{k-1}}y_{n_k}\|\\&\leqslant\|R_{m_k}y_{n_k}\|+\|P_{m_{k-1}}y_{n_k}\|<2\eta,\end{aligned}$$

因此，$$f(z_k)=f(y_{n_k})-f(y_{n_k}-z_k)>\varepsilon-2\eta>0.$$

对$\tau=\sum\limits_{k\in\rho}t_ke_k\in l_1$，其中$\rho$为正整数集的有限子集，令

$$T\tau=\sum_{k\in\rho}t_kz_k,$$

则

$$\begin{aligned}\|T\tau\|=\|\sum_{k\in\rho}t_kz_k\|&\leqslant\|\tau\|_{l_1}\cdot\sup\{\|z_k\|;k\in\rho\}\\&\leqslant(M+2\eta)\|\tau\|_{l_1},\end{aligned}$$

其中$M=\sup\limits_n\|y_n\|$.

由引理2.3.12，

$$\|T\tau\| = \|\sum_{k\in\rho} t_k z_k\| \geqslant \frac{1}{2}\|\sum_{k\in\rho} |t_k| z_k\| \geqslant \frac{1}{2}|f(\sum_{k\in\rho}|t_k| z_k)|$$

$$= \frac{1}{2}|(\sum_{k\in\rho}|t_k| f(z_k))| \geqslant \frac{1}{2}(\xi-2\eta)\sum_{k\in\rho}|t_k|$$

$$= \frac{1}{2}(\xi-2\eta)\cdot\|\tau\|_{l_1},$$

令 $S\tau = \sum_{k\in\rho} t_k y_{n_k}$, 则

$$\|S\tau - T\tau\| \leqslant 2\eta\|\tau\|_{l_1},$$

故
$$\|S\tau\| \leqslant \|S\tau - T\tau\| + \|T\tau\| \leqslant (4\eta + M)\|\tau\|_{l_1},$$

$$\|S\tau\| \geqslant |T\tau| - \|S\tau - T\tau\| \geqslant \frac{1}{2}(\xi-2\eta)\|\tau\|_{l_1} - 2\eta\|\tau\|_{l_1}$$

$$= \frac{1}{8}\xi\|\tau\|_{l_1},$$

故可将 S 延拓为(仍记作)S: $l_1 \to X$, 它是 l_1 到 X 内的一个线性同胚. 且 $Se_k = y_{n_k}$. (事实上, 若 $\tau = \sum_{k=1}^{\infty} t_k e_k \in l_1$, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} |t_k|\cdot\|y_{n_k}\| \leqslant M\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|t_k| < +\infty,$$

故
$$S\tau = \sum_{k=1}^{\infty} t_k y_{n_k} \in X,$$

且由于
$$\frac{1}{8}\xi\|\tau\|_{l_1} \leqslant \|S\tau\| \leqslant \left(\frac{1}{2}\xi + M\right)\|\tau\|_{l_1}$$

在 l_1 的一个稠集上成立, 从而在全体 l_1 上成立. 即 S 是线性同胚.)

取 $h = ((-1)^k)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty = l_1^*$, 则 $h(e_k) = (-1)^k$, $\forall k$.

$$(S^{-1})^* h(y_{n_k}) = h(S^{-1}y_{n_k}) = (-1)^k,$$

这与 $\lim_{k\to\infty}(S^{-1})^* h(y_{n_k}) = \lim_{n\to\infty}(S^*)^{-1}h(y_n)$ 存在相矛盾! □

定理 2.3.11 的证明: 不妨设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的无条件基常数为 1.

(1)⇒(2) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界完备的, 且 $\{y_i\} \subset X$ 是 w Cauchy 序列, 即对每个 $f \in X^*$, $\lim_i f(y_i)$ 存在.

令 $a_n=\lim_{i\to\infty} f_n(y_i)$，$n=1, 2, \cdots$，则对任何正整数 m，

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\right\| = \lim_{i\to\infty} \|P_n y_i\| \leqslant \sup_i \|y_i\|.$$

由于基是有界完备的，故存在 $y\in X$，使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = y$，我们看到 $\{y_i-y\}_{i=1}^{\infty}$ 满足引理 2.3.13 条件.（$\|y_i-y\|\leqslant\|y\|+\sup_i\|y_i\|$，且对任 $f\in X^*$，$\lim_i f(y_i-y)=\lim_i f(y_i)-f(y)$ 存在，并且 $\lim_{i\to\infty} f_n(y_i-y)=\lim_{i\to\infty} f_n(y_i)-f_n(y)=a_n-a_n=0$.）从而应用引理 2.3.13，$y_i\xrightarrow{w} y$. 所以 X 是 w 序列完备的. □

(2)⇒(3) 若 X 是 w 序列完备，则 X 的任何闭子空间 X_0 也是 w 序列完备的. 但已知 c_0 不是 w 序列完备的，故 X 没有闭子空间线性同胚于 c_0（因为 w 序列完备性在线性同胚下不变）. □

(3)⇒(1) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是有界完备的，则存在数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|\leqslant 1,$$

但 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 不收敛. 故存在 $\varepsilon>0$ 和正整数序列 $p_1<q_1<p_2<q_2<\cdots$，使

$$u_j=\sum_{i=p_j}^{q_j} a_i x_i,\ \|u_j\|\geqslant\varepsilon,\ \forall i.$$

任选数组 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m}$，由引理 2.3.12 知

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j\right\|\leqslant 2\sup_i|\lambda_i|\cdot\left\|\sum_{j=1}^{m} u_j\right\|<2\sup_j|\lambda_j|.$$

另一方面，由引理 2.3.12，

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j\right\|>\frac{1}{2}\varepsilon\sup_j|\lambda_j|.$$

对 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}\in c_0$，定义 $T(\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty})=\sum_j \lambda_j u_j$，则 T 决定了 c_0 到 X 内的线性同胚（事实上，T 在 c_0 的稠子集（仅有限项不

为 0 的元)上有定义，且满足

$$\frac{1}{2}\varepsilon\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{c_0}\leqslant\|T((\lambda_j)_{j=1}^{\infty})\|\leqslant 2\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{c_0},$$

故 T 可连续延拓为(仍记作 T)c_0 到 $\overline{\operatorname{span}}\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 内的一个线性同胚)．这与 $c_0 \not\hookrightarrow X$ 矛盾！ □

定理 2.3.14 若 X 是具无条件基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Banach 空间，则下列等价：

(1) 基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收缩的.

(2) 相应的坐标泛函 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的有界完备基.

(3) 相应的坐标泛函 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的一个基.

(4) X^* 是可分的.

(5) X 没有闭子空间线性同胚于 l_1, 即 $l_1 \not\hookrightarrow X$.

(6) 相应的坐标泛函 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的无条件基.

证明：由 § 2 定理 2.2.1 知，(1) ⇔ (2)，并且 (6) ⇒ (1)、(2)⇒(3)⇒(4) 是显然的.

(4)⇒(5) 若 X 有闭子空间 M_0 线性同胚于 l_1, 则

$$l_\infty \cong l_1^* \approx M_0^*,$$

这与 X^* 是可分的矛盾. □

(5)⇒(1) 不妨设无条件基常数为 1.

若基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是收缩的，则存在 $\varepsilon>0$, $f\in S(X^*)$, 和自然数的增加序列 $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, 及 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$, 使

$$f(y_k)>\varepsilon,\ R_{m_k}y_k=y_k,\ R_{m_{k+1}}y_k=0,\ \forall k.$$

对任何 $\tau=\sum_{k\in\rho}t_ke_k\in l_1$, 其中 ρ 为自然数集的有限子集，令 $T\tau=\sum_{k\in\rho}t_ky_k$, 根据引理 2.3.12 知,

$$\|T\tau\|=\|\sum_{k\in\rho}t_ky_k\|\geqslant\frac{1}{2}\|\sum_{k\in\rho}|t_k|y_k\|>\frac{1}{2}|f(\sum_{k\in\rho}|t_k|y_k)|$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k\in\rho}|t_k|f(y_k)\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon\|\tau\|_{l_1},$$

$$\|T\tau\|=\|\sum_{k\in\rho}t_ky_k\|\leqslant\sum_{k\in\rho}|t_k|\cdot\|y_k\|\leqslant\|\tau\|_{l_1},$$

故 T 可决定一个 l_1 到 $\overline{\text{span}}\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 内的线性同胚，这与 $l_1 \not\hookrightarrow X$ 矛盾. □

(1)⇒(6) 由命题 2.3.10 知 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的无条件基序列，又由命题 2.2.2 知，当 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的收缩基时，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的基，故 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的无条件基. □

定理2.3.15 若 X 是具无条件基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Banach 空间，则下列等价：

(1) X 是自反的.

(2) X 是 w 序列完备的，且 X 没有闭线性子空间线性同胚于 l_1.

(3) X 没有闭线性子空间线性同胚于 c_0 或 l_1.

(4) X、X^* 不含闭线性子空间线性同胚于 l_1.

(5) X^{**} 是可分的.

证明：(1)⇔(2)⇔(3)：由定理 2.2.4，X 是自反的⇔$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收缩的且有界完备的. 由定理 2.3.11 知，当基是无条件基时，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界完备的⇔X 是 w 序列完备的⇔X 没有闭线性子空间线性同胚于 c_0，由定理 2.3.14 知，当 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无条件基时，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收缩基⇔X 没有闭线性子空间线性同胚于 l_1. 综合上述即知所要结论. □

(1)⇒(5)：若 X 是可分的、自反的，则 X^{**} 是可分的. □

(5)⇒(4)：若 X^{**} 是可分的. 但 l_∞ 和 l_∞^* 是不可分的. 故 X 不含闭线性子空间线性同胚于 l_1，且 X^* 也不含闭线性子空间线性同胚于 l_1. □

(4)⇒(3)：若 X 有闭线性子空间 X_0，使 X_0 线性同胚于 c_0，$T: c_0 \to X$ 是(内)线性同胚. 则 T^*：$X^* \to c_0^* \cong l_1$ 是一个满的线性有界算子，从而 $X^*/\ker(T^*) \approx l_1$，故存在 $K>0$，可选 $x_n^* \in (T^*)^{-1}(e_n) \cap U(0, K+1)$，令

$$M = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n^*;\ (t_n)_{n=1}^{\infty} \in l_1 \right\},$$

则 $M\approx l_1$, 矛盾! □

注: R. C. James, 在1950年针对当时猜想: $X\approx X^{**}$(X与X^{**}线性同胚)$\Rightarrow X$是自反的, 或$X\cong X^{**}$(X与X^{**}等距同构)$\Rightarrow X$是自反的, 或X^{**}是可分的$\Rightarrow X$是自反的, 进行了研究, 举出了著名的例子(后来称之为James空间)否定了上述猜想, 并且研究了上述猜想成立的附加条件, 后来就发展成为上述几个定理. 下面写出他的例子(经过后人适当修改)并给出若干性质.

例1: James空间$J(\omega_0)$.

$$J(\omega_0)=\{x=(a_1,\ a_2,\ \cdots);\ \|x\| =\sup_{p_1<\cdots<p_m}\frac{1}{\sqrt{2}}[(a_{p_1}-a_{p_2})^2+(a_{p_2}-a_{p_3})^2+\cdots +(a_{p_m}-a_{p_1})^2]^{1/2}<+\infty,\ \lim a_n=0,$$

其中$p_1,\ \cdots,\ p_m$为自然数的任何增加的有限序列}. □

我们列举James空间如下基本性质. 除了性质(6)要用到参考书[3]中第8页的命题1.6.2外, 其他各条读者可作为练习自己予以证明.

(1) 令 $|||x|||=\sup\limits_{p_1<\cdots<p_m}[(a_{p_1}-a_{p_2})^2+\cdots+(a_{p_{m-1}}-a_{p_m})^2]^{1/2}$, 则$|||\cdot|||$与$\|\cdot\|$是等价的.

(2) $(J(\omega_0),\ \|\cdot\|)$是Banach空间.

(3) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$构成单调基, 其中 $e_n=(0,\ \cdots,\ 0,\ \overset{\text{第}n\text{项}}{1},\ 0,\ \cdots)$.

(4) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$不是有界完备的, 从而$J(\omega_0)$不是自反的. $\left(\text{考虑}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}e_i\right\}_{n=1}^{\infty}\right)$.

(5) $\{e_n\}$是收缩基.

(6) $J(\omega_0)^{**}=\{(a_1,\ a_2,\ \cdots);\ \sup\limits_{n}\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|<+\infty,\ \lim\limits_{n}a_n$存在}.

(7) $J(\omega_0)$与$J^{**}(\omega_0)$等距同构,

$$Tx^{**}=T(a_1,\ a_2,\ \cdots)=(-\lim_n a_n,\ a_1-\lim_n a_n,\ \cdots).$$

(8) $J(\omega_0)$没有无条件基.

(9) $J(\omega_0)^{**}=J(\omega_0)\oplus(1)$, 其中$(1)=(1,\ 1,\ \cdots)$.

(10) $J(\omega_0)^*$没有无条件基, 相应于$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$的系数泛函是有界完备基,但不是收缩基.

(11) $J(\omega_0)^{(n)}$是可分的, 其中$J(\omega_0)^{(n)}$表示$J(\omega_0)$的n次共轭空间.

(12) $(e_n,\ (1))$是$J(\omega_0)^{**}$的基.

注：G. A. Edgar(*Lecture Notes* 794 p31—p37) 研究了所谓长 James 空间 (long James space)$J(\omega)$, 其中ω为任何序数. 作为一个反例,给许多未解决的问题以否定的回答.

§4 逼近性质

大家知道,在可分的 Hilbert 空间中, 有界线性算子是紧算子(即全连续算子)的充要条件是它是有限秩算子列的算子范数极限.

对任何 Banach 空间 X、Y, 记

$$B(X,\ Y)=\{T;\ T\text{ 是 }X\text{ 到 }Y\text{ 的线性有界算子}\}.$$

若$T\in B(X,\ Y)$, 且存在有限秩算子列$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}\subset B(X,\ Y)$, 使$\|T_n-T\|\to 0$, 则$T$是紧算子. 反之, 一般不成立. 但是,当$Y$是具有基的 Banach 空间时,对每个紧算子$T\in B(X,\ Y)$, 有$\|TP_n-T\|\to 0$, 其中$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$为$Y$中关于这个基的自然投影,从而上述逆也成立.

对于一般的可分的 Banach 空间$X,\ Y$, 是否紧算子$T\in B(X,\ Y)$也必是有限秩算子的算子范数极限呢? 这是一个长期未解决的问题, Enflo 实际上就是针对这个问题提出反例,从而也得了一个可分 Banach 空间未必有基的例子.

定义 2.4.1 Banach 空间 X 说具有逼近性质(A. P)，如果对每个紧集 $K(\subset X)$，$\varepsilon>0$，存在一个 $T: X\to X$ 的有限秩算子$\left(\text{i.e, } Tx=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)x_i\right.$，对某组 $\{x_i\}_{i=1}^n\subset X$，$\{f_i\}_{i=1}^n\subset X^*$，$\forall x\in X\Big)$，使 $\|Tx-x\|\leqslant\varepsilon$，$\forall x\in K$.

定义 2.4.2 Banach 空间 X 说具有 λ 逼近性质，(λ, A, P)，若对每个紧集 $K(\subset X)$，$\varepsilon>0$，存在一个有限秩算子 $T: X\to X$，使 $\|Tx-x\|\leqslant\varepsilon$，对一切 $x\in K$，且 $\|T\|\leqslant\lambda$. Banach 空间 X 说具有有界逼近性质(B, A, P)，如果它是(λ, A, P)，对某个 λ. Banach 空间 X 说具有度量逼近性质(M, A, P)，如果它是(1, A, P).

命题 2.4.1 (1) MAP $\Rightarrow$ BAP $\Rightarrow$ AP.

(2) 若 X 是具基 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的 Banach 空间，则 X 具 BAP，更具 AP.

(3) 若 X 是具单调基 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的 Banach 空间，则 X 具 MAP.

证明：(1) 从定义直接得出. □

(2) 对任何紧集 K 和 $\varepsilon>0$，若 $x\in K$，则有 $N(x,\varepsilon)$，使得当 $n\geqslant N(x,\varepsilon)$ 时，有 $\|P_nx-x\|<\varepsilon/3$.

由于 K 是紧集，故存在 $\frac{\varepsilon}{3M}$ 网 $\{y_1,\cdots,y_n\}$，其中 M 是基常数.

令 $N(\varepsilon,K)=\max\{N(y_i,\varepsilon); i=1,\cdots,n\}$. 则 $P_{N(\varepsilon,K)}$ 即为所求. 事实上，对任何 $x\in K$，存在 y_j，$1\leqslant j\leqslant n$，使

$$\|x-y_j\|<\frac{\varepsilon}{3M},$$

记 $N(\varepsilon,K)=N_0$，则

$$\begin{aligned}\|P_{N_0}x-x\|&=\|P_{N_0}x-P_{N_0}y_j\|+\|P_{N_0}y_j-y_j\|+\|y_j-x\|\\&\leqslant M\|x-y_j\|+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $P_{N(\varepsilon,K)}$ 显然是有限秩的，且 $\|P_{N(\varepsilon,K)}\|\leqslant M$，故 X 具 BAP 性质. □

(3) 当基为单调时. $M=1$，故 X 具 MAP.

下面讨论 X 具 AP、BAP、MAP 的一些充要条件. 先证明两个引理.

引理 2.4.2 若 K 是 Banach 空间 X 的闭子集，则 K 是紧的充要条件为存在 X 中序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，使 $\|x_n\|\searrow 0$（递减趋于 0），且 $K\subset\left\{x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n;\ \lambda_n\geqslant 0,\ \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\leqslant 1\right\}$.

证明：充分性：令 $B=\left\{x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n;\ \lambda_n\geqslant 0,\ \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\leqslant 1\right\}$，则 B 是紧集　事实上，首先证明 B 是全有界的.

对任何 $\varepsilon>0$，取 N_0，使得当 $n\geqslant N_0$ 时，$\|x_n\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 又 $\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_{N_0});\ \sum_{i=1}^{N_0}\lambda_i\leqslant 1,\ \lambda_i\geqslant 0\}$ 是 N_0 维 Euclid 空间中的有界集，故存在有限 $\frac{\varepsilon}{2MN_0}$ 网 $\{(\lambda_i^1)_{i=1}^{N_0},\cdots,(\lambda_i^n)_{i=1}^{N_0}\}$，其中

$$M=\max\{\|x_1\|,\cdots,\|x_{N_0}\|\}.$$

若
$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i\in B,$$

则
$$\left\|\sum_{i=N_0+1}^{\infty}\lambda_i x_i\right\|\leqslant\sum_{i=N_0+1}^{\infty}\lambda_i\|x_i\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 j，$1\leqslant j\leqslant n$，使

$$|\lambda_i^j-\lambda_i|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{N_0}(\lambda_i^j-\lambda_i)^2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2MN_0},\quad i=1,\cdots,n.$$

则

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{N_0}\lambda_i^j x_i\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=N_0+1}^{\infty}\lambda_i x_i\right\|+\sum_{i=1}^{N_0}|\lambda_i^j-\lambda_i|\cdot\|x_i\|$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故 $\left\{\sum_{i=1}^{N_0}\lambda_i^1 x_i, \cdots, \sum_{i=1}^{N_0}\lambda_i^n x_i\right\}$ 是 B 的有限 ε 网. 从而 B 是全有界的.

其次 B 还是闭集. 事实上, 若

$$y_j=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^j x_i\in B,$$

且 $\|y_j-x\|\to 0$, 对某个 $x\in X$. 由于, 对每个 j, $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^j\leqslant 1$, 故可以选子列 $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使 $\lambda_i^{j_k}\to\lambda_i$, 对某个 λ_i, $\forall i$.

这样, 对任何 $\varepsilon>0$, 取 $N_0>0$, 使得当 $i>N_0$ 时, 有 $\|x_i\|<\frac{\varepsilon}{6}$. 又取 K_0, 使得当 $k>K_0$ 时, 有

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{j_k}x_i-x\right\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

且
$$|\lambda_i^{j_k}-\lambda_i|<\frac{\varepsilon}{6MN_0},\ (i=1,\ \cdots,\ N_0),$$

则

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i\right\|&\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{j_k}x_i-x\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{j_k}x_i-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i\right\|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^{N_0}|\lambda_i^{j_k}-\lambda_i|\cdot\|x_i\|\\&\quad+\sum_{i=N_0+1}^{\infty}\lambda_i\|x_i\|+\sum_{i=N_0+1}^{\infty}\lambda_i^{j_k}\|x_i\|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i$, 从而 $x\in B$, 即 B 是闭的, 故 B 是紧的. 又 K 是 B 的闭子集, 故 K 是紧集. □

必要性: 若 K 是紧集, 记 $B(x,a)=\{y;\ \|x-y\|<a\}$.

令 $\{x_{i,1}\}_{i=1}^{n_1}$ 是 X 的有限子集, 使

$$2K\subset\bigcup_{i=1}^{n_1}B\left(x_{i,1},\ \frac{1}{4}\right).$$

令 $K_2=\bigcup_{i=1}^{n_1}\left\{\left(B\left(x_{i,1},\ \frac{1}{4}\right)\cap 2K\right)-x_{i,1}\right\}$, 则 K_2 是 $B\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ 的紧子集.

令 $\{x_{i,2}\}_{i=1}^{n_2}\subset B\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, 使 $2K_2\subset\bigcup_{i=1}^{n_2}B\left(x_{i,2},\ \frac{1}{4^2}\right)$.

令 $\quad K_3=\bigcup_{i=1}^{n_2}\left\{\left(B\left(x_{i,2},\ \frac{1}{4^2}\right)\cap 2K_2\right)-x_{i,2},\right\}\cdots,$

归纳地, 以这种方式继续构造下去, 得 $\{x_{i,j}\}_{i=1}^{n_j}$, $j=1,\ 2,\ \cdots$.

对每个 $x\in K$, 存在某个 $i_1\ (1\leqslant i_1\leqslant n_1)$, 使 $2x-x_{i_1,1}\in K_2$(事实上, $2x\in B\left(x_{i_1,1},\ \frac{1}{4}\right)$, 对某个 $i_1(1\leqslant i_1\leqslant n)$, 因

$$2x\in B\left(x_{i_1,1},\ \frac{1}{4}\right)\cap 2K,$$

故 $\qquad 2x-x_{i_1,1}\in\left\{\left(B\left(x_{i_1,1},\ \frac{1}{4}\right)\cap 2K\right)-x_{i_1,1}\right\}\subset K_2).$

又存在 i_2, $(1\leqslant i_2\leqslant n_2)$, 使 $4x-2x_{i,1}-x_{i_2,2}\in K_3$. 于是一般地有 $x-\left(\frac{x_{i_1,1}}{2}+\frac{x_{i_2,2}}{2^2}+\cdots+\frac{x_{i_k,k}}{2^k}\right)\in 2^{-k}K_{k+1}$, 而因为

$$K_{k+1}\subset B\left(0,\ \frac{1}{4^k}\right),$$

故

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}x_{i_j,j},$$

显然 $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}=1$. 又 $\|x_{i,j}\|\leqslant 2\cdot 4^{-j+1}$, 对 $j>1$, $1\leqslant i\leqslant n_j$, 故所要结论成立. □

引理 2.4.3 若 X 和 Y 是 Banach 空间, φ 是 $B(X,\ Y)$ 上的线性泛函, 若存在某个非空紧集 $K\subset X$, 和常数 c, 使

$$|\varphi(T)|\leqslant c\|T\|_K,\quad \forall T\in B(X,\ Y),$$

其中 $\|T\|_K=\sup\{\|Tx\|;\ x\in K\}$ (此时, φ 称为在 $B(X,\ Y)$ 中在 X 的紧集上一致收敛的拓扑下的连续线性泛函), 则 φ 必具如下形式:

$$\varphi(T)=\sum_{i=1}^{\infty}y_i^*(Tx_i),$$

对某 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset X$, $\{y_i^*\}_{i=1}^{\infty}\subset Y^*$, 使

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|\cdot\|y_i^*\|<+\infty.$$

反之亦然.

证明: 首先证明若 φ 具上述形式, 则 φ 必具定理条件中所说的性质. 不妨设每个 $x_i\neq 0$.

选正数数列 $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$, 满足 $\eta_i\to+\infty$, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\|x_i\|\cdot\|y_i^*\|=c<+\infty.$$

令
$$K=\left\{\frac{x_i}{\|x_i\|\cdot\eta_i}\right\}_{i=1}^{\infty}\cup\{0\},$$

则 K 是紧集, 且对任何 $T\in B(X, Y)$,

$$|\varphi(T)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\|y_i^*\|\cdot\|x_i\|\cdot\eta_i\left\|T\frac{x_i}{\|x_i\|\eta_i}\right\|\leqslant c\|T\|_K.$$

故 φ 满足定理条件中所说的性质.

另一方面, 假设 φ 是 $B(X, Y)$ 上线性泛函, 满足定理的条件. 由引理 2.4.2, 不妨设

$$K=\left\{x=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i,\ \lambda_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i=1,\ \|x_i\|\searrow 0\right\}.$$

令 $S: B(X, Y)\to(\Sigma\oplus Y)_{c_0}$, $S(T)=(Tx_1, Tx_2, \cdots)$, 其中 $(\Sigma\oplus Y)_{c_0}=\{(y_i)_{i=1}^{\infty};\ y_i\in Y,\ \|y_i\|\to 0;\ \|(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_{c_0}=\sup\limits_i\|y_i\|\}$. (容易证明 $(\Sigma\oplus Y)_{c_0}$ 是 Banach 空间, 且 $(\Sigma\oplus Y)_{c_0}^*=(\Sigma\oplus Y^*)_{l_1}$, 其中 $(\Sigma\oplus Y^*)_{l_1}=\{(y_i^*)_{i=1}^{\infty};\ y_i^*\in Y^*,\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}\|y_i^*\|<+\infty;\ \|(y_i^*)_{i=1}^{\infty}\|=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|y_i^*\|\}$。)

由于 $|\varphi(T)|\leqslant c\|S(T)\|$, 故存在 S 的象 $S(B(X, Y))$ 的闭包上的一个线性泛函 ψ, 使 $\psi(T)=\psi(S(T))$. (事实上, 令 $\psi(S(T))=\varphi(T)$, 则 ψ 是定义在 $S(B(X, Y))$ 上的一个线性泛函, 且 $|\psi(S(T))|=|\varphi(T)|\leqslant c\|S(T)\|$, 故 ψ 可以连续线性地延拓到 $\overline{S(B(X, Y))}$ 上.) 再用 Hahn-Banach 定理, 将 ψ

保范地延拓到 $(\Sigma\oplus Y)^*_{c_0}\cong(\Sigma\oplus Y^*)_{l_1}$ 的一个元 $\overline{\psi}$，从而存在 $\{y_i^*\}_{i=1}^{\infty}\subset Y^*$，使 $\sum_{i=1}^{\infty}\|y_i^*\|<+\infty$，且 $\varphi(T)=\sum_{i=1}^{\infty}y_i^*(Tx)$。同时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\|y_n^*\|<+\infty$$

（因为当 $n\geqslant m$ 时，有 $\|x_n\|\leqslant 1$，故 $\sum_{n=m}^{\infty}\|x_n\|\cdot\|y_n^*\|\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\|y_n^*\|<+\infty$）。□

定理 2.4.4 若 X 是 Banach 空间，则下列等价：

(1) X 具 AP.

(2) 对每个 Banach 空间 Y 和 $T\in B(Y,X)$，对每个 $\varepsilon>0$ 和 Y 中每个紧集 K，存在 $B(Y,X)$ 中有限秩算子 T_α，使 $\|T-T_\alpha\|_K<\varepsilon$（简短地说，即有限秩算子在 $B(Y,X)$ 中依在 Y 的紧集上一致收敛的拓扑是稠集.）

(3) 对每个 Banach 空间 Y，有限秩算子在 $B(X,Y)$ 中依在 X 的紧集上一致收敛的拓扑是稠集.

(4) 对每个 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，$\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subset X^*$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\cdot\|x_n^*\|<+\infty,\quad 和\quad \sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x)x_n=0,\quad \forall x\in X,$$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x_n)=0.$$

证明：(1)⇒(4) 若 X 具 AP，则对恒等算子 $I\in B(X,X)$，和每个 $\varepsilon>0$，每个紧集 K，存在 $B(X,X)$ 中有限秩算子 T_α，使 $\|T_\alpha-I\|_K\leqslant\varepsilon$.

若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，$\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subset X^*$，$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\cdot\|x_n^*\|<+\infty$，使 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x)x_n=0$，$\forall x\in X$. 由引理 2.4.3，令

$$\varphi(T)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^*(Tx_i),$$

则 φ 定义了 $B(X,X)$ 上的一个线性泛函，且存在某个非空紧集 $K_0\subset X$，和常数 c，使 $|\varphi(T)|\leqslant c\|T\|_{K_0}$，$\forall T\in B(X,X)$，于是对任何有限秩算子 $T_a\in B(X,X)$，有 $\varphi(T_a)=0$.（事实上，

不妨设 T_a 为一秩算子, $T_a(x)=y^*(x)y$, 对某个 $y^*\in X^*$, $y\in X$, $\forall x\in X$. 由假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^*(y)x_n=0$, 故

$$0=T_a\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(y)\,x_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(y)T_ax_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(y)y^*(x_n)y,$$

由于 $y\neq0$, 故

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_n^*(y)y^*(x_n)=0.$$

从而

$$\varphi(T_a)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(T_ax_n)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(y^*(x_n)y)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(y)y^*(x_n)=0.)$$

对任 $\varepsilon>0$, 选 T_a 为 $B(X, X)$ 中有限秩算子, 使

$$\|I-T_a\|_{K_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{c},$$

由上面讨论知 $\varphi(T_a)=0$, 故

$$|\varphi(I)|=|\varphi(I-T_a)|\leqslant c\cdot\|I-T_a\|_{K_0}<\varepsilon,$$

由 ε 是任意的, 故 $\varphi(I)=0$, 但 $\varphi(I)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^*(x_n)$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x_n)=0.\ \square$$

(4)⇒(1)若条件(4)成立.

由引理 2.4.3, 对 $B(X, X)$ 上关于在 X 紧集上一致收敛拓扑下连续的线性泛函 φ, 必存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$, $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subset X^*$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\cdot\|x_n^*\|<+\infty$, 使 $\varphi(T)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^*(Tx_n)$, $\forall T\in B(X, X)$. 由条件(4)知, 若对 $B(X, X)$上一切有限秩算子 T_a, 有 $\varphi(T_a)=0$, 则 $\varphi(I)=0$, 其中 I 为恒等算子. (事实上, 对 $x(\neq0)\in X$, $x^*(\neq0)\in X^*$, 定义 $T_{(x,x^*)}(y)=x^*(y)x$, $\forall y\in X$, 则 $T_{(x,x^*)}$ 是 $B(X, X)$中一秩算子, 故

$$0=\varphi(T_{(x,x^*)})=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(T_{(x,x^*)}x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x^*(x_n)x)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x)x^*(x_n)=x^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x)x_n\Big).$$

由 x^* 是任意的，故 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x)x_n=0$，$\forall x\in X$. 由条件(4)知，

$$\varphi(I)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x_n)=0.\ )$$

若此时条件(1)不成立，则存在 $\varepsilon>0$，和一个紧集 K，使 $\|T_a-I\|_K>\varepsilon$，对一切 $B(X,X)$ 中有限秩算子. 从而根据 Hahn-Banach 定理，存在 $B(X,X)$ 上线性泛函 φ，它是在 $B(X,X)$ 中在 X 的紧集上一致收敛拓扑下连续，且

$$\varphi(T_a)=0,\ \forall B(X,X)\text{中有限秩算子 }T_a,$$

但是 $\varphi(I)=1$. 这与上面的结论矛盾! □

(2)⇒(1) 令 $Y=X$ 即可. □

(3)⇒(1) 令 $Y=X$ 即可. □

(1)⇒(2) 对每个紧集 $K\subset Y$，TK 是 X 中紧集，由条件(1)，任给 $\varepsilon>0$，存在 $B(X,X)$ 中有限秩算子 T_1，使

$$\|T_1Ty-Ty\|\leqslant\varepsilon,\ \forall y\in K,$$

显然，T_1T 是有限秩算子. □

(1)⇒(3) 令 $0\neq T\in B(X,Y)$，K 是 X 中任何紧集，$\varepsilon>0$，由条件(1)，存在 $B(X,X)$ 中有限秩算子 T_1，使

$$\|T_1x-x\|\leqslant\frac{\varepsilon}{\|T\|},\ \forall x\in K.$$

故 $$\|TT_1x-Tx\|\leqslant\|T\|\cdot\|T_1x-x\|<\varepsilon,\ \forall x\in K,$$

并且，显然 TT_1 是 $B(X,Y)$ 中有限秩算子. □

注：还可以证明：X 具 AP 的充要条件是对每个 Banach 空间 Y，和每个紧算子 $T\in B(Y,X)$，和每个 $\varepsilon>0$，存在有限秩算子 T_1，使 $\|T-T_1\|<\varepsilon$. 即 $K(Y,X)=\overline{F(Y,X)}$，其中 $K(Y,X)=\{T;\ T\in B(Y,X),\ T\text{ 是紧算子}\}$，$F(Y,X)=\{T;\ T\in B(Y,X),\ T\text{ 是有限秩算子}\}$. 但是请注意，对任何

Banach 空间Y, $\overline{F(X, Y)} = K(X, Y) \Leftrightarrow X^*$ 具 AP.

与上面方法一样，可得 X 具 BAP、MAP 的充要条件. 下面写出 MAP 的充要条件.

定理2.4.5 若 X 是 Banach 空间，则下列等价：

(1) X 具 MAP.

(2) 对每个 Banach 空间 Y 和 $T \in B(Y, X)$, $\|T\| \leqslant 1$, 对每个 $\varepsilon > 0$, 对 Y 中每个紧集 K, 存在 $B(Y, X)$中范数小于等于 1 的有限秩算子 T_α, 使 $\|T - T_\alpha\|_K < \varepsilon$.

(3) 对每个 Banach 空间 Y 和 $T \in B(X, Y)$, $\|T\| \leqslant 1$, 每个 $\varepsilon > 0$, X 的每个紧集 K, 存在 $B(X, Y)$中范数小于等于 1 的有限秩算子 T_α, 使 $\|T - T_\alpha\|_K < \varepsilon$.

(4) 对任意 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty \subset X^*$, 使

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| \cdot \|x_n^*\| < +\infty,$$

且

$$\left|\sum_{i=1}^\infty x_n^*(T_\alpha x_n)\right| \leqslant \|T_\alpha\|,$$

$\forall B(X, X)$中有限秩算子 T_α, 则有

$$\left|\sum_{n=1}^\infty x_n^*(x_n)\right| \leqslant 1.$$

对 AP, 还有一个性质：

定理2.4.6 若 X 是 Banach 空间，则

$$X^* \text{具 AP} \Rightarrow X \text{具 AP}.$$

特别地，当 X 是自反 Banach 空间时，

$$X^* \text{具 AP} \Leftrightarrow X \text{具 AP}.$$

证明：若 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty \subset X^*$,

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| \cdot \|x_n^*\| < +\infty,$$

且

$$\sum_{n=1}^\infty x_n^*(x) x_n = 0, \quad \forall x \in X.$$

由于 $\{J_X(x_n)\}_{n=1}^\infty \subset X^{**}$, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|J_X x_n\| \cdot \|x_n^*\| < +\infty,$$

对每个 $x^* \in X^*$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_X(x_n)(x^*) x_n^* = 0.$$

(事实上，$0 = x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n) x_n^*\right)(x)$，$\forall x \in X$，$\forall x^* \in X^*$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n) x_n^* = 0$，$\forall x^* \in X^*$。) 由于 X^* 具 AP，根据定理 2.4.4，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) = 0$，再根据定理 2.4.4 知，$X$ 具 AP. □

注：有例子表明，存在可分 Banach 空间，X 具基，且 X^* 可分，但 X^* 却不具 AP(参考书[3]p. 34 定理 1.e. 7)．(从而更有 X 具 AP$\not\Leftrightarrow X^*$ 具 AP.) 同时，也有例子表明，存在可分 Banach 空间 X，使 X^* 可分，X 具 AP，但却不具 BAP(参考书[3]p. 42 例 1. e. 20)．而对自反空间可以证明：

$$\text{AP} \Leftrightarrow \text{BAP} \Leftrightarrow \text{MAP}.$$

现在回到 §1 开始的事实 2. 与此相应的还有下列问题:

1. 是否每个 Banach 空间都具 AP? (否, Enflo 反例.)

2. 是否每个 Banach 空间都具 BAP? (否 Enflo 反例.)

3. 是否存在 Banach 空间具 AP 而不具 BAP? (肯定, Figiel & Johnson 反例.)

4. 是否存在 Banach 空间具 BAP 而不具 MAP? (肯定, Figiel & Johnson 反例.)

5. 是否存在 Banach 空间具 MAP 而不具基? (尚未解决.)

6. 是否存在 Banach 空间是可分的，而不具基(著名的 Banach 问题)? (肯定, Enflo 反例.)

7. 若 X 具 BAP, 是否存在一个等价范数 $|||\cdot|||$, 使得 $(X, |||\cdot|||)$ 具 MAP? (尚未解决.)

1973 年 P. Enflo 找到了一个可分自反的 Banach 空间不具AP性质,故这个空间也不具 BAP,也不具 Schauder 基(*Acta. Math.* 130(1972)309～317).

同时 Enflo 反例也说明了下列问题:

(1) 给问题 1 以否定回答.

(2) 给问题 2 以否定回答.

(3) 给著名的 Banach 问题以否定回答.

(4) $C[0, 1]$具有闭子空间不具基. (事实上, 由 Mazur 定理知,每个可分 Banach 空间等距同构于 $C[0,1]$的闭子空间.)

(5) 存在 l_1 的闭子空间 F, 使 l_1/F 不具基. (事实上, 可以证明,每个可分 Banach 空间都等距于 l_1 的某个商空间.)

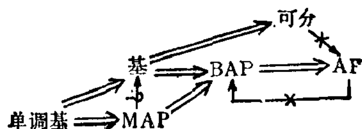
T. Figiel & W. B. Johnson (*Proc. A. M. S.* 41 (1973) 197—200, *Compositio Math.* 29(1974)179—190)利用 Enflo 反例, 构造一个可分 Banach 空间, 它具 AP, 但不具 BAP; 也构造了一个可分 Banach 空间,它具 BAP, 而不具 MAP, 从而给问题 3 和 4 以肯定回答.

同时,有例子表明 Banach 空间 X 具有基, 且 X^* 可分, 但 X^* 不具 AP(从而 X^* 不具基)(参考书[3], p. 34, 定理 1.e. 7(b)).

上面的第 7 个问题、第 5 个问题尚未解决,还有下列问题也还没有解决:

X 是可分的,具 BAP, 是否 X 必具基?

最后,我们以下表结束本节.



第三章 Bishop-Phelps 定理、Krein-Milman 定理及 Choquet 定理

本章介绍 Bamach 空间理论中非常有用的三个定理，前者与支撑点有关，后两个定理是与端点有关的表示定理.

§1 Bishop-Phelps 定理

(一)问题的提出.

由第一部分定理 2.2.11 (支撑定理)知，若 X 是实局部凸线性拓扑空间，A 是一个实心凸体，则对任何 $x\in\partial A$ (A 的边界)，存在 $f\in X^*$，使 $f(x)=\sup f(A)\equiv\sup\limits_{x\in A} f(x)$. 若存在 $f\in X^*$，使 $f(x)=\sup f(A)$，那么 $x(\in A)$ 就叫 A 的支撑点，而相应的 f，叫做 A 的(相应于 x)的支撑泛函. 我们发现，在证明中 $\mathrm{int}\,A\neq\emptyset$ 这一条件是非常重要的. 现在问:

问题 1: 若 A 是 X 的一个闭凸子集，$\mathrm{int}\,A=\emptyset$，是否对每个 $x\in\partial A$，存在一个支撑超平面($\{x;f(x)=c\}$，其中 $f\in X^*$，c 为常数)?

有例子表明，既使 X 是 Banach 空间，也存在一个闭凸子集 A，使 $\mathrm{int}\,A=\emptyset$，但 A 有一个边界点不是支撑点. 但是下面的 Bishop-Phelps 第一定理告诉我们: 若 X 是 Banach 空间，A 是 X 的一个有界闭凸集，则 A 的支撑点在 A 的边界上是稠的.

注: N. Peck (*Duck Math. J.* 38 (1971) 271—278) 给出一个完备可度量化局部凸空间(即 Fréchet 空间) X，在 X 中有一个有界闭凸集，它没有支撑点. 这表明 Bishop-Phelps 第一定理不可推广到 Fréchet 空间.

另一方面，由 James 定理，我们知道，Banach 空间 X 是自反的充要条件是对任何 $f\in X^*$，f 达到它的范数，于是就问：

问题 2：当 Banach 空间 X 不是自反的时候，

$$\mathscr{P}(X)=\{f;f\in X^*,\ f\text{ 达到它的范数}\}$$

在 X^* 中是否充分"大"？

定义 3.1.1 赋范空间 X 称为次自反的，若 $X^*=\overline{\mathscr{P}(X)}$.

Bishop-Phelps 第二定理告诉我们，每个 Banach 空间 X 是次自反的.

(二)某些定义.

定义 3.1.2 若 X 是一个线性空间，X 的一个子集 K 称为一个真凸锥，如果

(1) $x\in K,\ \lambda\geqslant 0\Rightarrow \lambda x\in K$ (i.e $\lambda K\subset K,\ \forall\lambda\geqslant 0$),

(2) $x_1,\ x_2\in K\Rightarrow x_1+x_2\in K\ (K+K\subset K)$,

(3) $x,\ -x\in K\Rightarrow x=0\ (K\cap(-K)=\{0\})$.

注：K 仅满足(1)、(2)时称为凸锥.

若 K 是 X 的一个真凸锥，则 X 上可以导入下列序关系：$x\leqslant_K y\Leftrightarrow y-x\in K$，使 X 成为半序空间. 这时序关系具有下列性质：

(1) $x\leqslant_K y,\ \lambda\geqslant 0\Rightarrow \lambda x\leqslant_K \lambda y$.

(2) $x\leqslant_K y,\ z\in X\Rightarrow x+z\leqslant_K y+z$.

定义 3.1.3 若 X 是赋范线性空间，$f\in S(X^*)$，$k>0$，令

$$K(f,\ k)=\{x;\ \|x\|\leqslant kf(x)\}.$$

性质 3.1.1 $K(f,\ k)$是 X 中真闭凸锥.

这是容易证明的.

性质 3.1.2 若 $k>1$，则 $\operatorname{int}K(f,\ k)\neq\emptyset$.

证明：由于 $k>1$，故存在 $x_0\in U(X)$，使 $f(x_0)>\dfrac{1}{k}$，所以 $x_0\in K(f,\ k)$.

又 $F(x)=kf(x)-\|x\|$是连续函数，且 $F(x_0)>0$，故存在

$B(x_0, \varepsilon)$,使得当 $y\in B(x_0, \varepsilon)$时,$F(y)>0$, 这表明 $B(x_0, \varepsilon)\subset K(f, k)$,故 $x_0\in \text{int}\, K(f, k)$, 即 $\text{int}\, K(f, k)\neq\emptyset$. □

定义 3.1.4 若 C 是一个凸集, $x_0\in C$, 且 K 是一个凸锥, 称 $K+x_0$ 在 x_0 点支撑 C,若$(K+x_0)\cap C=\{x_0\}$.

性质 3.1.3 如果 K 是一个凸锥, $\text{int}\, K\neq\emptyset$, 且 $K+x_0$ 在 x_0 点支撑凸集 C, 则存在一个超平面$(\{f(x)=c\})$在 x_0 点支撑 C.

证明:应用分离定理,存在 $f\in X^*$,使

$$\sup f(C)\leqslant\inf f(x_0+K).$$

故 $$f(x_0)\leqslant\sup f(C)\leqslant\inf f(x_0+K)\leqslant f(x_0),$$

从而 $f(x_0)=\sup f(C)$. □

(三) Bishop-Phelps 第一定理.

引理 3.1.4 若 C 是 Banach 空间 X 的闭凸集,令 $f\in X^*$, $\sup f(C)<+\infty$, 则对一切 $z\in C$, 存在 $x_z\in C$, 使 $x_z\in z+K(f, k)$,且 $x_z+K(f, k)$在 x_z 点支撑 C.

证明: 令 $x_1=z$, $C_1=C\cap(x_1+K(f, k))$.

选 $x_2\in C_1$,使 $f(x_2)>\sup f(C_1)-1$. 令

$$C_2=C\cap(x_2+K(f, k)),$$

若 $x_1, \cdots, x_n, C_1, \cdots, C_n$ 已经定义好了. 选 x_{n+1} 是 C_n 中的点,使 $f(x_{n+1})>\sup f(C_n)-\dfrac{1}{n}$. 令 $C_{n+1}=C\cap(x_{n+1}+K(f, k))$,以这种方式继续下去,得到 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$,其中每个集是闭凸集.

容易看到, $C_{n+1}\subset C_n$(事实上, $x_{n+1}\in C_n\subset x_n+K(f, k)$, 故 $x_{n+1}+K(f, k)\subset x_n+K(f, k)+K(f, k)\subset x_n+K(f, k)$, 故 $C_{n+1}\subset C_n$).

$\text{diam}\, C_n\to 0$. (事实上,若 $y\in C_{n+1}$, 则 $y\in x_{n+1}+K(f, k)$, 故 $y-x_{n+1}\in K(f, k)$, 从而 $f(y)\leqslant\sup f(C_{n+1})\leqslant\sup f(C_n)$, 故 $\|y-x_{n+1}\|\leqslant kf(y-x_{n+1})\leqslant k(\sup f(C_n)-f(x_{n+1}))<\dfrac{k}{n}$, 故

$\operatorname{diam} C_{n+1} \leqslant \frac{2k}{n}$.)

由于 X 是 Banach 空间，应用闭球套原理，存在 x_z，使

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{x_z\}.$$

从而 $x_z \in C_1 \subset z + K(f, k)$，且 $x_z \in C_n = C \cap (x_n + K(f, k))$，$\forall n$. 故 $x_z + K(f, k) \subset x_n + K(f, k)$，$\forall n$. 因此，

$$(x_z + K(f, k)) \cap C \subset C_n, \ \forall n.$$

所以，$(x_z + K(f, k)) \cap C = \{x_z\}$. □

定理 3.1.5(Bishop-phelps 第一定理) 令 C 是 Banach 空间 X 的有界闭凸子集，则 C 的支撑点在 C 的边界上是范稠的.

证明：令 $z \in \partial C$，任取 $\varepsilon > 0$，选 $y \in (X \setminus C) \cap B\left(z, \frac{\varepsilon}{2}\right)$，则存在 $\delta > 0$，使 $B(y, \delta) \cap C = \emptyset$，由分离定理，存在 $f \in S(X^*)$，使

$$\sup f(C) \leqslant \inf f(B(y, \delta)),$$

故 f 在 C 上是有上界的. 令 $k = 2$，由引理 3.1.4，存在 $x_z \in C$，使 $K(f, 2) + x_z$ 在 x_z 点支撑 C. 由性质 3.1.3 知，x_z 是 C 的支撑点，且因 $x_z - z \in K(f, 2)$，故

$$\|x_z - z\| \leqslant 2f(x_z - z) < 2(f(y) - f(z)) \leqslant 2\|y - z\| \leqslant \varepsilon. \ \square$$

(四)Bishop-Phelps 第二定理.

引理 3.1.6 若 $\varepsilon > 0$，f，$g \in S(X^*)$，且当 $x \in f^{-1}(0) \cap U(X)$ 时，$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$，则或者 $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$，或者 $\|f + g\| \leqslant \varepsilon$.

证明：在 $f^{-1}(0)$ 中令 $h(x) = g(x)$，则 $h \in (f^{-1}(0))^*$，且 $\|h\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. 由 Hahn-Banach 定理，将 h 保范延拓成 X^* 中元 $\bar{h}$，则 $\|\bar{h}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. 从而 $g - \bar{h} \in X^*$，且

$$(g - \bar{h})(x) = 0, \ \forall x \in f^{-1}(0),$$

故 $g - \bar{h} = \alpha f$，从而 $\|g - \bar{h}\| = |\alpha|$. 所以

$$|1 - |\alpha|| = |\|g\| - \|g - \bar{h}\|| \leqslant \|\bar{h}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

当 $\alpha \geqslant 0$ 时，则

$$\|f-g\| = \|(1-\alpha)f-\bar{h}\| \leqslant |1-\alpha| + \|\bar{h}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

当 $\alpha<0$ 时，则

$$\|f+g\| = \|(1+\alpha)f+\bar{h}\| \leqslant |1+\alpha| + \|\bar{h}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \quad \square$$

引理3.1.7 若 $0<\varepsilon<1$, $f, g\in S(X^*)$, $k>1+\frac{2}{\varepsilon}$, 若 g 在 $K(f, k)$ 上是非负的，则 $\|f-g\|\leqslant\varepsilon$.

证明：选 $x\in S(X)$, 使 $f(x)>\frac{1}{k}\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)$, 则若 $y\in U(X)\cap f^{-1}(0)$, 有

$$\left\|x+\frac{2}{\varepsilon}y\right\|\leqslant 1+\frac{2}{\varepsilon}<kf(x)=kf\left(x\pm\frac{2}{\varepsilon}y\right),$$

故 $x\pm\frac{2}{\varepsilon}y\in K(f, k)$, 由假设，$g\left(x\pm\frac{2}{\varepsilon}y\right)\geqslant 0$, 从而

$$\left|g\left(\frac{2}{\varepsilon}y\right)\right|\leqslant g(x)\leqslant\|x\|\leqslant 1,$$

即 $|g(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, 由引理 3.1.6 知，或者 $\|f-g\|\leqslant\varepsilon$, 或者 $\|f+g\|\leqslant\varepsilon$. 下面说明 $\|f+g\|\leqslant\varepsilon$ 不可能发生.

选 $z\in S(X)$, 使 $f(z)>\max\left(\frac{1}{k}, \varepsilon\right)$, 故 $kf(z)>1=\|z\|$, 所以 $z\in K(f, k)$, 由假设，$g(z)\geqslant 0$, 所以

$$\|f+g\|\geqslant(f+g)(z)\geqslant f(z)>\varepsilon.$$

故必有 $\|f-g\|\leqslant\varepsilon$. $\square$

定理3.1.8 (Bishop–Phelps 第二定理) 若 C 是 Banach 空间 X 的一个有界闭凸子集，则 X^* 中在 C 上达到最大值的泛函在 X^* 中是范稠的.

证明：不妨设 $0\in C$(否则，可作平移)，只须证明，若 $f\in S(X^*)$, $\varepsilon>0$, 则存在 $g\in X^*$, $\|g-f\|\leqslant\varepsilon$, 且 g 在 C 上达到它的最大值.

令 $k>1+\frac{2}{\varepsilon}>1$，应用引理 3.1.4 于 C（对 $z=0$），存在 $x_0\in C$，使 $x_0\in K(f,k)$，且 $\{x_0+K(f,k)\}\cap C=\{x_0\}$.

根据性质 3.1.3，存在 $g\in S(X^*)$，使 g 在 x_0 点支撑 C，

$$\sup g(C)=g(x_0)\leqslant\inf g(x_0+K(f,k))$$
$$=g(x_0)+\inf g(K(f,k)),$$

故 $\inf g(K(f,k))\geqslant 0$，由引理 3.1.7，即知 $\|f-g\|\leqslant\varepsilon$. □

推论 3.1.9 每个 Banach 空间是次自反的.

注：赋范空间也可能是次自反的，也可能不是次自反的.

例 1：$\boldsymbol{R}^\infty=\left\{(x_n)_{n=1}^\infty;\right.$ 其中仅有限项 x_n 不为 0，$\left.\|(x_n)\|=\left(\sum\limits_{n=1}^\infty|x_n|^2\right)^{1/2}\right\}$ 它不是完备的，但是次自反的. □

例 2：$P[0,1]=\{[0,1]$ 上多项式 $P(x)$ 全体，$\|P(x)\|=\max\limits_{x\in[0,1]}|P(x)|\}$ 则 $P[0,1]$ 不是完备的，也不是次自反的. □

（五）Bishop–Phelps 定理的一些推广.

Peck 例子表明，Bishop–Phelps 定理不可推广到 Fréchet 空间，但对 (X,w) 及 (X^*,w^*) 情况却有某些结论. 例如，

定理 3.1.10 若 X 是一个 Banach 空间，C 是 X^* 的 w^* 闭有界凸子集，则 C 的 w^* 支撑点是在 C 的范数边界上范稠的，其中 C 的 w^* 支撑点 x_0^* 是指 $x_0^*\in C$，且存在 $x\in X$，使得

$$\sup_{x^*\in C}x^*(x)=x_0^*(x),$$

而 x 称为相应于 x_0^* 的 C 的 w^* 支撑泛函.

证明：见 *Israel J. Math.* 2(1964)177—182.

除了研究泛函达到它的最大值问题之外，还进一步研究算子达到它的范数问题. Lindenstrauss(*Israel J. Math.* (1963) 139—148)研究了这个方面问题. 尔后又进一步提出具 Bishop–Phelps 性质的 Banach 空间问题.

定义 3.1.5 Banach 空间 X 称为具有 Bishop–Phelps 性质(BPP)，如果对任何 Banach 空间 Y，及 X 中任何有界闭均

衡凸子集 A 及 $T\in B(X, Y)$，存在 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}\subset B(X, Y)$，使 $\|T-T_n\|\to 0$，且每个 T_n 在 A 上达到它在 A 上范数的上确界，即存在 $x_n\in A$，使 $\sup\limits_{x\in A}\|T_nx\|=\|T_nx_n\|$。

这方面最重要的结果是 J. Bourgain 证明的：

$$\text{BPP}\Leftrightarrow\text{RNP}$$

(其中 RNP 定义见下面第六章) (*Israel J. Math.* 28(1977)1—8)。

§2 Krein-Milman 定理

(一)在第Ⅰ部分第二章§4 中已经介绍了 Krein-Milman 定理，现证明一个更广泛的命题。

定理3.2.1 令 A 是局部凸空间 X 的一个紧凸集，且 $B\subset A$，则下列等价：

(1) $\overline{\text{co}}(B)=A$。

(2) $\inf\{\varphi(x); x\in B\}=\min\{\varphi(x); x\in A\}$, $\forall\varphi\in X^*$。

(3) $\text{ext}\,A\subset\bar{B}$。

证明：(1)⇒(2)因为

$$\inf\{\varphi(x); x\in B\}=\inf\{\varphi(x); x\in\overline{\text{co}}(B)\},$$

及 A 是紧凸集，即知. □

(2)⇒(1)若 $\overline{\text{co}}(B)\subsetneq A$，利用分离定理，即得矛盾！□

(3)⇒(2) 由第Ⅰ部分定理 2.4.2 有，$A=\overline{\text{co}}(\text{ext}\,A)$，即知. □

(1)⇒(3)只须证明 $\text{ext}(\overline{\text{co}}(B))\subset\bar{B}$，设 V 是 0 点均衡邻域选 0 点均衡凸邻域 W，使 $W+W\subset V$，设 $x\in\text{ext}(\overline{\text{co}}(B))$，由于 B 是全有界的，故存在 $\{x_1, \cdots, x_n\}\subset B$，使 $B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}(x_i+W)$，由于 $K_i\equiv\overline{\text{co}}((x_i+W)\cap B)\subset\overline{\text{co}}(B)=A$，故 K_i 是紧凸集，因此，

$\overline{\mathrm{co}}(B)=\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{i=1}^{n}K_i\right)=\mathrm{co}\left(\bigcup_{i=1}^{n}K_i\right)$. 因此 $x\in K_i$, 对某个 i. 容易看到,存在某个 $v\in V$, 使 $x=x_i+v$, 所以 $x_i=x-v\in(x+V)\cap B$,所以 $x\in\bar{B}$. □

推论 3.2.2 对任何赋范空间 X, $\mathrm{ext}\,U(X^*)$ 分离 X 的点,即若 $x\neq y$,则存在 $x^*\in\mathrm{ext}\,U(X^*)$,使 $x^*(x)\neq x^*(y)$.

证明: 任取 $x\neq 0$, 则由于 $U(X^*)$是 w^* 紧凸集,故

$$U(X^*)=\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\mathrm{ext}\,U(X^*)),$$

又 $\hat{x}$ 是 w^* 连续的,所以,存在 $x_0^*\in\mathrm{ext}\,U(X^*)$,使

$$x_0^*(x)=\max\{x^*(x);\ x^*\in U(X^*)\}=\|x\|\neq 0. \quad □$$

Krein-Milman 定理有一个重要应用, 即求凹规划的解.

定义 3.2.1 若 X 是线性空间,A 是 X 的凸子集, $f: A\to\boldsymbol{R}^1$,若对任何 $x,\ y\in A,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1$,有

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),$$

则 f 叫做 A 上的凸函数, 记 A 上全体凸函数为 $\mathrm{Conv}(A)$, 若 $f: A\to\boldsymbol{R}^1$,使 $-f\in\mathrm{Conv}(A)$,则 f 叫凹函数。

定义 3.2.2 若 A 是线性空间 X 的凸子集,

$$-f\in\mathrm{Conv}(A),$$

求 $\inf(f(A))$,及 $x_0\in A$, 使 $f(x_0)=\inf(f(A))$, 称为一个凹规划问题,记为(A, f), $(x_0,\ f(x_0))$称为凹规划的一个解.

推论 3.2.3 若 X 是实局部凸(Hausdorff)空间, A 是 X 的非空紧凸子集, f 在 A 上是下半连续的凹函数, 则 f 必在 $\mathrm{ext}\,A$ 的一个点达到它的极小值. 即凹规划(A, f)的解必可在 $\mathrm{ext}\,A$ 中找到.

证明: 令 $B=\{x;\ x\in A,\ f(x)=\inf f(A)\}$, 则容易看到 B 是 A 的非空闭凸端子集, 从而 B 是紧集, 由第 I 部分定理 2.4.2 的证明知 $\mathrm{ext}\,B\neq\emptyset$, 由于 B 是 A 的端子集, 故 $\mathrm{ext}\,B\subset\mathrm{ext}\,A$,从而存在 $x_0\in\mathrm{ext}\,A$,使 $f(x_0)=\inf f(A)=\min f(A)$. □

注 1: 相应地,也可考虑凸函数达到极大值问题。

注 2 特别地，推论 3.2.3 可应用于 $f\in X^*$ 情况.

由 Krein-Milman 定理知道，对 Banach 空间 X 的紧凸集 A 有 $A=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}\, A)$. 但是，当 X 是自反 Banach 空间时，由于单位球是 w 紧的，故对任何有界闭凸集 A，有

$$A=\overline{\mathrm{co}}^{w}(\mathrm{ext}\, A)=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}\, A). \tag{3.1}$$

现在问，对一般 Banach 空间，(3.1)是否成立？何时成立？

定义 3.2.3 若 X 是 Banach 空间，如果对任何有界闭凸集 A，有

$$A=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}\, A),$$

则 X 称为具有 Krein-Milman 性质的空间(KMP).

显然，自反空间具 KMP.

下面这个定理是很有用的.

定理 3.2.4 假设 Banach 空间 X 的每个非空有界闭凸集 A 至少有一个端点，则 X 具 KMP.

证明：令 A 是非空有界闭凸集，由假设 $\mathrm{ext}\, A\neq\emptyset$.

令 $B=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}\, A)$，若 $B\subsetneqq A$，则由 Bishop-Phelps 定理，存在 $f\in X^*$，使

$$f(B)<\max\{f(a);\, a\in A\}=f(a_0)，对某个\ a_0\in A.$$

令 $F=\{a\in A;\, f(a)=f(a_0)\}$，则 F 是 A 的端子集，且 F 是有界闭凸集，由假设 $\mathrm{ext}\, F\neq\emptyset$，但 $\mathrm{ext}\, F\subset\mathrm{ext}\, A$，故

$$\max f(B)=f(a_0),$$

矛盾！□

J. Lidenstrauss(*Israel J. Math.* 4 (1966)260—262) 证明 l_1 具 KMP.

C. Bessaga & A. Pelczynski(*Israel J. Math.* 4 (1966) 262—264)证明若 X^* 是可分的，则 X^* 具 KMP.

实际上，现已证明 RNP(定义见第六章)⇒KMP(证明见第六章)，并且当 X 是共轭空间时（即存在 Banach 空间 Y，使 $X\cong Y^*$)，则 X 具 RNP⇔X 具 KMP(证明见第六章).

但是，对一般的 Banach 空间，KMP$\Leftrightarrow$RNP，仍属大家关注的尚未解决的问题.

(二)最佳逼近问题.

令 $P_n[a, b]=\{f;\ f$ 是 $[a, b]$ 上次数不超过 n 的多项式函数$\}$，则 $P_n[a, b]\subset C[a, b]=\{f; f$ 是 $[a, b]$ 上连续函数，$\|f\|_\infty=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\}$.

在古典分析中，曾考虑如下问题：将 $P_n[a, b]$ 看作 $C[a, b]$ 的闭子空间，对任何 $f\in C[a, b]\setminus P_n[a, b]$，$f$ 可以用 $P_n[a, b]$ 的元逼近到什么程度？即决定数 $d(f, P_n[a,b])\equiv\inf\{\|f-g\|_\infty; g\in P_n[a, b]\}$. 这一问题导致如下的一般考虑.

设 X 是实赋范空间，M 是 X 的闭子空间，对任何 $f_0\in X\setminus M$，求数 $d(f_0, M)\equiv\inf\{\|f_0-g\|; g\in M\}$.

这一问题与 X^* 中的子集的端点问题有密切关系.

性质3.2.5 若 X 是实赋范空间，M 是 X 的闭子空间，$x_0\in X\setminus M$，则

$$\begin{aligned}d(x_0, M)&=\max\{\varphi(x_0); \varphi\in U(M^0)\}\\&=\sup\{\varphi(x_0); \varphi\in \mathrm{ext}U(M^0)\}.\end{aligned}$$

证明：任取 $\varphi\in U(M^0)$，则对任何 $y\in M$，有

$$|\varphi(x_0)|=|\varphi(x_0-y)|\leqslant\|\varphi\|\cdot\|x_0-y\|\leqslant\|x_0-y\|,$$

故
$$\sup\{\varphi(x_0); \varphi\in U(M^0)\}\leqslant\|x_0-y\|,\ \forall y\in M,$$

从而

$$\sup\{\varphi(x_0); \varphi\in U(M^0)\}\leqslant d(x_0, M). \tag{3.2}$$

由于 $\mathrm{int}\,U(x_0, d(x_0, M))\cap M=\emptyset$，$(U(x_0, d(x_0, M))=\{y; \|x_0-y\|\leqslant d(x_0, M)\})$，由分离定理，存在 $\psi\in S(M^0)$，使 $\psi(x_0+x)\geqslant 0$，对 $x\in U(0, d(x_0, M))$. 从而

$$-\psi(x_0)\leqslant\inf\{\psi(x); x\in U(0, d(x_0, M))\}=-d(x_0, M),$$

故 $\psi(x_0)\geqslant d(x_0, M)$，从而

$$\sup\{\psi(x_0); \psi\in S(M^0)\}\geqslant d(x_0, M). \tag{3.3}$$

因 M^0 是 X^* 的 w^* 闭子空间，故 $U(M^0)$ 是 w^* 紧凸集，故

$$U(M^0)=\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\mathrm{ext}\,U(M^0)),$$

又 $\hat{x}_0$ 是 w^* 连续的线性泛函，故由(3.2)、(3.3)知

$$d(x_0, M)=\max\{\varphi(x_0);\ \varphi\in U(M^0)\}$$
$$=\sup\{\varphi(x_0);\ \varphi\in \mathrm{ext}U(M^0)\}. \quad \square$$

从性质 3.2.5 看到，最佳逼近问题与 $\mathrm{ext}\,U(M^0)$ 有密切关系．下面给出 $\mathrm{ext}\,U(M^0)$ 中元的某些特征．

我们先就更一般的实局部凸线性拓扑空间进行讨论，得到 Buch-Phelps 定理，而赋范空间情况，作为一个推论．

设 X 是实局部凸空间，ρ 是 X 上的连续半范．对任何 $\varphi\in U_\rho^0\equiv\{\varphi;\ \varphi\in X^*,\ |\varphi(x)|\leqslant 1$，当 $x\in X$，且 $\rho(x)\leqslant 1$ 时$\}$，定义

$$A_\varphi=\{x\in X;\ \rho(x)-\varphi(x)\leqslant 1\}.$$

容易看到 A_φ 是 X 中无界的凸的 0 点邻域．(事实上，A_φ 为凸集是显然的．又因 φ, ρ 连续，故

$$A_\varphi\supset\{x\in X;\ \rho(x)-\varphi(x)<1\}$$

是 0 点邻域．关于无界性讨论如下：

(1) ρ 为连续半范时，若 $\rho^{-1}(0)\subset\varphi^{-1}(0)$，显然 A_φ 为无界，否则存在 x_0，使 $\rho(x_0)=0$，但 $\varphi(x_0)>0$，从而 $\{\alpha x_0,\ \alpha\geqslant 0\}\subset A_\varphi$，故 A_φ 也是无界的，总之 A_φ 是无界的．

(2) ρ 为范数时，当 $\|\varphi\|<1$ 时，A_φ 是有界的．事实上，否则存在 $\|x_n\|=n$，使 $x_n\in A_\varphi$，则

$$\left\|\frac{x_n}{n}\right\|-\varphi\left(\frac{x_n}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n},$$

但 $\left\|\frac{x_n}{n}\right\|=1$，故

$$1-\frac{1}{n}\leqslant\varphi\left(\frac{x_n}{n}\right)\leqslant\|\varphi\|<1,\ \forall n,$$

矛盾！故 A_φ 是有界的．

但当 $\|\varphi\|=1$ 时，A_φ 是无界的．事实上，选 $\|x_n\|=1$，使

$$\varphi(x_n)>1-\frac{1}{n},$$

则 $$\|nx_n\|-\varphi(nx_n)=n-n\varphi(x_n)=n(1-\varphi(x_n))\leqslant 1,$$

故 $nx_n\in A_\varphi$，但 $\|nx_n\|=n\to+\infty$，故 A_φ 是无界的.)(故参考书[4]p. 78 有误.)

引理 3.2.6 $\varphi\in\text{ext}(U_\rho^0)\Leftrightarrow A_\varphi-A_\varphi$ 在 X 中稠.

证明: 首先注意到凸集在 X 中不稠的充要条件是存在 $f\in X^*$，使 f 在这个凸集上是上有界的.

若 $\varphi\notin\text{ext}\,U_\rho^0$，则存在 $\psi\in X^*\setminus\{0\}$，使 $\varphi\pm\psi\in U_\rho^0$. 故 $|\langle x, \varphi\pm\psi\rangle|\leqslant\rho(x)$，特别地，$\psi(x)\leqslant\rho(x)-\varphi(x)$，故 ψ 在 A_φ 上是以 1 为上界，从而 ψ 在 $A_\varphi-A_\varphi$ 上是以 2 为上界，故 $A_\varphi-A_\varphi$ 在 X 中不稠.

反之，若 $A_\varphi-A_\varphi$ 在 X 中不稠，则存在 $\psi\in X^*\setminus\{0\}$，使 ψ 在 $A_\varphi-A_\varphi$ 上是上有界的. 不妨设 $\psi(A_\varphi-A_\varphi)\leqslant 1$.

由于 $A_\varphi\subset A_\varphi-A_\varphi$，$-A_\varphi\subset A_\varphi-A_\varphi$，故

$$\sup\{|\psi(x)|;\, x\in A_\varphi\}\leqslant 1.$$

下面证明 $\varphi\pm\psi\in U_\rho^0$，从而 $\varphi\notin\text{ext}\,U_\rho^0$，

选 $x\in U_\rho$，令 $\alpha=\rho(x)-\varphi(x)$，则 $\alpha\geqslant 0$，

(1) $\alpha=0$，则 $tx\in A_\varphi$，$\forall t>0$. 故 $|\psi(x)|\leqslant\frac{1}{t}$，$\forall t>0$，从而 $\psi(x)=0$，所以 $\langle x, \varphi\pm\psi\rangle=\varphi(x)=\rho(x)\leqslant 1$.

(2) $\alpha>0$，则 $\rho\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\frac{\alpha}{\alpha}=1$. 故 $\frac{x}{\alpha}\in A_\varphi$，从而 $\left|\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right|\leqslant 1$，因此，

$$|\psi(x)|\leqslant\alpha=\rho(x)-\varphi(x);$$

故 $$\langle x, \varphi\pm\psi\rangle\leqslant\rho(x)\leqslant 1.$$

总之，$\varphi\pm\psi\in U_\rho^0$. □

定理 3.2.7(Buch-Phelps) 令 ρ 是实局部凸空间 X 上的连续半范，令 M 是 X 的线性子空间，若 $\varphi\in M^0\cap U_\rho^0$，则

$$\varphi\in\text{ext}(M^0\cap U_\rho^0)\Leftrightarrow X=M+A_\varphi-A_\varphi.$$

证明：令 $\sigma(x)\equiv d(x, M)\equiv\inf\{\rho(x-y); y\in M\}$. 容易看到 σ 是连续半范.

容易验证 $\{x; \sigma(x)<1\}\subset M+U_\rho\subset U_\sigma$，故

$$U_\sigma^0=M^0\cap U_\rho^0. \tag{3.4}$$

事实上，由于 $M\subset M+U_\rho\subset U_\sigma$，$U_\rho\subset M+U_\rho\subset U_\sigma$，故 $U_\sigma^0\subset M^0\cap U_\rho^0$. 反之，若 $\varphi\in M^0\cap U_\rho^0$，当 x_0 使 $\sigma(x_0)<1$ 时，则由 $\{x, \sigma(x)<1\}\subset M+U_\rho$，知 $x_0=y+z$，其中 $y\in M$，$z\in U_\rho$，故 $\varphi(x_0)=\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi(z)\leqslant 1$；当 x_0 使 $\sigma(x_0)=1$ 时，则

$$\varphi\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)x_0\right)<1.$$

由上证明知 $\varphi\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)x_0\right)\leqslant 1$，$\forall n$. 令 $n\to+\infty$ 即知 $\varphi(x_0)\leqslant 1$，从而 $\varphi\in U_\sigma^0$，故 $M^0\cap U_\rho^0\subset U_\sigma^0$. 所以，(3.4)成立.

令 $B_\varphi=\{x\in X; \sigma(x)-\varphi(x)\leqslant 1\}$，对每个 $\varphi\in U_\sigma^0$. 由引理 3.2.6 知，$\varphi\in\operatorname{ext}U_\sigma^0\Leftrightarrow B_\varphi-B_\varphi$ 在 X 中稠. 由 (3.4) 知 $\varphi\in\operatorname{ext}(M^0\cap U_\rho^0)\Leftrightarrow B_\varphi-B_\varphi$ 在 X 中稠. 下面证明 $M+A_\varphi-A_\varphi$ 在 $B_\varphi-B_\varphi$ 中稠.

事实上，由于 $\sigma(x+y)\leqslant\rho(x)$，$\forall y\in M$. 故 $M+A_\varphi\subset B_\varphi$，又 $A_\varphi\subset M+A_\varphi\subset B_\varphi$，故 $M+A_\varphi-A_\varphi\subset B_\varphi-B_\varphi$. 任选 $x\in B_\varphi$，令 $u_n=\frac{n-1}{n}x$，$n=1, 2, \cdots$，则 $\sigma(u_n)-\varphi(u_n)<1$. 故存在 $y_n\in M$，使 $\rho(u_n+y_n)<1+\varphi(u_n)=1+\varphi(u_n+y_n)$，因为 $\varphi\in U_\sigma^0=M^0\cap U_\rho^0\subset U_\rho^0$，故 $u_n+y_n\in A_\varphi$，类似地对 $z\in B_\varphi$，有 $v_n=\frac{n-1}{n}z$，$y_n'\in M$，使 $v_n+y_n'\in A_\varphi$，故 $u_n+y_n-(v_n+y_n')\in A_\varphi-A_\varphi$，从而 $u_n-v_n\in A_\varphi-A_\varphi+M$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=x-z$，故 $A_\varphi-A_\varphi+M$ 在 $B_\varphi-B_\varphi$ 中稠.

由上面知，$\varphi\in\operatorname{ext}(M^0\cap U_\rho^0)\Leftrightarrow M+A_\varphi-A_\varphi$ 在 X 中稠. 但 $M+A_\varphi-A_\varphi$ 在 X 中稠 $\Leftrightarrow X=M+A_\varphi-A_\varphi$，事实上，因 A_φ 是 0 点邻域，$A_\varphi\subset M+A_\varphi-A_\varphi$，故 $M+A_\varphi-A_\varphi$ 是实心凸集，若存在

$x\in X\setminus(M+A_\varphi-A_\varphi)$，由分离定理，这与 $M+A_\varphi-A_\varphi$ 在 X 中稠矛盾！从而证得定理结论．□

	Banach 空间 X	ext$U(X)$
数列空间	$l_\infty(\omega_0)=m=\{(x_n)_{n=1}^\infty;\ x_n\in \boldsymbol{R}^1,$ $\Vert x\Vert_\infty=\sup\limits_n\vert x_n\vert<+\infty\}$	$x=(x_i)$，其中 $x_i=\pm 1$
	$c=c(\omega_0)=\{(x_n)_{n=1}^\infty;\ x_n\in \boldsymbol{R}^1,$ $\lim\limits_n x_n=a,\ \Vert x\Vert_\infty=\sup\limits_n\vert x_n\vert<+\infty\}$	$x=(x_n)$，其中 $x_i=\pm1$，且从某项开始为 $+1$，或从某项开始为 -1
	$c_0=c_0(\omega_0)=\{(x_n)_{n=1}^\infty;\ x_n\in \boldsymbol{R}^1,$ $\lim\limits_n x_n=0,\ \Vert x\Vert_\infty=\sup\limits_n\vert x_n\vert<+\infty\}$	无端点
	$l_1=l_1(\omega_0)=\{(x_n)_{n=1}^\infty;\ x_n\in \boldsymbol{R}^1,$ $\Vert x\Vert_1=(\sum\limits_{n=1}^\infty\vert x_n\vert<+\infty)\}$	$\pm e_i$，其中 $e_i=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0\cdots)$，（第 i 项为 1）
	$l_p=l_p(\omega_0)=\{(x_n)_{n=1}^\infty;\ x_n\in \boldsymbol{R}^1,$ $\Vert x\Vert_p=(\sum\limits_{n=1}^\infty\vert x_n\vert p)^{1/p}<+\infty\}(1<p<+\infty)$	$S(X)$
函数空间	Ω 为紧 Hausdorff 拓扑空间 $C(\Omega)=\{f;f$ 是 Ω 上实值连续函数 $\Vert f\Vert_\infty=\max\limits_{\omega\in\Omega}\vert f(\omega)\vert\}$	$f^2=1$
	Ω 为紧 Hausdorff 拓扑空间 $C(\Omega)^*$	符号点测度，即 $F\in C(\Omega)^*$，使得存在 $x\in\Omega$，使 $F(f)=f(x)$，或 $F(f)=-f(x)$，$\forall f\in C(\Omega)$
	$L_1[0,\ 1]=\{f;f$ 是 $[0,\ 1]$ 上实值 Lebegue 可积函数 $\Vert f\Vert_1=\int_0^1\vert f(x)\vert dx<+\infty\}$	无端点
	$L_\infty[0,\ 1]=\{f;f$ 是 $[0,\ 1]$ 上实值本性有界函数，$\Vert f\Vert_\infty=\text{varimax}\ \vert f(x)\vert<+\infty\}$	$f^2=1$ a. e
	$L_p[0,\ 1]=\{f;f$ 是 $[0,\ 1]$ 上实值 Lebesgue 可积函数 $1<p<+\infty$ $\Vert f\Vert_p=\left(\int_0^1\vert f(x)\vert^p dx\right)^{1/p}<+\infty\}$	$S(X)$

推论 3.2.8 若 X 是实局部凸空间，ρ 是 X 上连续半范，M 是 X 的线性子空间，$\varphi\in M^0\cap U_\rho^0$，则

$$\varphi\in \mathrm{ext}\,U(M^0\cap U_\rho^0)\Leftrightarrow \text{对每个正整数 } n,\ X=M+\frac{1}{n}A_\varphi-\frac{1}{n}A_\varphi$$

证明："$\Leftarrow$"取 $n=1$，由定理 3.2.7 即知.

"$\Rightarrow$"由定理 3.2.7 知

$$X=M+A_\varphi-A_\varphi, \tag{3.5}$$

对任何 $x\in X$，考虑 nx，应用公式(3.5)，即得所要结论. □

推论 3.2.9 若 X 是赋范线性空间，M 是 X 的线性子空间，$\varphi\in U(M^0)$，则

$$\varphi\in \mathrm{ext}\,U(M^0)\Leftrightarrow X=M+A_\varphi-A_\varphi.$$

(三)具体空间的单位球的端点.

由 Krcin-Milman 定理知，端点起着重要作用，故找出具体空间单位球的端点是有益的. p. 170列表说明，证明留给读者.

注：若 X 是 Banach 空间，则 $U(X^*)$是 w* 紧凸集，从而

$$U(X^*)=\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\mathrm{ext}\,U(X^*)).$$

由于 $L_1[0,1]$与 c_0 的单位球没有端点，故 $L_1[0,1]$和 c_0 都不是共轭空间，并且也不线性同胚于一个共轭空间(因为 w* 紧性在线性同胚下不变)。并且，因此我们看到，它们也不具 KMP.

§3 Choquet 定理

Krein-Milman 定理告诉我们，若 A 是局部凸空间的紧凸集，则 A 的任何元可以用 A 的端点的凸包中的元近似表示出来. 在有限维空间中，更有下列 Minkowski 定理. Minkowski 定理也为我们提供了一种用测度论方法将紧凸集的元表示出来的想法，这就是 Choquet 定理.

(一)有限维情况 Minkowski 定理.

定理 3.3.1(Minkowski) 设 X 是 n 维(Banach)空间，K

是 X 中的紧凸集，则对任何 $x\in K$，必存在 $x_i\in \text{ext}\,K$，$\alpha_i\geqslant 0$，$i=1, \cdots, m$，$m\leqslant n+1$，$\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i=1$，使

$$x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i.$$

证明：由 Krein-Milman 定理 $\text{ext}\,K\neq\emptyset$.

用归纳法，当 $n=1$ 时，显然成立.

设当 $k<n$ 时定理成立，考虑 n 维空间情况. 任取 $p\in K$，任取 $a\in \text{ext}\,K$. 过 p、a 两点作直线 L，由于 K 是紧凸集，故 $K\cap L$ 是有界闭线段 $[a, b]$，显然，b 是 K 的边界点. 由分离定理，存在超平面 H，在 b 点支撑 K. 则 $H\cap K$ 是 $n-1$ 维空间中紧凸集，且 $\text{ext}(H\cap K)\subset \text{ext}\,K$，由归纳假设，$b$ 是至多 n 个端点的凸组合，从而 $p\in[a, b]$ 是至多 $n+1$ 个端点的凸组合. □

在几何上，Minkowski 定理就是由 n 维空间中的有界闭凸多边形中每个点都是不超过 $n+1$ 个顶点的凸组合推广而来的.

Minkowski 定理有具体的物理意义，即 $\triangle ABC$ 中任何一点 x，总可以在三个顶点 A、B、C 找到一个质量分布，使 $\triangle ABC$ 的重心恰好在 x 点.

下面我们用概率测度的术语来描述 Minkowski 定理. 对任 $y\in K$，定义 μ_y 为集中在 y 点的一个概率测度，即

$$\mu_y(G)=\begin{cases}1 & \text{当 } y\in G \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } y\notin G \text{ 时},\end{cases}\quad \text{对 } K \text{ 的任何 Borel 子集 } G.$$

Minkowski 定理告诉我们，对任何 $x\in K$，必存在 $x_i\in \text{ext}\,K$，$i=1, \cdots, n+1$，使 $x=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i$，其中 $\alpha_i\geqslant 0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1$. 故若令 $\mu_x=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\lambda_i\mu_{x_i}$，则得到 K 上一个定义在 K 的 Borel 集上的概率测度 μ_x，使

$$\mu_x(K)=1, \text{且 } x^*(x)=\int_K x^*(y)\,d\mu_x,\ \forall x^*\in X^*.$$

Choquet 定理就是将这种想法推广到无限维情况.

(二) 无限维情况: Choquet 定理.

Choquet 定理指出, 对紧凸集 K 中任何点 x, 均存在相应的集中在 $\text{ext}\,K$ 上的概率测度 μ_x, 使

$$x^*(x)=\int_K x^*(y)d\mu_x, \ \forall x^*\in X^*.$$

此时也称 x 点可以由 μ_x 积分表示.

定理 3.3.2(Choquet) 设 X 是实局部凸准赋范空间, K 是 X 中紧凸集, 则对每个 $x_0\in K$, 必存在集中在 $\text{ext}\,K$ 上的一个概率测度 μ_{x_0}, 使 x_0 可以由 μ_{x_0} 积分表示, 即

$$\mu_{x_0}(K)=\mu_{x_0}(\text{ext}\,K)=1,$$

且
$$x^*(x_0)=\int_K x^*(x)d\mu_{x_0}, \ \forall x^*\in X^*.$$

为了证明这个定理先作若干准备.

命题 3.3.3 $\text{ext}\,K$ 是可测集(实际上是 G_δ 集).

证明: 因为 K 是紧集, 故 K 是 Borel 集, 令

$$F_n=\left\{x\in K;\ \exists y,\ z\in K, \text{使 } x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z,\ \text{且} \|y-z\|\geqslant\frac{1}{n}\right\},$$
$$n=1,\ 2,\ \cdots.$$

容易看到, F_n 是 K 中闭集, 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=K\setminus\text{ext}\,K$. □

下面给出几个记号: $C(K)$ 表示 K 上连续函数全体.

令 $A(K)=\{f; f(x)=x^*(x)+r,\ x^*\in X^*,\ r\in \mathbf{R}^1\}$.

对每个 $f\in C(K)$, 定义 $\hat{f}$:

$$\hat{f}(x)=\inf\{g(x);\ g(\cdot)\in A(K),\ g(\cdot)\geqslant f(\cdot)\}.$$

命题 3.3.4 $\hat{f}$ 具有如下性质:

(1) $\hat{f}$ 是有界、上半连续(从而是 Borel 可测)凹函数.

(2) $\hat{f}\geqslant f$.

(3) $f_1\leqslant f_2\Rightarrow \hat{f}_1\leqslant\hat{f}_2$.

(4) $|\hat{f}|\leqslant\|f\|$, 其中 $|\hat{f}|(x)=|\hat{f}(x)|$, $\|f\|=\max_{x\in K}|f(x)|$.

(5) $\widehat{f_1+f_2}\leqslant\hat{f}_1+\hat{f}_2$.

(6) $\lambda\geqslant0$, $\lambda\hat{f}=\widehat{\lambda f}$.

证明留给读者.

又对每个 $x\in K$,定义 $P_x: C(K)\to\boldsymbol{R}^1$,

$$P_x(f)=\hat{f}(x),\ \forall f\in C(K),$$

则 $P_x(f)$是 $C(K)$上连续的次可加正齐性泛函.

命题3.3.5 存在 K 上严格凸连续函数 $h(x)$,使

$$B_h(K)\equiv\{x\in K; h(x)=\hat{h}(x)\}\subset\operatorname{ext}K.$$

(其中 h 的严格凸性定义为,当 $x\neq y$, $0<\alpha<1$ 时有

$$h(\alpha x+(1-\alpha)y)<\alpha h(x)+(1-\alpha)h(y)).$$

证明:由于 K 是紧度量空间,故 $C(K)$是可分的. 所以 $C(K)$的子空间 $A(K)$也是可分的. 因此存在可数个 $A(K)$中函数(仿射函数)$\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$,满足 $\|g_n\|_\infty=\max\limits_{x\in K}|g_n(x)|=1$,且 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分离 K 中点.

令 $h(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}g_n^2(x)$,利用 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分离 K 中点这一性质,容易证明 $h(x)$是 K 上严格凸连续函数.

考虑 $\hat{h}(x)$,若 $x\notin\operatorname{ext}K$,则 $x=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z$,对某两个 $y,z\in K$. 从而,再由 $\hat{h}$ 是凹函数知,

$$h(x)<\frac{1}{2}h(y)+\frac{1}{2}h(z)\leqslant\frac{1}{2}\hat{h}(y)+\frac{1}{2}\hat{h}(z)\leqslant\hat{h}(x),$$

故 $h(x)\neq\hat{h}(x)$,从而 $x\notin B_h(K)$,即 $B_h(K)\subset\operatorname{ext}K$. □

定理2.3.2的证明:在 $C(K)$的子空间 $A(K)+\operatorname{span}\{h\}$ 上定义线性泛函 f_{x_0}:

$$f_{x_0}(g+\lambda h)=P_{x_0}(g)+\lambda P_{x_0}(h),\ \forall\lambda,\ g\in A(K).$$

容易看到,$f_{x_0}(\alpha g+\beta h)\leqslant P_{x_0}(\alpha g+\beta h)$, $\forall\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{R}^1$.

由于 $P_{x_0}(\cdot)$是 $C(K)$上连续次可加正齐性泛函,根据 Hahn-Banach 定理,存在 $F_{x_0}\in C(K)^*$,使当 $R\in A(K)+\operatorname{span}\{h\}$ 时

$$F_{x_0}(R)=f_{x_0}(R),$$

且对一切 $u\in C(K)$,

$$F_{x_0}(u)\leqslant P_{x_0}(u)=\hat{u}(x_0).$$

F_{x_0} 是正泛函. 事实上, 若 $u\in A(K)$, 且 $u\geqslant 0$, 则 $-u\leqslant 0$, 从而 $-\hat{u}(x_0)\leqslant 0$, 故

$$-F_{x_0}(u)=F_{x_0}(-u)\leqslant -\hat{u}(x_0)\leqslant 0,$$

从而 $F_{x_0}(u)\geqslant 0$, 即 F_{x_0} 是正泛函.

由 Reisz 表示定理, 存在 K 的 Borel 集组成的 σ 代数 Σ 上的一个正测度 μ_{x_0}, 使

$$\int_K u(x)d\mu_{x_0}=F_{x_0}(u),\ \forall u\in C(K),$$

特别地, 当 $x^*\in X^*$ 时,

$$\int_K x^*(x)d\mu_{x_0}=F_{x_0}(x^*)=f_{x_0}(x^*)=x^*(x_0).$$

又当 $u=I$ (恒等于 1 的函数)时,

$$\mu_{x_0}(K)=\int_K I(x)d\mu_{x_0}=F_{x_0}(I)=f_{x_0}(I)=I(x_0)=1.$$

但是,

$$\begin{aligned}\int_K(\hat{h}-h)(x)\,d\mu_{x_0}&=\int_{B_h(K)}(\hat{h}(x)-h(x))\,d\mu_{x_0}\\&\quad+\int_{K\setminus B_h(K)}(\hat{h}(x)-h(x))d\mu_{x_0}\\&=\int_{K\setminus B_h(K)}(\hat{h}(x)-h(x))d\mu_{x_0}\geqslant 0.\end{aligned}\tag{3.6}$$

另一方面,

$$\int_K h(x)d\mu_{x_0}=F_{x_0}(h)=f_{x_0}(h)=P_{x_0}(h)=\hat{h}(x_0),$$

而

$$\int_K\hat{h}(x)d\mu_{x_0}\leqslant\hat{h}(x_0).$$

(事实上, 选 $g\in A(K)$, 使 $h\leqslant g$, $g(x_0)<\hat{h}(x_0)+\varepsilon$, 则 $\hat{h}\leqslant g$, 故 $\int_K\hat{h}(x)\,d\mu_{x_0}\leqslant\int_K g(x)d\mu_{x_0}=f_{x_0}(g)=g(x_0)<\hat{h}(x_0)+\varepsilon$, 由 ε 任意

性，即知$\int_h \hat{h}(x)d\mu_{x_0} \leqslant \hat{h}(x_0)$.）故又有$\int_K (\hat{h}(x)-h(x))\,d\mu_{x_0} \leqslant 0$，结合(3.6)，有

$$\int_K (\hat{h}-h)(x)d\mu_{x_0}=0,$$

从而$\mu_{x_0}(K\backslash B_h(K))=0$，由命题3.3.5知，$K\backslash \mathrm{ext}\,K \subset K\backslash B_h(K)$，故$\mu_{x_0}(K\backslash \mathrm{ext}\,K)=0$，即$\mu_{x_0}(\mathrm{ext}\,K)=\mu_{x_0}(K)=1$. 因此$\mu_{x_0}$即所求的. □

注：G. A. Edgar考虑当X是具RNP的Banach空间时，C是X的可分有界闭凸集，也得到相应的端点积分表示定理（见参考书[1]p.248）.

下面列举一个在应用时更为方便的Choquet定理推广形式，即Bishop-de Leeuw定理.

定理3.3.6(Bishop-de Leeuw)　假设K是局部凸空间的一个紧凸集，Σ表示由$\mathrm{ext}\,K$及K的Baire集生成的σ环，则对每个$x_0 \in K$，存在Σ上一个概率测度μ_{x_0}，使

$$\mu_{x_0}(K)=\mu_{x_0}(\mathrm{ext}\,K)=1,$$

且
$$x^*(x_0)=\int_K x^*(x)d\mu_{x_0},\ \forall x^* \in X^*.$$

证明可参见R. Phelps Lectures on Choquet's theorem p.30(D. Van Nostrand Company, INC 1966).

注：由这个定理特别推出，若X是Banach空间，则对每个$x_0^* \in U(X^*)$，存在Σ上一个概率测度$\mu_{x_0^*}$（其中Σ表示$\mathrm{ext}\,U(X^*)$和$(U(X^*),\ w^*)$的Baire子集生成的σ环），使

$$\mu_{x_0^*}\ (U(X^*)=\mu_{x_0^*}\ (\mathrm{ext}\,U(X^*))=1,$$

且
$$x_0^*(x)=\int_{U(X^*)} \hat{x}(x^*)d\mu_{x_0^*}\ ,\ \forall x \in X.$$

下面给出Choquet(推广)定理的一个有趣的应用.

定理3.3.7(Rainwater)　令E是赋范线性空间，设$\{x_n\} \subset X$，$x \in X$，则

$$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow x^*(x_n) \to x^*(x),\ \forall x^* \in \mathrm{ext}U(X^*).$$

证明. 只须证充分性. 设$\|x_n\| \leqslant M$.

$(U(X^*), w^*)$是紧凸集. 考虑$(U(X^*), w^*)$上全体连续函数, 赋以范数$\|f\|_\infty = \max\limits_{x^* \in U(X^*)} |f(x^*)|$, 记为$C(U(X^*))$. 显然$C(U(X^*))$是 Banach 空间.

令Q: $X \to C(U(X^*))$, $(Qx)(x^*) = x^*(x)$, $\forall x^* \in U(X^*)$, 则Q是一个(内)等距同构.

任给$x_0^* \in U(X^*)$, 由定理 3.3.6 知, 存在Σ上一个概率测度μ, 使$\mu(U(X^*)) = \mu(\mathrm{ext}U(X^*)) = 1$, 且

$$x_0^*(x) = \int_{U(X^*)} Q(x)(x^*) d\mu,\ \forall x \in X,$$

其中Σ表示由$\mathrm{ext}U(X^*)$及$(U(X^*), w^*)$的 Baire 集生成的σ环.

由于$\mu(U(X^*) \backslash \mathrm{ext}U(X^*)) = 0$, 及假设$x^*(x_n) \to x^*(x)$, $\forall x^* \in \mathrm{ext}U(X^*)$, 我们有

$$Qx_n \xrightarrow[\mu(a、e)]{} Q(x).$$

又$|(Qx_n)(x^*)| \leqslant \|Qx_n\| = \|x_n\| \leqslant M$, $\forall x^* \in U(X^*)$, 应用 Lebesgue 有界收敛定理, 得到

$$x_0^*(x) = \int_{U(X^*)} (Qx)(x^*) d\mu = \lim_n \int_{U(X^*)} (Qx_n)(x^*) d\mu$$
$$= \lim x_0^*(x_n),$$

由于x_0^*是$U(X^*)$中任意元, 这表明

$$x_n \xrightarrow{w} x. \quad \square$$

第四章　自反的 Banach 空间

Banach 空间的自反性是一个古老的研究课题．至今，自反 Banach 空间是我们了解的比较清楚的 Banach 空间之一．有人称之为研究 Banach 空间中具有各种性质的空间的一个模型．由它的启示可以得到具有其他性质的空间的许多结果．

§1　关于商空间的几个定理

定理4.1.1　设 M 是线性赋范空间 X 的闭子空间，则

(1) $(X/M)^*\cong M^*$.

(2) $M^*\cong X^*/M^0$.

(3) $M^{**}\cong\overline{J_X(M)}^{w^*}$.

($\cong$表示等距同构．)

证明：(1) 令 Q_M: $X\to X/M$ 是商映像．则$\|Q_M\|=1$．(事实上，显然，$\|Q_M(x)\|\leqslant\|x\|$，故$\|Q_M\|\leqslant 1$，反之，任选 $x\notin M$，由 Hahn-Banach 定理，存在 $x^*\in S(X^*)$，使 $x^*(M)=0$，$x^*(x)\neq 0$．再选 $x_\varepsilon\in S(X)$，使 $x^*(x_\varepsilon)=1-\varepsilon$，对任 $\varepsilon>0$．则$\|x_\varepsilon-y\|\geqslant x^*(x_\varepsilon)-x^*(y)=1-\varepsilon$，$\forall y\in M$，故$\|Q_Mx_\varepsilon\|\geqslant 1-\varepsilon$．从而$\|Q_M\|\geqslant 1$，故$\|Q_M\|=1$.)并且 Q_M 是满映像，故 Q_M^*: $(X/M)^*\to X^*$ 是1—1 的，且$\|Q_M^*\|=\|Q_M\|=1$.

Q_M^* 的值域 $R(Q_M^*)$等于 M^0．事实上，任取 $f\in(X/M)^*$，则对任何 $m\in M$，$(Q_M^*f)(m)=f(Q_M(m))=f(Q_M(0))=f(0)=0$．反之，$f\in M^0$，令 $\hat{f}(Q_M(x))=f(x)$，则容易看到，$\hat{f}\in(X/M)^*$，且$(Q_M^*\hat{f})(x)=\hat{f}(Q_M(x))=f(x)$，对一切 $x\in X$．故 $Q_M^*\hat{f}=f$，从而 $R(Q_M^*)=M^0$.

任取 $f\in(X/M)^*$,则对一切 $m\in M$, $x\in X$,

$$|f(Q_Mx)|=|(Q_M^*f)(x)|=|(Q_M^*f)(x-m)|$$
$$\leqslant\|Q_M^*f\|\cdot\|x-m\|,$$

从而 $|f(Q_Mx)|\leqslant\|Q_M^*f\|\cdot\|Q_Mx\|$,所以

$$\|f\|=\sup\left\{\frac{f(Q_Mx)}{\|Q_Mx\|};x\notin M\right\}\leqslant\|Q_M^*f\|\leqslant\|f\|.$$

故 $\|f\|=\|Q_M^*f\|$, $\forall f\in(X/M)^*$, 这样 Q_M^* 就建立了 $(X/M)^*$ 与 M^0 之间的等距同构. □

(2) 令 I_M: $M\to X$, 是恒等映像, 则 I_M^*: $X^*\to M^*$, 亦即 $I_M^*(f)=f|_M$, $\forall f\in X^*$, 且 $\|I_M\|=\|I_M^*\|\leqslant 1$.

$\hat{I}_M^*$: $X^*/\ker(I_M^*)\to M^*$ 是代数同构. 且 $\|\hat{I}_M^*\|=\|I_M^*\|\leqslant 1$, 又 $\ker(I_M^*)=\{f;I_M^*(f)=0, f\in X^*\}=\{f; f|_M=0, f\in X^*\}=M^0$. 故 $\hat{I}_M^*$: $X^*/M^0\to M^*$ 是代数同构.

任取 $[\varphi]\in X^*/M^0$, 则 $\varphi|_M\in M^*$, 且 $\hat{I}_M^*([\varphi])=\varphi|_M$. 将 $\varphi|_M$ 保范延拓为 X^* 的元 $\bar{\varphi}$(可能就是 φ), 因 $(\varphi-\bar{\varphi})|_M=0$, 故 $\bar{\varphi}\in[\varphi]$. 从而

$$\|[\varphi]\|\leqslant\|\varphi-(\varphi-\bar{\varphi})\|=\|\bar{\varphi}\|=\|\varphi|_M\|$$
$$=\|\hat{I}_M^*([\varphi])\|\leqslant\|[\varphi]\|.$$

故 $\|[\varphi]\|=\|\hat{I}_M^*[\varphi]\|$, 从而 $\hat{I}_M^*$ 为 X^*/M^0 与 M^* 之间的等距同构. □

(3) 令 $M^{00}=\{\Phi\in X^{**};\Phi(\varphi)=0, 当\ \varphi\in M^0\}$.

由(1)、(2)知, $(M^*)^*\cong(X^*/M^0)^*\cong M^{00}$, 故只须证明 $M^{00}=\overline{J_X(M)}^{w^*}$.

显然, $M^{00}\supset J_X(M)$, 又 M^{00} 是 w^* 闭的, 故 $M^{00}\supset\overline{J_X(M)}^{w^*}$ 另一方面,若存在 $\Phi\in M^{00}\setminus\overline{J_X(M)}^{w^*}$, 则存在 w^* 闭超平面分离 Φ 与 $\overline{J_X(M)}^{w^*}$, 即 $\exists f\in X^*$, 使当 $m\in M$ 时, $f(m)=0$, 而 $\Phi(f)\neq 0$, 从而 $f\in M^0$, 这与 $\Phi\in M^{00}$ 矛盾! 所以必有 $M^{00}=\overline{J_X(M)}^{w^*}$. □

注 1: M^{**} 与 X^{**} 的一个子空间 $(\overline{J_X(M)}^{w^*})$ 合同, 但 M^* 仅

与 X^* 的一个商空间(X^*/M^0)合同.

注 2: 容易证明, 若 A 是 X 中含 0 点均衡凸集, 则也有 $A^{00}=\overline{J_X(A)}^{w^*}$.

§2 自反空间的判定定理

自反空间有许多充要条件. 其中某些在一般的泛函分析教科书中都给出过. 所以, 实际上在本书的前面几章中已应用这些充要条件证明若干定理, 例如, Banach 空间 X 是自反的 $\Leftrightarrow$ $U(X)$是 w 紧的 $\Leftrightarrow U(X)$是 w 序列紧的. 这里为了完整我们仍然将它们列出,并给以(简单)证明.

定理 4.2.1 若 X 是 Banach 空间,则下列命题是等价的:

(1) X 是自反的.

(2) X^*是自反的.

(3) M 和 X/M 是自反的,对每个闭线性子空间 M.

(4) M 和 X/M 是自反的,对某个闭线性子空间 M.

(5) $U(X)$是$\sigma(X, X^*)$紧的.

(6) $U(X)$是$\sigma(X, X^*)$序列紧的.

(7) X 的每个闭子空间是自反的.

(8) X 的每个闭可分子空间是自反的.

(9) X 的每个非平凡商空间是自反的.

(10) $X^{**}=(X^*, \sigma(X^*, X))^*$.

(11) X 是$\sigma(X, X^*)$亚完备的.

(12) 对一切$f\in X^*$, f 在$U(X)$上达到它的范数.

(13) X 的每个闭凸集有范数最小的元.

(14) X 的每个闭凸集 A 是可逼近集,即对每个 $x\in X$, 存在 $y\in A$,使$\|x-y\|=d(x, A)$.

(15) X 的每对不相交闭凸集, 其中之一是有界的,可用超平面强分离.

(16) X 的每对不相交有界闭凸集，能用超平面强分离.

(17) X 的有界闭凸集的每个递减序列有非空的交.

(18) X^*的每个等价范数是共轭范数(定义见下面的证明之中).

(19) X 的每个 w 闭集是 w^* 闭的.

(20) $J_1 J_0^* = I_3$, 或 $J_{n+1} J_n^* = J_{n+3}$(定义见下面的证明中).

证明：(1)⇒(2)若 X 是自反的，对任何 $G \in X^{***}$，令 $\psi = G \circ J_X$，则 $\psi \in X^*$，且 $J_{X^*}(\psi) = G$.（事实上，任取 $\varphi \in X^{**}$，则由于 X 是自反的，故存在某个 $x \in X$，使 $\varphi = \hat{x}$. 从而 $\langle \varphi, G \rangle = \langle \hat{x}, G \rangle = \langle x, G \circ J_X \rangle = \langle x, \psi \rangle = \langle \psi, \hat{x} \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle = \langle \varphi, J_{X^*}(\varphi) \rangle$，故 $J_{X^*}(\psi) = G$.）

从而 J_{X^*} 是满映像，故 X^* 是自反的. □

(1)⇒(7)任给 $F \in M^{**}$，定义 $\Phi \in X^{**}$，$\Phi(\varphi) = F(\varphi|_M)$，$\forall \varphi \in X^*$. 故 $\Phi \in M^{00}$(事实上，当 $\varphi \in M^0$ 时，$\varphi|_M = 0$，从而 $\Phi(\varphi) = F(\varphi|_M) = 0$，故 $\Phi \in M^{00}$). 由于 X 是自反的，故存在 $x \in X$，使 $\Phi = \hat{x}$. 由于 $\Phi \in M^{00}$，故 $x \in M$(因为若 $\psi \in M^0$，则 $\psi(x) = \hat{x}(\psi) = \Phi(\psi) = 0$，从而 $x \in {}^0(M^0) = M$). 因此，

$$F(\varphi|_M) = \Phi(\varphi) = \hat{x}(\varphi) = \varphi(x) = \varphi|_M(x) = J_M(x)(\varphi|_M),$$

故 $F = J_M(x)$，所以 J_M 是满映像，其中 $J_M: M \to M^{**}$ 的典型嵌入映像. 从而 M 是自反的. □

(2)⇒(1)设 X^* 是自反的，由(1)⇒(2)知 X^{**} 是自反的. 因为 $J_X(X)$是 X^{**} 的闭子空间，由(1)⇒(7)知，$J_X(X)$ 是自反的，由于 $X \cong J_X(X)$，故 X 是自反的. □

(1)⇒(3)由(1)⇒(7)知，M 是自反的，由(1)⇒(2)知，X^* 是自反的，由于 M^0 是自反空间 X^* 的闭子空间，再利用(1)⇒(7)的结果知，M^0 是自反的，但由定理 4.1.1 知，$(X/M)^* \cong M^0$，故 $(X/M)^*$ 是自反的，从而由(2)⇒(1)知，X/M 是自反的. □

(3)⇒(4)显然成立.

(4)⇒(1)任取 $\Phi \in X^{**}$，则由于 X/M 是自反的，故

$$\Phi|_{M^0}\in(M^0)^*\cong(X/M)^{**}=J_{X/M}(X/M).$$

从而，存在 $x_0\in X$，使对一切 $\varphi\in M^0\cong(X/M)^*$，有

$$\Phi(\varphi)=\varphi(x_0)=\hat{x}_0(\varphi).$$

故 $\Phi-\hat{x}_0\in M^{00}\cong M^{**}=J_M(M)$（其中因为 M 是自反的）．从而存在 $y_0\in M$，使得 $\Phi-\hat{x}_0=\hat{y}_0$，故 $\Phi=\hat{x}_0+\hat{y}_0\in J_X(X)$，从而 J_X 为满映像．故 X 是自反的．□

(1)⇒(5) 首先，因为 J_X：$(X,\ \sigma(X,\ X^*))\to(J_X(X),\ \sigma(X^{**},\ X^*))$ 是两个局部凸空间之间的线性同胚．故 $U(X)$ 是 $\sigma(X,\ X^*)$ 紧的 $\Leftrightarrow J_X(U(X))$ 是 $(J_X(X),\ \sigma(X^{**},\ X^*))$ 中紧集．并且，由 Goldstine-Weston 稠密性定理知，$\overline{J_X(U(X))}^{w^*}=U(X^{**})$．

若 $U(X)$ 是 $\sigma(X,\ X^*)$ 紧的．对任 $\Phi\in U(X^{**})$，由上面说明知，存在 $\{x_\delta\}\subset U(X)$，使 $\hat{x}_\delta\xrightarrow{w^*}\Phi$，又由上面说明知，$J_X(U(X))$ 是 $\sigma(X^{**},\ X^*)$ 紧的．从而存在 $\{x_\delta\}$ 的子定向列 $\{x_\alpha\}$，使 $\hat{x}_\alpha\xrightarrow{w^*}\hat{x}_0$，对某个 $x\in U(X)$，但 $\hat{x}_\alpha\xrightarrow{w^*}\Phi$，故 $\Phi=\hat{x}\in J_X(X)$，故 J_X 是满的，即 X 是自反的．

反之，由于 X 是自反的，故 $J_X(U(X))=U(X^{**})$，由 Banach-Aloaglu 定理知，$U(X^{**})$ 是 $\sigma(X^{**},\ X^*)$ 紧的，故 $J_X(U(X))$ 是 $\sigma(X^{**},\ X^*)$ 紧的，由上面说明知，$U(X)$ 是 $\sigma(X,\ X^*)$ 紧的．□

(5)⇔(6) 由定理 1.3.5 和定理 1.3.7 知，

$U(X)$ 是 $\sigma(X,\ X^*)$ 紧的 $\Leftrightarrow U(X)$ 是 $\sigma(X,\ X^*)$ 序列紧的．□

(7)⇒(8) 显然成立．

(8)⇒(6) 任取 $\{x_n\}\subset U(X)$，令 $M=\overline{\text{span}}\{x_n\}$，则 M 是 X 的可分闭子空间，由条件 (8) 知，M 是自反的．由 (1)⇔(6) 知，$U(M)$ 是 w 序列紧的．但 $\{x_n\}\subset U(M)$，故存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$，使 $x_{n_i}\xrightarrow{\sigma(M,\ M^*)}x_0\in U(M)$，显然，

$$x_{n_i} \xrightarrow{\sigma(X,\ X^*)} x_0.$$

故 $U(X)$ 是 w 序列紧的，再由 (1)⇔(6) 知，X 是自反的. □

(1)⇔(9) 注意到，在 (1)⇒(3) 的证明中已蕴涵 (1)⇒(9). 反之，任取 $x_0 \in X$，考虑 $X/\mathrm{span}\{x_0\}$，由条件 (9) 知，$X/\mathrm{span}\{x_0\}$ 是自反的，又显然，$\mathrm{span}\{x_0\}$ 是自反的，由 (4)⇒(1) 知，X 是自反的. □

(1)⇔(10) 因 $(X^*,\ \sigma(X^*,\ X))^* = J_X(X)$. □

(11)⇒(1) 设 X 是 $\sigma(X,\ X^*)$ 亚完备的. 由于 $U(X)$ 是 $\sigma(X,\ X^*)$ 有界集，故 $U(X)$ 是 $\sigma(X,\ X^*)$ 完备的，若 $\{\hat{x}_\alpha\} \subset J_X(U(X))$ 使 $\hat{x}_\alpha \xrightarrow{w^*} \Phi \in U(X^{**})$，则 $\{x_\alpha\}$ 是 $U(X)$ 中 $\sigma(X,\ X^*)$ Cauchy 定向列，故由 $U(X)$ 的 $\sigma(X,\ X^*)$ 完备性知，$\exists x \in U(X)$，使

$$x_\alpha \xrightarrow{w} x.$$

从而 $\Phi = \hat{x}$，这表明 $J_X(U(X)) = \overline{J_X(U(X))}^{w^*} = U(X^{**})$. 故 X 是自反的. □

(1)⇒(11) 设 $\{x_\alpha\}$ 是 w 有界 wCauchy 定向列，由共鸣定理知，$\exists \lambda > 0$，使 $\{x_\alpha\} \subset \lambda U(X)$，但是，由 (1)⇔(5) 知，$\lambda U(X)$ 是 w 紧的，故 $\{x_\alpha\}$ 有子定向列 $\{x_\delta\}$，使 $x_\delta \xrightarrow{w} x \in \lambda U(X)$. 从而 $x_\alpha \xrightarrow{w} x$，因此 X 是 w 亚完备的. □

(1)⇔(12) 即著名的 James 定理.

(1)⇔(14)："⇒"设 A 是闭凸集，任取 $x \in X$.

选 $y_n \in A$，使 $\|y_n - x\| < d(x,\ A) + \frac{1}{n}$，则 $\|y_n\| \leqslant \|x\| + \|y_n - x\|$，故 $\{y_n\}$ 是有界集，由于 X 是自反的，从而存在子序列 $\{y_{n_i}\}$，使 $y_{n_i} \xrightarrow{w} y \in A$ (因为 A 也是 w 闭的). 故

$$\begin{aligned} d(x,\ A) &\leqslant \|x - y\| \leqslant \varliminf_i \|y_{n_i} - x\| \\ &\leqslant \lim_i d(x, A) + \frac{1}{n_i} = d(x,\ A). \ \square \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$"任取 $f\in S(X^*)$. 令 $H=\{x; f(x)=1\}$, 则 $d(0, H)=1$, 由条件(14)知, 存在 $x\in H$, 使

$$\|x\|=d(0, x)=d(0, H)=1,$$

故 $f(x)=1=\|x\|=\|f\|$, 由 James 定理知, X 是自反的. □

(1)$\Leftrightarrow$(13): "$\Rightarrow$"设 A 是闭凸集, 令 $a=\inf\{\|x\|; x\in A\}=d(0, A)$, 由于 X 是自反的, 由(1)$\Rightarrow$(14)知, 存在 $x\in A$, 使 $\|x\|=d(0, A)=a$. □

"$\Leftarrow$"令 $H_f=\{x; f(x)=1\}$, 其中 f 是 $S(X^*)$ 的任意元, 则 $d(0, H_f)=1$, 由条件(13)知, 存在 $x_0\in H_f$, 使

$$\|x_0\|=\inf\{\|y\|; y\in H_f\}=d(0, H_f)=1,$$

故 $f(x_0)=1=\|x\|=\|f\|$, 由 James 定理知, X 是自反的. □

(1)$\Rightarrow$(15)设 A 是有界闭凸集, B 是闭凸集. 根据 X 是自反的知, A 是 w 紧凸集, B 是 w 闭凸集, 但 $(X, \sigma(X, X^*))^*=X^*$, 由强分离定理知, 存在 $f\in X^*$, α 和 ε, 使

$$\sup f(A)<\alpha-\varepsilon<\alpha+\varepsilon<\inf f(B)□$$

(15)$\Rightarrow$(16)显然成立.

(16)$\Rightarrow$(1)任取 $f\in S(X^*)$, 令 $A=\{x; f(x)=1, \|x\|\leqslant 2\}$.

若 $U(X)\cap A\neq\emptyset$, 则由 James 定理知, X 是自反的.

否则, $U(X)\cap A=\emptyset$, 由条件(16)知, 存在 $\varphi\in S(X^*)$, α 和 ε, 使

$$1=\sup\varphi(U(X))\leqslant\alpha-\varepsilon<\alpha+\varepsilon\leqslant\inf\varphi(A).$$

令 $\alpha+\varepsilon=1+a$, 显然 $a>0$, 对任何 β, $0<\beta<\frac{1}{2}$, 选 $x\in S(X)$, 使 $f(x)>1-\beta>\frac{1}{2}$, 则 $\frac{x}{f(x)}\in A$, 故

$$\varphi(x)\leqslant 1<1+a\leqslant\varphi\left(\frac{x}{f(x)}\right)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}\leqslant\frac{1}{1-\beta},$$

令 $\beta\to 0$, 则有 $\quad 1<1+a\leqslant\lim\limits_{\beta\to 0}\frac{1}{1-\beta}=1,$

矛盾! 故 $U(X)\cap A\neq\emptyset$. □

(1)⇔(17)：“⇒”由于有界闭凸集是 w 紧的（根据 X 是自反的），亦即有界闭凸集递减序列的交非空. □

“⇐”任取 $f\in S(X^*)$，令 $A_n=\left\{x;\ x\in U(X),\ f(x)\geqslant 1-\frac{1}{n}\right\}$，$n=1,2,\cdots$.

由条件(17)，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x;x\in U(X),\ f(x)=1\}\neq\emptyset,$$

由 James 定理，即知 X 是自反的.

为了证明(1)⇔(18)，首先引入共轭范数的定义，并给出一个有用的引理.

定义 4.2.1 设$(X,\|\cdot\|)$是 Banach 空间，X 上的另外一个范数$|||\cdot|||$称为与$\|\cdot\|$是等价的，如果存在 α、$\beta>0$，使

$$\alpha\|x\|\leqslant|||x|||\leqslant\beta\|x\|,\ \forall x\in X.$$

注：此时$(X,\|\cdot\|)$与$(X,|||\cdot|||)$是线性同胚的.

定义 4.2.2 若$(X,\|\cdot\|)$是 Banach 空间，$X^*=(X,\|\cdot\|)^*$上的范数$|||\cdot|||^*$称为 X^* 上的一个共轭范数，如果存在 X 上一个等价范数$|||\cdot|||$，使

$$|||\varphi|||^*=\sup\left\{\frac{\varphi(x)}{|||x|||};\ x\in X,\ x\neq 0\right\},\ \forall\varphi\in(X,\|\cdot\|)^*.$$

注：显然，此时$\|\varphi\|^*=\sup\left\{\frac{\varphi(x)}{\|x\|};\ x\in X,\ x\neq 0\right\}$与$|||\varphi|||^*$也是等价的，且若$\alpha\|x\|\leqslant|||x|||\leqslant\beta\|x\|$，则

$$\frac{1}{\beta}\|\varphi\|^*\leqslant|||\varphi|||^*\leqslant\frac{1}{\alpha}\|\varphi\|^*.$$

我们也可以这样说，若 X^* 上一个等价范数，它是由在 X 上一个等价范数所决定的共轭空间 X^* 中的一个范数，则 X^* 上的这个等价范数就称为共轭范数. 请注意，我们立即会看到共轭空间中的等价范数未必都是共轭范数.

引理 4.2.2 若$|||\cdot|||^*$是与$\|\cdot\|^*$等价的 $X^*=(X,\|\cdot\|)^*$上

的范数，则 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|^*$ 是一个共轭范数当且仅当

$$U_{|\!|\!|\cdot|\!|\!|^*}(X^*)\equiv\{x^*;\ x^*\in X^*,\ |\!|\!|x^*|\!|\!|^*\leqslant 1\}$$

是 $\sigma(X^*, X)$ 闭的.

证明: "⇒"若 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|^*$ 是一个共轭范数，则存在 X 上一个范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ 和 α、$\beta>0$，使

$$\alpha\|x\|\leqslant|\!|\!|x|\!|\!|\leqslant\beta\|x\|,\ \forall x\in X,$$

且
$$|\!|\!|f|\!|\!|^*=\sup\left\{\frac{f(x)}{|\!|\!|x|\!|\!|};\ x\in X,\ x\neq 0\right\},\ \forall f\in X^*.$$

由于 $U(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)^0=U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|^*)$，${}^0U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|^*)=U(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$，故

$$U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|^*)=({}^0U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|^*))^0=\overline{U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|^*)}^{w^*},$$

从而 $U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|^*)$ 是 w^* 闭的. □

"⇐"若 $U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)^*)$ 是 w^* 闭的. 由假设，$|\!|\!|\,|\!|\!|^*$ 是 X^* 上一个等价范数，故存在 r、$\delta>0$，使

$$r\|f\|^*\leqslant|\!|\!|f|\!|\!|^*\leqslant\delta\|f\|^*,\ \forall f\in X^*,$$

令 $|\!|\!|x|\!|\!|=\sup\left\{\frac{f(x)}{|\!|\!|f|\!|\!|^*};\ f\in X^*,\ f\neq 0\right\}$，则

$$\frac{1}{\delta}\|x\|\leqslant|\!|\!|x|\!|\!|\leqslant\frac{1}{r}\|x\|,\ \forall x\in X,$$

从而 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ 是 $(X, \|\cdot\|)$ 上一个等价范数.

定义 $|\!|\!|f|\!|\!|'=\sup\left\{\frac{f(x)}{|\!|\!|x|\!|\!|};\ x\in X,\ x\neq 0\right\}$，则 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|'$ 是一个共轭范数. 但是，

$${}^0U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|^*)=U(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|),\ U(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)^0=U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|'),$$

故

$$U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|^*)=\overline{U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|^*)}^{w^*}=({}^0U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|^*))^0$$
$$=U(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|'),$$

从而 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|^*=|\!|\!|\cdot|\!|\!|'$，即 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|^*$ 是共轭范数. □

有了以上准备工作之后，我们下面证明(1)⇔(18).

(1)⇒(18)若 X 是自反的，且 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|^*$ 是 $X^*=(X, \|\cdot\|)^*$ 上

的一个等价范数，则 $U(X^*, ⦀\cdot⦀^*)$ 是范闭凸集，从而是 w 闭的，由于空间是自反的，故 $U(X^*, ⦀\cdot⦀^*)$ 是 w^* 闭的，由引理 4.2.2 知，$⦀\cdot⦀^*$ 是一个共轭范数. □

(18)⇒(1) 只须证明 $X^{**}=J_X(X)$，由 Banach-Dieudonne 定理的推论(推论 1.2.6)，只须证，若 $\Phi\in X^{**}$，则

$$B\equiv\Phi^{\perp}\cap U(X^*),$$

其中 $$\Phi^{\perp}=\{f; f\in X^*, \Phi(f)=0\},$$

是 w^* 闭的即可.

不妨设 $\|\Phi\|=1$，则 $B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$，其中

$$B_n=\left\{\varphi\in U(X^*); |\Phi(\varphi)|\leqslant\frac{1}{n}\right\}, n=1, 2, \cdots.$$

故只须证明每个 B_n 是 w^* 闭的即可.

但是 B_n 是 X^* 中有界范闭均衡凸吸收集，且 $\mathrm{int}\,B_n\neq\emptyset$ $\left(\text{实际上,}U_{X^*}\left(0, \dfrac{1}{2n}\right)\subset B_n\right)$，故它的规函数(即 Minkowski 泛函) ρ_n 是 X^* 上的等价范数，且 $U_{\rho_n}\equiv\{f; \rho_n(f)\leqslant1\}=B_n$，由条件(18)，$\rho_n$ 是一个共轭范数，再利用引理 4.2.2 知，U_{ρ_n} 是 w^* 闭的，从而 B 是 w^* 闭的. □

(1)⇒(19) 当 X 是自反的时，在 X^* 中 w 拓扑与 w^* 拓扑是一致的，故(19)成立. □

(19)⇒(1) 任取 $\Phi\in X^{**}$，则 $\Phi^{-1}(0)$ 是 w 闭的，由条件(19)知 $\Phi^{-1}(0)$ 是 w^* 闭的，故 $\Phi\in(X^*, \sigma(X^*, X))^*=J_X(X)$. 从而 X 是自反的. □

(1)⇒(20) 这里记 J_0: $X\to X^{**}$, J_1: $X^*\to X^{***}$，一般地 J_n: $X^{(n)}\to X^{(n+2)}$，分别为典型嵌入映像. $X^{(n)}$ 为 X 的第 n 次共轭.

若 X 是自反的，则任 $\Phi\in X^{**}$，存在 $x\in X$，使 $\Phi=J_0x$，故对每个 $\Psi\in X^{***}$，

$$\begin{aligned}J_1(J_0^*\Psi)(\Phi)&=\Phi(J_0^*\Psi)=(J_0x)(J_0^*\Psi)=(J_0^*\Psi)(x)\\&=\Psi(J_0x)=\Psi(\Phi),\end{aligned}$$

从而 $\Psi=J_1\circ J_0^*\Psi$, 即 $J_1\circ J_0^*=I_3$, 这里 I_3 表示 X^{***} 到 X^{***} 的恒等算子. 其他情况可类似证明. □

(20)⇒(1) 由于 $J_1J_0^*=I_3$, 故 J_1 是满映像, 从而 X^* 是自反的, 因此 X 也是自反的. 其他情况可类似证明. □

下面我们再列举一些有用的充要条件, 它们的证明可在相应的文献中找到.

定理 4.2.3 若 X 是 Banach 空间, 则下列条件都是 X 为自反的充要条件:

(1) X 的每个具基的闭子空间是自反的 (A. Pelczynski, *Studia Math.* 21 (1962)371—374).

(2) (Davis-Johnson) X 的每个线性同胚像是一个共轭空间(参考书[4]219—221).

(3) 对每个 $f\in X^*$, 存在 X 上一个半内积 $[\cdot,\ \cdot]$ (s. i. p), 和 X 中的元 y, 使

$$f(x)=[x,\ y],\ \forall x\in X.$$

其中半内积定义如下:

定义 4.2.3 Banach 空间 X 上的一个半内积是 $X\times X$ 上的一个复(或实)值函数 $[\cdot,\ \cdot]$, 满足下列条件:

(1) $[\alpha x+y,\ z]=\alpha[x,\ z]+[y,\ z],\ \forall x,\ y,\ z\in X,\ \alpha\in K$

(2) $[x,\ x]=\|x\|^2,\ \forall x\in X$

(3) $|[x,\ y]|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|,\ \forall x,\ y\in X$

(4) $[x,\ \beta y]=\bar{\beta}[x,\ y],\ \forall x,\ y\in X,\ \beta\in K$,

其中 $\bar{\beta}$ 表示 β 的共轭数 (D. G. Faulknev, *Rocky Mountain J. Math.* 7(1977)789—792).

定理 4.2.4 Banach 空间 X 不是自反的当且仅当, 对任何 θ, $0<\theta<1$, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X^*)$, 使得

$$f_n(x_m)=\begin{cases}\theta & \text{当 } n\leqslant m \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } n>m \text{ 时}.\end{cases}$$

(R. C. James, *Trans. A. M. S.* 113(1964) 129—140.)

我们看到在自反空间充要条件中，James 定理是最强有力的． 但是，必须特别注意应用 James 定理时，空间 X 必须是 Banach 空间．也见下例．

例 1（James）：存在一个赋范空间 X，使任何 $f\in X^*$ 达到范数（显然 X 不是自反的）．

令

$$l_\infty^n=\{(a_i)_{i=1}^n;\ a_i\in \boldsymbol{R}^1,\ \|(a_i)_{i=1}^n\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|a_i|\},$$

$$n=1,\ 2,\ \cdots.$$

令

$$E=\left(\sum_{n=1}^\infty \oplus l_\infty^n\right)_2=\left\{x=(x_n)_{n=1}^\infty;\ x_n\in l_\infty^n,\ \forall n,\right.$$

$$\left.\text{且}\|x\|=\left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|_\infty^2\right)^{1/2}<+\infty\right\},$$

容易看到，$E^{**}=\left(\sum_{n=1}^\infty \oplus l_\infty^n\right)_2$，及 E 是自反的．

令 $X=\operatorname{span}\{x=(x_1,\ x_2,\ \cdots)\in E;\ \text{对每个}\ n,\ x_n=(x_1^n,\ \cdots,\ x_n^n)$，其中 $|x_1^n|=\cdots=|x_n^n|\}$．

令 $X_n=\{(x_1^n,\ \cdots,\ x_n^n);\ |x_1^n|=\cdots=|x_n^n|\}\subset X$（看作等距嵌入）．

显然，X 是 E 的线性子空间．令 $e_i^n=\{0,\underbrace{\cdots,0,\overset{\text{第 }i\text{ 项}}{1},0,\cdots,}_{n}0\}$，

又令
$$y_1^n=(\underbrace{1,\ \cdots,\ 1}_{n})\in X_n\subset X,$$

$$y_2^n=(\underbrace{-1,\ \cdots,\ -1,\ \overset{\text{第 }i\text{ 项}}{1},\ -1\cdots,\ -1}_{n})\in X_n\subset X,$$

则 $e_i^n=\frac{1}{2}(y_1^n+y_2^n)\in X$，故 $l_\infty^n\subset X$，从而 $\overline{X}=E$．

但是 $X\neq E$，事实上，令 $X_1=\{x=(x_n)_{n=1}^\infty\in E;\ x_n=(x_1^n,\ \cdots,\ x_n^n)$，其中 $|x_1^n|=\cdots=|x_n^n|\}$，由假设 $X=\operatorname{span}X_1$．

考察 X 中元的构造．若 $x\in X$，则 $x=\sum_{i=1}^{l}a_iy_i$，其中 $y_i\in X_0$，a_i 为实数．由于 $a_iy_i\in X_0$，故不妨设 $x=\sum_{i=1}^{n}y_i$，其中 $y_i\in X_0$．根据 X_0 中元的构造知，对于

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots,\ x_m,\ \cdots),\ \text{当}\ m>2^n\ \text{时},$$

$x_m=(x_1^m,\ x_2^m,\ \cdots,\ x_m^m)$ 中只有 2^{n-1} 项绝对值不同．这样，容易看到，$x_0=\left\{(1),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}\right),\ \cdots\right\}\notin X$．但显然，它是 E 中元．因此，X 不是 Banach 空间，从而 X 不是自反的．

但任何 $f\in X^*=E^*=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus l_1^n\right)_2$ 是达到它的范数的，其中 $l_1^n=\left\{(x_i)_{i=1}^n;\ x_i\in \boldsymbol{R}^1,\ \|(x_i)_{i=1}^n\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right\}$．事实上，若 $f=(f_n)$，其中 $f_n=(b_1^n,\ \cdots,\ b_n^n)$，$f_n\in l_1^n$，$\|f_n\|_1=\sum_{i=1}^{n}|b_i^n|$．

取 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots)$，其中 $x_n=\left(\frac{\operatorname{sgn} b_i^n\|f_n\|}{\|f\|}\right)_{i=1}^n$，则

$$\|x\|=\frac{(\sum\|f_n\|_1^2)^{1/2}}{\|f\|}=1,$$

且
$$f(x)=\frac{(\|f_1\|_1^2+\cdots+\|f_n\|_1^2+\cdots)}{\|f\|}=\frac{\|f\|^2}{\|f\|}=\|f\|.\ \square$$

§3　自反 Banach 空间的性质

(一) 哪些空间是自反的．

我们这里列出表格，其中有些定义在下面各章中给出．若干证明也在下面各章给出．

(1) 一致光滑空间(定义 5.1.9)．

(2) 一致非正方形空间(定义 4.4.5)．

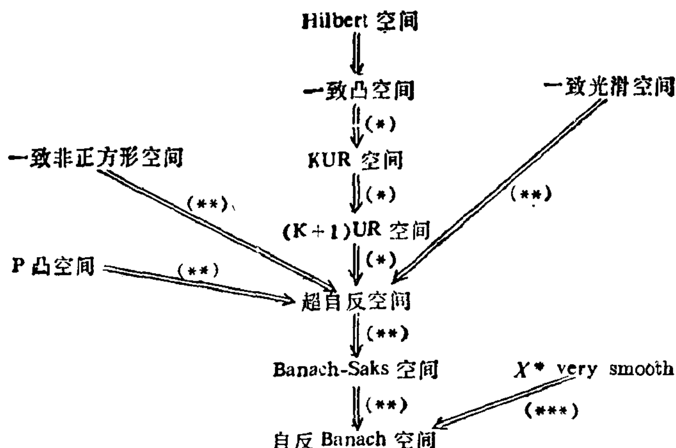
(3) 对任何正整数 K，KUR 空间(定义 5.1.2)．

(4) 超自反空间(定义 4.4.4).

(5) Banach-Saks 空间(定义 4.4.6).

(6) X^* 是 very smooth 空间(定义 5.1.11).

(7) P 凸空间(定义 4.4.7).



其中(*)证明见第5章§2, (**)见本章§4, (***)证明见第五章§2.

(二)自反空间的性质.

先列出一个表格.

(1) 亚自反空间(定义 4.4.1).

(2) ≈LUC 空间(定义 5.1.3), ≈F 可微空间(定义 5.1.15).

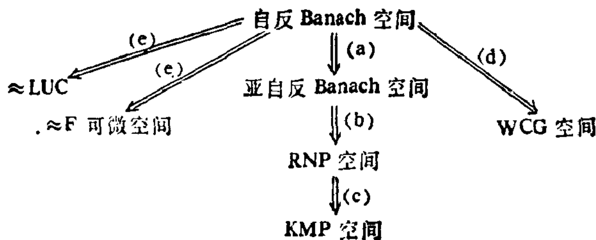
(3) RNP 空间(定义 6.3.1).

(4) WCG 空间:

定义 4.3.1 Banach 空间 X 称为 WCG 空间(弱紧生成空间),如果存在 X 的一个 w 紧集 K, 使 $X=\overline{\text{span}}\,K$.

注: 当 X 是自反时, 由于 $U(X)$ 是 w 紧的, 且 $\text{span}\,U(X)=X$, 故 X 是 WCG 空间. 又, 显然可分 Banach 空间是紧生成空间. (紧生成空间, 即存在 X 的一个紧集 A, 使得 $\overline{\text{span}}\,A$

$\to X$. 当 X 可分时，取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $S(X)$ 的稠子集，令 $A=\left\{\frac{x_n}{n};\ n=1,\ 2,\ \cdots\right\}\cup\{0\}$，则 A 为紧集，且 $\overline{\text{span}A}=X$.）从而更是 WCG 空间.



(a) 见本章 § 4.

(b)、(c) 见第六章.

(d) 见 WCG 空间定义后面的注.

(e) Trojanski 证明：自反 Banach 空间可以再赋等价范数，使它在新范数下是 LUC 且 F 可微，同时 X^* 在新范数的相应共轭的范数下是 LUC 且 F 可微（证明见参考书 [1] p. 167），也见第五章 § 3.

下面再给出自反 Banach 空间的若干性质.

定理 4.3.1 若 X 是自反的 Banach 空间，则

(1) X 的每个有界 w 闭子集是 w 紧的，从而它是 w 完备的.

(2) X 是 w 序列完备的.

(3) 若 $\{x_n^*\}\subset X^*$，$x_n^*\xrightarrow{w^*}0$，则 $x_n^*\xrightarrow{w}0$.

证明：(1) 由于 $\lambda U(X)$ 是 w 紧的，对任何 $\lambda>0$. 即知所要结果. □

(2) 由 wCauchy 列是有界的，及 $\lambda U(X)$ 是 w 紧的，对任 $\lambda>0$，即知. □

(3) 由于当 X 是自反的时候，X^* 中 w 拓扑与 w^* 拓扑合同. □

关于定理 4.3.1 中(2)、(3)的逆，我们有下面的定理.

定理 4.3.2. (1) 若 Banach 空间 X 是 w 序列完备的，且 X^* 是可分的，则 X 是自反的.

(2) 若 Banach 空间 X 是可分的，且当 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty \subset X^*$, $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ 时，有 $x_n^* \xrightarrow{w} 0$，则 X 是自反的.

证明：(1) 由于 X^* 是可分的，故 $(U(X^{**}), \sigma(X^{**}, X^*))$ 是紧度量空间.

任取 $f \in S(X^*)$，选取 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset U(X)$，使 $f(x_n) \to 1$. 由于 $\hat{x}_n \in U(X^{**})$，故存在 $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^\infty$ 的子序列 $\{\hat{x}_{n_i}\}_{i=1}^\infty$，使得 $\hat{x}_{n_i} \xrightarrow{w^*} x^{**}$，从而 $\{\hat{x}_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ 是 w*Cauchy 列，故 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ 是 wCauchy 列，由于 X 是 w 序列完备的，因此，存在 $x \in U(X)$ 使 $x_{n_i} \xrightarrow{w} x$，这样，就有 $f(x)=1$，由 James 定理，即知 X 是自反的. □

(2) 由于 X 是可分的，故 $(U(X^*), \sigma(X^*, X))$ 是紧度量空间.

任取 $\Phi \in S(X^{**})$，选 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty \subset S(X^*)$，使 $\Phi(x_n^*) \to 1$. 从而存在 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 的子序列 $\{x_{n_i}^*\}_{i=1}^\infty$，使 $x_{n_i}^* \xrightarrow{w^*} x^* \in U(X^*)$，由 (2) 中的假设知，$x_n^* \xrightarrow{w} x^*$，故 $\Phi(x^*)=1$，根据 James 定理，X^* 是自反的，从而 X 也是自反的. □

下面这个定理是著名的 Lindenstrauss Phelps 定理.

定理 4.3.3(Lindenstrauss-Phelps) 若 X 是无限维自反的 Banach 空间，A 是有界闭凸集，且 $\operatorname{int} A \neq \emptyset$，则 $\operatorname{ext} A$ 是不可数的.

证明：(1) 先讨论 $A=U(X)$ 情况. 反证法.

若 $\operatorname{ext} U(X)=\{x_1, x_2, \cdots\}$，令

$$F_n=\{f \in X^*; f(x_n)=\|f\|, \|f\| \leqslant 1\}, n=1, 2, \cdots.$$

我们有 $U(X^*)=\bigcup_{n=1}^\infty F_n$. 事实上，任取 $f \in U(X^*)$，由于

X 是自反的，故 $A=\{x\in X;\ \|x\|=1,\ f(x)=\|f\|\}\neq\emptyset$，且 A 是 $U(X)$ 的一个 w 闭端凸子集，再根据自反性，A 是 w 紧凸集，由 Krein–Milman 定理，$A=\overline{\mathrm{co}}^{w}(\mathrm{ext}A)=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}\,A)$，但是，$\mathrm{ext}\,A\subset \mathrm{ext}U(X)$，故存在某个 x_n，使 $f(x_n)=\|f\|$，从而 $f\in F_n$，对某个 n. 因此，$U(X^*)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$.

显然，F_n 是 $U(X^*)$ 的 w^* 闭凸子集，由 Baire 纲定理，至少某个 F_n 具有非空相对 w^* 开核. 不妨设 F_1 有非空相对 w^* 开核，即存在 $f_0\in F_1$，及 $\{y_i\}_{i=1}^{n}\subset X$，使

$$\{f;f\in U(X^*),\ |(f-f_0)(y_i)|<1,\ i=1,\ \cdots,\ n\}\subset F_1.$$

我们还假定 $\|f_0\|<1$. 事实上，若 $\|f_0\|=1$，选 α，$0<\alpha<1$，使 $(1-\alpha)|f_0(y_i)|<1$，$i=1,\ \cdots,\ n$. 则 $\|\alpha f_0\|=\alpha<1$，且

$$\alpha f_0\in\{f;f\in U(X^*),\ |(f-f_0)(y_i)|<1,\ i=1,\ \cdots,\ n\},$$

从而，存在 $z_1,\ \cdots,\ z_m\in X$，使

$$\{f\in U(X^*);|(f-\alpha f_0)z_i|<1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$
$$\subset\{f\in U(X^*);\ |(f-f_0)(y_i)|<1,\ i=1,\ \cdots,\ n\}\subset F_1. \tag{4.1}$$

用 αf_0，z_1，$\cdots$，z_m 代替 f_0，y_1，$\cdots$，y_n 即可. 故假设 $\|f_0\|<1$ 是不失一般性的.

令 $H=\{f\in X^*;f(y_i)=f_0(y_i),i=1,\cdots,n,f(x_1)=f_0(x_1)\}$，则 $f_0\in H$，且 H 是 X^* 中 w^* 闭仿射子空间，且它在 X^* 中具有有限补维. 因为 $\dim X=+\infty$，故 $\dim X^*=+\infty$，且 $\|f_0\|<1$，从而 $H\cap S(X^*)\neq\emptyset$. (事实上，令

$$K=\{f\in X^*;f(y_i)=0,\ f(x_1)=0,\ i=1,\ \cdots,\ n\},$$

则 $H=K+f_0$. 故存在 $f_1\neq0$，$\|f_1\|=1$，使 $f_1\in K$，从而 $tf_1\in K$，对一切 t. 故 $f_0+tf_1\in H$，但 $\|f_0\|<1$，而 $\|f_0+tf_1\|\to+\infty$，当 $t\to+\infty$ 时. 因此存在 t_0，使 $f_0+t_0f_1\in H\cap S(X^*)$.) 不妨设 $f_0+t_0f_1\in H\cap S(X^*)$，其中 $f_1\in X^*$，$f_1(y_i)=0$，$i=1$，$\cdots$，n，$f_1(x_1)=0$. 故 $f_0+t_0f_1\in F_1$（根据 (4.1)），从而，$1=\|f_0+$

$t_0 f_1\| = |f_0(x_1)| \leqslant \|f_0\| \cdot \|x_1\| \leqslant \|f_0\| < 1$, 矛盾！ 故 $\mathrm{ext}\,U(X)$ 不可数.

(2) 令 A 是 X 的有界闭凸集，且 $\mathrm{int}\,A \neq \emptyset$.

若 A 是均衡的，则 Minkowski 泛函 p_A 决定了 X 上一个等价范数，且 (X, p_A) 是自反的. 又 $U_{p_A} = A$，由(一)的结果知 $\mathrm{ext}\,A$ 的端点是不可数的.

若 A 不是均衡的，则考虑如下空间 Y：

$$Y \equiv (X \oplus \boldsymbol{R}^1)_\infty \equiv \{(x, r); x \in X, r \in \boldsymbol{R}^1, \|(x, r)\| = \max\{\|x\|, |r|\}\}.$$

容易看到，Y 是自反的. 令

$$A_1 = \{(x, r) \in Y; x \in A, r = 1\}, \ B = \mathrm{co}(A_1 \cup (-A_1)),$$

则 B 是有界闭凸均衡集，且 $\mathrm{int}\,B \neq \emptyset$. （显然，$B$ 是有界均衡凸集，又因 A_1 是 w 紧凸集，从而 B 是 w 紧凸集，故 B 是闭集. 由假设存在 $x \in \mathrm{int}\,A$，即存在 X 中开集 V，使

$$x \in V \subset \mathrm{int}\,A \subset A,$$

故 $V \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subset \mathrm{co}(A_1 \cup (-A_1)) = B$，因此 $(x, 0) \in \mathrm{int}\,B$，又由于 B 是均衡的，故 $(0, 0) \in \mathrm{int}\,B$.）

B 的 Minkowski 泛函 p_B 决定了 Y 上一个等价范数，因此 (Y, p_B) 是自反的，利用(一)的结果知，$\mathrm{ext}\,B$ 不可数，但

$$\mathrm{ext}\,B = (\mathrm{ext}\,A_1) \cup (\mathrm{ext}(-A_1)) = (\mathrm{ext}\,A_1) \cup (-\mathrm{ext}\,A_1),$$

因此，$\mathrm{ext}\,A_1$ 是不可数的，但 $\mathrm{ext}\,A_1 = (\mathrm{ext}\,A, 1)$，故 $\mathrm{ext}\,A$ 也是不可数的. □

注 1：上述定理的逆不成立，例如，l_∞ 的单位球的端点是不可数的，但 l_∞ 不是自反的. 另外，容易看到上述性质也不是线性同胚不变的. 即单位球的端点可数的 Banach 空间可再赋范使新单位球的端点是不可数的，例如下面将看到 l_1 空间（甚至每个可分 Banach 空间）可再赋范成为严格凸空间.

注 2：目前引入了 Lindenstraus–Phelps 空间（LP 空间），

并进行了若干讨论(V. P. Fonf, *Fuctional Anal. Appl*, 13 (1979)66—67).

定义 4.3.2 一个实无限维 Banach 空间称为 LP 空间, 如果 $\mathrm{ext}\,U(X^*)$是可数的.

已经知道每个 LP 空间含一个子空间线性同胚于 c_0. 若 X 是 LP 空间, 则 X^* 是可分的, 并且 X^{**} 不是可分的. 又若存在 X^* 中的紧集序列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使 $\mathrm{ext}\,U(X^*)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$, 则 X 可再赋范成为 LP 空间.

尚未解决的问题是若 Banach 空间 X, 使 X^* 可分, 且 X 的每个无限维子空间均含一个线性子空间, 使它线性同胚于 c_0, 是否 X 必是线性同胚于 LP 空间? (见 (Proc. of Research of Workshop on Banach space (1981) Edited by Bor Luh Lin p. 196.)

关于 $B(X, Y)$的自反性讨论见 J. R. Holub *Proc. A. M. S.* 39(1973) p. 175—p. 177.

定理 4.3·4 若 X_n 是自反的 Banach 空间, $n=1, 2, \cdots$, 则$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus X_n\right)_p$是自反的, $(1<p<+\infty)$, 其中

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus X_n\right)_p=\Big\{(x_n)_{n=1}^{\infty};\ x_n\in X_n,$$

$$\text{且}\ \|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{1/p}<+\infty\Big\}.$$

证明留给读者.

§4 亚自反Banach空间和超自反Banach空间

(一) 亚自反 Banach 空间(Quasi-reflexive Banach space)

定义 4.4.1 设 X 是 Banach 空间, 若 $\dim(X^{**}/J_X(X))<+\infty$, 则称 X 为亚自反 Banach 空间, 也称 $\dim(X^{**}/J_X(X))$

为亚自反的序，记为ord(X).

注 1：显然，自反空间是亚自反空间（因 $\dim(X^{**}/J_X(X))=0$）.

注 2：著名的 James 空间（第三章§3 例 1）是序 1 的亚自反空间.

为了证明亚自反空间的性质，我们引入下列定义及引理.

定义 4.4.2 令 X 是线性拓扑空间，又 X 是两个子空间 M、N 的代数直和，$X=M\oplus N$. 若映像 $(m,n)\mapsto m+n$ 是 $M\times N\to X$ 的同胚映像，即若 $(m_\delta,n_\delta)\xrightarrow[\delta]{}(m,n)$，则 $m_\delta+n_\delta\xrightarrow[\delta]{}m+n$，且若 $x_\delta=m_\delta+n_\delta\xrightarrow[\delta]{}m+n=x$，则 $(m_\delta,n_\delta)\to(m,n)$，则称 X 是 M、N 的拓扑直和. 在不致引起混淆的情况下，仍记作 $X=M\oplus N$.

引理 4.4.1 若 $X=M\oplus N$ 是代数直和，$P: X\to M$ 是 X 到 M 沿着 N 的投影，即若 $x=m+n\in X$，则 $Px=m$，则下列成立：

(1) $X=M\oplus N$ 是拓扑直和当且仅当 P 是连续的.

(2) P 是连续的当且仅当 $T: X/M\to N$，$T(x+M)=(x+M)\cap N$ 是线性同胚.

证明：(1) 若 X 是 M、N 的拓扑直和，若 $x_\delta=m_\delta+n_\delta\to x=m+n$，则 $(m_\delta,n_\delta)\to(m,n)$，从而 $m_\delta\to m$，但 $Px_\delta=m_\delta$，$Px=m$，故 $Px_\delta\to Px$. 从而 P 是连续的.

反之，若 P 是连续的，又设 $x_\delta=m_\delta+n_\delta\to x=m+n$，则 $Px_\delta=m_\delta\to Px=m$，从而 $n_\delta=x_\delta-m_\delta\to n=x-m$，所以，$(m_\delta,n_\delta)\to(m,n)$，从而 X 是 M、N 的拓扑直和. 证毕.

(2) 首先有 $T(x+M)=(I-P)x$.（事实上，若 $x\in X$，$x=Px+(I-P)x$，则 $x+M=(I-P)x+M$. 因此，当 $y\in T(x+M)$ 时，有 $y\in((I-P)x+M)\cap N$，故 $y=(I-P)x+m\in N$，对某个 $m\in M$，因此 $m=0$，故 $y=(I-P)x$，即 $T(x+M)=(I-$

$P)x$.)

其次，T^{-1} 总是连续的．(事实上，若 $\{x_\delta\}\subset N$，$x_\delta\to x\in N$，则 $T^{-1}(x_\delta)=x_\delta+M$，$T^{-1}(x)=x+M$，由于商映像总是连续的，故 $T^{-1}(x_\delta)=x_\delta+M\to x+M=T^{-1}(x)$。)

若 T 是连续的，则当 $x_\delta\to x$ 时，$x_\delta+M\to x+M$，从而 $T(x_\delta+M)=(I-P)x_\delta\to T(x+M)=(I-P)x$，故 $Px_\delta\to Px$，即 P 是连续的．

反之，若 P 是连续的，则 $I-P$ 也是连续的，但 $I-P=T\circ Q_M$，其中 $Q_M: X\to X/M$ 是商映像．因为 Q_M 是开映像，任取 N 中开集 V，则 $Q_M^{-1}(T^{-1}(V))=(I-P)^{-1}(V)$，因为 $(I-P)^{-1}(V)$ 是开集，从而 $T^{-1}(V)$ 也是开集，所以 T 是连续的．故 T 是同胚(显然，T 是线性的)．□

引理 4.4.2 若 X 是 Banach 空间，则

$$X^{***}=J_{X^*}(X^*)\oplus J_X(X)^{\perp}$$

且
$$J_X(X)^{\perp}\approx X^{***}/J_{X^*}(X^*).$$

证明：对任 $F\in X^{***}$，令 $\varphi_F(x)=F(\hat{x})$，$\forall x\in X$，则 $\varphi_F\in X^*$，令 $P(F)=J_{X^*}(\varphi_F)\equiv\hat{\varphi}_F$，则 $P(F)\in J_{X^*}(X^*)$.

显然，$P: X^{***}\to J_{X^*}(X^*)$ 是一个线性映像．又因为

$$\varphi_{P(F)}(x)=P(F)(\hat{x})=\hat{\varphi}_F(\hat{x})=\hat{x}(\varphi_F)=\varphi_F(x),\ \forall x\in X,$$

故 $\varphi_{P(F)}=\varphi_F$，从而

$$P(P(F))=\hat{\varphi}_{P(F)}=\hat{\varphi}_F=P(F),$$

故 P 是一个投影．并且，

$$P(F)(x^{**})=\hat{\varphi}_F(x^{**})=x^{**}(\varphi_F),\ \forall x^{**}\in X^{**},$$

特别地，$P(F)(\hat{x})=\hat{x}(\varphi_F)=\varphi_F(x)=F(\hat{x})$，故 $(F-P(F))(\hat{x})=0$，亦即 $(I-P)(F)\in J_X(X)^{\perp}$，并且，

$$\|P(F)\|=\|\hat{\varphi}_F\|=\|\varphi_F\|=\sup_{\|x\|=1}|\varphi_F(x)|=\sup_{\|\hat{x}\|=1}|F(\hat{x})|$$
$$\leqslant\|F\|,$$

故 $\|P\|=1$.

由引理 4.4.1(1) 知，$X^{***}=J_{X^*}(X^*)\oplus J_X(X)^{\perp}$（拓扑直和），再由引理 4.4.(2)知

$$J_X(X)^{\perp}\approx X^{***}/J_{X^*}(X^*)\text{（线性同胚）}. \quad \square$$

定理4.4.3 Banach 空间 X 是序 n 的亚自反空间 $\Leftrightarrow X^*$ 是序 n 的亚自反空间.

证明：$\dim(X^{**}/J_X(X))=n$

$$\Leftrightarrow \dim(X^{**}/J_X(X))^*=n$$

$$\xLeftrightarrow{\text{(定理4.1.1)}} \dim(J_X(X)^{\perp})=n$$

$$\xLeftrightarrow{\text{(引理4.4.2)}} \dim(X^{***}/J_{X^*}(X^*))=n. \quad \square$$

引理4.4.4 若 X 是 Banach 空间，M 是 X 的闭子空间，则

(1) $J_X(X)+M^{00}$ 是 X^{**} 的闭线性子空间.

(2) $M^{**}/J_M(M)\approx(J_X(X)+M^{00})/J_X(X)$.

(3) $(X/M)^{**}/J_{X/M}(X/M)\approx X^{**}/(J_X(X)+M^{00})$.

证明：(1) 令 $Q_M: X\to X/M$ 是商映像.

首先，我们有 $J_{X/M}\circ Q_M=Q_M^{**}\circ J_X$.（事实上，任取 $x\in X$，$h^*\in(X/M)^*$，则

$$\begin{aligned}[Q_M^{**}\circ J_X(x)](h^*)&=[Q_M^*(h^*)](x)=h^*(Q_Mx)\\&=[J_{X/M}(Q_Mx)](h^*)\\&=[(J_{X/M}\circ Q_M)x](h^*),\end{aligned}$$

从而 $J_{X/M}\circ Q_M=Q_M^{**}\circ J_X$.）因此，

$$Q_M^{**}\circ J_X(X)=J_{X/M}\circ Q_M(X)=J_{X/M}(X/M),$$

故 $(Q_M^{**})^{-1}(J_{X/M}(X/M))=J_X(X)+\ker(Q_M^{**})$. 因为，$J_{X/M}(X/M)$ 是 $(X/M)^{**}$ 的闭子空间，故 $J_X(X)+\ker(Q_M^{**})$ 是 X^{**} 的闭子空间. 下面证明 $\ker(Q_M^{**})=M^{00}$，故 $J_X(X)+M^{00}$ 是 X^{**} 的闭子空间.

事实上，由于 Q_M^* 的值域 $R(Q_M^*)=M^0$，故当 $x^{**}\in M^{00}$ 时，对任何 $h^*\in(X/M)^*$，

$$Q_M^{**}(x^{**})(h^*) = x^{**}(Q_M^* h^*) = 0,$$

从而 $M^{00} \subset \ker(Q_M^{**})$. 反之,若 $x^{**} \in \ker(Q_M^{**})$, 则 $Q_M^{**}(x^{**}) = 0$, 任取 $h^* \in (X/M)^*$, 则

$$x^{**}(Q_M^* h^*) = (Q_M^{**} x^{**})(h^*) = 0,$$

故在 $R(Q_M^*)$ 上 x^{**} 等于 0, 但是 $R(Q_M^*) = M^0$, 故 $x^{**} \in M^{00}$, 从而 $\ker(Q_M^{**}) \subset M^{00}$, 即 $\ker(Q_M^{**}) = M^{00}$. □

(2) 令 R_M: $X^* \to M^*$ 为限制映像, 即对 $f \in X^*$, $R_M f = f|_M$. 则 R_M^* 将 M^{**} 映到 M^{00}. (事实上, 任取 $\varphi \in M^0$, $m^{**} \in M^{**}$, 则

$$(R_M^* m^{**})(\varphi) = m^{**}(R_M \varphi) = m^{**}(0) = 0,$$

故 $R_M^*(m^{**}) \in M^{00}$, 即 $R_M^*(M^{**}) \subset M^{00}$. 反之, 任取 $x^{**} \in M^{00}$. 对任给 $m^* \in M^*$, 取 x_1^*, x_2^* 为 m^* 到 X^* 的任何两个保范延拓(如果存在多于一个保范延拓). 则 $x_1^* - x_2^* \in M^0$, 从而 $x^{**}(x_1^*) = x^{**}(x_2^*)$. 根据这一点可以定义 $m^{**} \in M^{**}$, 使 $m^{**}(m^*) = x^{**}(x_1^*)$, 其中 x_1^* 为 m^* 的任一保范延拓. 这时就有

$$R_M^*(m^{**})(x^*) = m^{**}(R_M x^*) = x^{**}(x^*), \ \forall x^* \in X^*,$$

故 $R_M^*(m^{**}) = x^{**}$, 这表示 $M^{00} \subset R_M^*(M^{**})$, 即 $M^{00} = R_M^*(M^{**})$.)

容易看到 $\| R_M^* \| = \| R_M \| \leqslant 1$.

另一方面, 对 $m^{**} \in M^{**}$, 任取 $m^* \in M^*$, $\|m^*\| \leqslant 1$, 考虑 m^* 的任何保范延拓 $x^* \in X^*$, 则 $\|x^*\| \leqslant 1$, 且 $R_M x^* = m^*$, 故

$$\begin{aligned} |m^{**}(m^*)| &= |m^{**}(R_M(x^*)| \leqslant \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} |R_M^* m^{**}(x^*)| \\ &\leqslant \|R_M^* m^{**}\|, \end{aligned}$$

因此得到 $\| m^{**} \| \leqslant \| R_M^* m^{**} \| \leqslant \| m^{**} \|$. 这表明 R_M^* 是一个合同.

此外还有

$$R_M^* \circ J_M = J_X|_M. \tag{4.2}$$

(事实上, 任取 $x^* \in X^*$, $m \in M$, 则

$$\begin{aligned} (R_M^* \circ J_M(m))(x^*) &= J_M(m)(R_M x^*) = (R_M x^*)(m) \\ &= x^*(m) = J_X(m)(x^*), \end{aligned}$$

故 $R_M^* \circ J_M = J_X|_M$.)

令 $Q_{J_X(X)}: X^{**}\to X^{**}/J_X(X)$是商映像，因为

$$J_X(X)\cap M^{00}=J_X(M). \tag{4.3}$$

(事实上，若 $\hat{x}\in M^{00}$，但 $x\notin M$，则存在 $\varphi\in M^0$，使 $\varphi(x)\neq 0$，故 $J_X(x)\notin M^{00}$，矛盾！故必有 $x\in M$，即 $J_X(X)\cap M^{00}\subset J_X(M)$.
反之，若 $m\in M$，则 $J_X(m)\in J_X(X)$，且对任何 $\varphi\in M^0$，有

$$0=\varphi(m)=J_X(m)(\varphi),$$

故 $J_X(m)\in M^{00}$，从而 $J_X(M)\subset J_X(X)\cap M^{00}$.)

所以，$Q_{J_X(X)}\circ R_M^*$ 将 M^{**} 映到 $(J_X(X)+M^{00})/J_X(X)$ [(事实上，

$$M^{**}\xrightarrow{R_M^*}M^{00}\xrightarrow{Q_{J_X(X)}}J_X(X)+M^{00}/J_X(X).)$$

并且，$\ker(Q_{J_X(X)}R_M^*)=J_M(M)$. (事实上，若 $m^{**}\in M^{**}$，使 $Q_{J_X(X)}R_M^*(m^{**})=0$，则 $R_M^*(m^{**})\in J_X(X)$，且 R_M^* 映 M^{**} 到 M^{00}，所以 $R_M^*(m^{**})\in J_X(X)\cap M^{00}\overset{\text{由}(4.3)}{=\!=\!=}J_X(M)$，故 $m^{**}\in (R_M^*)^{-1}\circ J_X(M)\overset{\text{由}(4.2)}{=\!=\!=}J_M(M)$，所以 $\ker(Q_{J_X(X)}R_M^*)\subset J_M(M)$.
反之，若 $m^{**}\in J_M(M)\overset{\text{由}(4.2)}{=\!=\!=}(R_M^*)^{-1}\circ J_X(M)$，则

$$R_M^*(m^{**})\in J_X(M)\overset{\text{由}(4.3)}{=\!=\!=}J_X(X)\cap M^{00}\subset J_X(X),$$

故 $Q_{J_X(X)}R_M^*(m^{**})=0$.) 令

$$S:\ M^{**}/J_M(M)\to(J_X(X)+M^{00})/J_X(X),$$

$$S(m^{**}+J_M(M))=Q_{J_X(X)}\circ R_M^*(m^{**}),\ \forall m^{**}\in M^{**},$$

则 S 是 $M^{**}/J_M(M)$ 与 $(J_X(X)+M^{00})/J_X(X)$之间的线性同胚. □

(3) 令 $Q_{J_{X/M}(X/M)}$: $(X/M)^{**}\to(X/M)^{**}/J_{X/M}(X/M)$ 是商映像.

$Q_M^{**}: X^{**}\to(X/M)^{**}$ 是商映像 Q_M 的二次共轭映像. 则

$Q_{J_{X/M}(X/M)}\circ Q_M^{**}$ 将 X^{**} 映到$(X/M)^{**}/J_{X/M}(X/M)$.

并且 $$\ker(Q_{J_{X/M}(X/M)}\circ Q_M^{**})=J_X(X)+M^{00}.$$

(事实上，若 $Q_{J_{X/M}(X/M)}\circ Q_M^{**}(x^{**})=0$，对某个 $x^{**}\in X^{**}$，则

$$Q_M^{**}(x^{**}) \in J_{X/M}(X/M),$$

故 $$x^{**} \in (Q_M^{**})^{-1} J_{X/M}(X/M) = J_X(X) + M^{00}$$

(根据(1)的证明),反之亦然.)

从而令

$$T: X^{**}/(J_X(X)+M^{00}) \to (X/M)^{**}/J_{X/M}(X/M),$$

$$T(x^{**}+J_X(X)+M^{00}) = Q_{J_{X/M}(X/M)} \circ Q_M^{**}(x^{**}),$$

则 T 就是一个线性同胚. □

注:(2)、(3)证明中算子 S、T 就是由原来的算子导出的一个 1—1 算子.

定理 4.4.5 若 X 是 Banach 空间,则

X 是亚自反的 $\Leftrightarrow$ 对每个闭子空间 M, X/M 及 M 是亚自反的.

$\Leftrightarrow$ 对某个闭子空间 M, X/M 及 M 是亚自反的.

证明:

$$\dim(X^{**}/J_X(X)) < +\infty$$

$$\Rightarrow \dim((J_X(X)+M^{00})/J_X(X)) < +\infty$$

$$\xRightarrow{\text{引理 4.4.4(2)}} \dim(M^{**}/J_M(M)) < +\infty$$

$\Rightarrow M$ 是亚自反的.

又

$$\dim(X^{**}/J_X(X)) < +\infty$$

$$\Rightarrow \dim(X^{**}/(J_X(X)+M^{00})) < +\infty$$

$$\xRightarrow{\text{引理 4.4.4(3)}} \dim((X/M)^{**}/J_{X/M}(X/M)) < +\infty$$

$\Rightarrow X/M$ 是亚自反的.

反之,

X/M 是亚自反的

$$\Rightarrow \dim((X/M)^{**}/J_{X/M}(X/M)) < +\infty$$

$$\xRightarrow{\text{引理 4.4.4(2)}} \dim((J_X(X)+M^{00})/J_X(X)) < +\infty. \quad (4.4)$$

又

M 是亚自反的 $\Rightarrow \dim(M^{**}/J_M(M))<+\infty$

$$\xrightarrow{\text{引理 4.4.4(2)}} \dim((J_X(X)+M^{00})/J_X(X)) <+\infty. \tag{4.5}$$

由(4.4)及(4.5)知,

$$\dim(X^{**}/J_X(X))<+\infty \Rightarrow X \text{ 是亚自反的.}$$

并且,

$$\dim(X^{**}/(J_X(X)+M^{00}))+\dim((J_X(X)+M^{00})/J_X(X)) =\dim(X^{**}/J_X(X)).$$

故 $\operatorname{ord}(X)=\operatorname{ord}(M)+\operatorname{ord}(X/M)$, 其中 $\operatorname{ord}(X)$ 表示 X 的亚自反序. □

注 1: 由 $M^{**}/J_M(M)\approx(J_X(X)+M^{00})/J_X(X)$ 知,

M 是自反的 $\Leftrightarrow M^{00}\subset J_X(X)$

$$\Rightarrow X^{**}/J_X(X)\approx(X/M)^{**}/J_{X/M}(X/M).$$

注 2: 由 $(X/M)^{**}/J_{X/M}(X/M)\approx X^{**}/(J_X(X)+M^{00})$,

知, X/M 是自反的 $\Leftrightarrow J_X(X)+M^{00}=X^{**}$

$$\Rightarrow M^{**}/J_M(M)\approx X^{**}/J_X(X).$$

定理 4.4.6 若 Banach 空间 X 是亚自反的, 则

$$X \text{ 是自反} \Leftrightarrow X \text{ 是 w 序列完备的.}$$

证明: 若 X 是自反的, 由定理 4.2.5(1)知, X 是 w 序列完备的.

反之, 若 X 是 w 序列完备的. 令 $\operatorname{ord}(X)=n$.

任取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$, 令 $X_1=\overline{\operatorname{span}}\{x_n\}$, 则, 由定理 4.4.5, $\operatorname{ord}(X_1)=m\leqslant n$. 且 X_1 是可分的, 又 X_1 是 w 序列完备空间 X 的闭子空间, 故 X_1 也是 w 序列完备的.

又 $X_1^{**}=J_{X_1}(X_1)\oplus F$, 其中 $\dim(F)=n$. 故 X_1^{**} 也是可分的, 从而 X_1^* 是可分的. 由定理 4.2.5 知, X_1 是自反的. 从而存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, 及 $x_0\in X_1$, 使

$$x_1^*(x_{n_i})\to x_1^*(x_0),\ \forall x_1^*\in X_1^*,$$

显然，$$x^*(x_{n_i})\to x^*(x_0),\ \forall x^*\in X^*.$$

即 $x_{n_i}\xrightarrow{w}x_0$（在 X 中），故 $U(X)$ 是 w 序列紧的．所以，X 是自反的．□

推论 4.4.7 若亚自反 Banach 空间 X 具有无条件基，则 X 是自反的．

证明：由定理 4.4.6 的证明，因为 X 是可分的，故 X^{**} 是可分的，利用定理 2.3.11 知，X 是自反的．证毕．

注：l_1 不是亚自反的，因为 l_1 是 w 序列完备的，但 l_1 不是自反的．

（二）超自反 Banach 空间（Super-reflexive Banach space）．

为了介绍超自反 Banach 空间，我们首先引入几个概念．

定义 4.4.3 一个赋范空间 Y 称为在另一个赋范空间 X 中有限表示，如果对 Y 的任何有限维子空间 Y_n 和 $\varepsilon>0$，存在 X 中有限维子空间 X_n，及 $T:Y_n\to X_n$，使 T 是 Y_n 与 X_n 之间的一个线性同胚，且 $\|T\|\cdot\|T^{-1}\|<1+\varepsilon$．

注 1：这时，也称 X 模写(minic)Y．记作 $Y\prec X$．

注 2：对任何两个 Banach 空间（或赋范空间）X、Y，定义
$$d(X,\ Y)=\inf\{\|T\|\cdot\|T^{-1}\|,\ T\text{ 是 }X\to Y\text{ 的（上）线性同胚}\},$$
称之为 X、Y 的 Banach-Mazur 距离．

这样，定义 4.4.3 就是说，对 Y 的任何 n 维子空间 Y_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，和每个 $\varepsilon>0$，存在 X 的 n 维子空间 X_n，使
$$d(X_n,\ Y_n)<1+\varepsilon.$$

关于有限表示有下列性质．

定理 4.4.8 关于有限表示有如下性质：

(1) 若 $Z\prec Y$，$Y\prec X$，则 $Z\prec Z$（传递性）．

(2) 对任何赋范空间 X，有 $H\prec X\prec c_0$，其中 H 表示可分的 Hilbert 空间．

(3) 对任何赋范空间 X，$X^{**}\prec X$．

证明：(1) 显然成立.

(2) 可分 Hilbert 空间可在任何赋范空间中有限表示，这就是著名的 Dvoretsky 定理，它是泛函分析中最深刻的结果之一. 证明是相当长的. 较短的证明可见 V. D. Milman, *Funkcional Anal. i. Prilozen* 5(1971)28—37(俄文).

现在证明 $X \prec c_0$, 任取 X 的 n 维子空间 X_n, 和 $\varepsilon>0$.

取 $S(X_n)$ 的 δ 网 $\{x_1, \cdots, x_m\}$, 其中 $0<\delta<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. 取 $f_i \in S(X^*)$, 使 $f_i(x_i)=1$, $i=1, \cdots, m$. 则对任何 $x \in S(X_n)$, 选 x_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, 使 $\|x_j - x\|<\delta$. 因此

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant m} |f_i(x)| > f_j(x) > 1-\delta,$$

故 $(1+\varepsilon) \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |f_i(x)| > (1+\varepsilon) f_j(x) > (1+\varepsilon)(1-\delta) > 1$,

从而，对任何 $x \in X_n$, 有 $(1+\varepsilon) \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |f_0(x)| \geqslant \|x\|$.

定义 T: $X_n \to c_0$, $T(x)=(f_1(x), \cdots, f_m(x), 0, \cdots)$, $x \in X_n$, 则 T 是线性算子，且 TX_n 是 c_0 中 n 维子空间，且

$$\|Tx\| = \|(f_1(x), \cdots, f_m(x), 0 \cdots)\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant m} |f_i(x)|$$

$$\geqslant \|x\| \cdot \frac{1}{1+\varepsilon},$$

又 $\|Tx\| \leqslant \|x\|$, 故 $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 1+\varepsilon$. □

(3) 证明要用到如下著名的局部自反原理.

局部自反原理：对 X^{**} 中任何有限维子空间 E 及 X^* 中任何有限维子空间 F 和 $\varepsilon>0$, 存在 T: $E \to T(E) \subset X^{**}$, 使得

① $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 1+\varepsilon$.

② $T|_{E \cap J_X(X)} = I_E$, 其中 I_E 表示恒等算子.

③ $\langle Tx^{**}, f\rangle = \langle f, x^{**}\rangle$, $\forall f \in F$, $x^{**} \in E$.

(证明见 Lindenstrauss & Rosenthal, *Israel J. Math.* (1969) 325—349.)□

下面我们引入超自反空间定义.

定义 4.4.4 一个 Banach 空间 X 称为超自反的. 如果每个在 X 中有有限表示的 Banach 空间 Y 都是自反的.

注: 由这个定义, 相应地, 对 Banach 空间中的任何性质 P 都可引入"超性质 P". 即若 P 是 Banach 空间中的某个性质, 若 Banach 空间 X, 使得每个在 X 中有有限表示的 Banach 空间 Y 都具有性质 P, 那么 Banach 空间 X 称为具有超 P.

显然, 具有超性质 P 的 Banach 空间必具有性质 P. 故超自反空间是自反空间.

定义 4.4.5 Banach 空间 X 称为一致非正方形的. 如果 $l_1^2=\{(x, y); x, y\in \mathbf{R}^1, \|(x, y)\|_1=|x|+|y|\}$ 不可以在 X 中有有限表示, 即存在 $\delta>0$, 使对一切 $x, y\in U(X)$, 有

$$\min\left\{\frac{1}{2}\|x+y\|, \frac{1}{2}\|x-y\|\right\}<1-\delta.$$

定义 4.4.6 Banach 空间 X 称为具有 Banach-Saks 性质 (B. S. P), 如果每个有界序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$, 有一个子序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的算术平均值按范数收敛于 X 中的一个元, 即

$$\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\to x_0\in X.$$

Banach 空间 X 称为具有 w Banach-Saks 性质, 如果对 X 中每个 w 收敛于 0 的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 有子序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使

$$\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\to 0.$$

注; 已经证明 Banach-Saks 性质的 Banach 空间是自反的 (参考书[1]p. 83), 故

$$X \text{ 具 BSP} \Leftrightarrow X \text{ 是自反的且具 wBSP}.$$

且 Banach-Saks 性质是线性同胚不变的.

下面我们列举某些结果.

定理 4.4.9 若 $X\approx Y$, X 是超自反的, 则 Y 也是超自反的(见 *Canad. J. Math.* (5) (1972)896—904).

定理 4.4.10 X 是超自反 $\Leftrightarrow X^*$ 是超自反的.

定理 4.4.11 若 X 是一致非正方形的，则 X 是超自反的. 若 X 是超自反的，则 X 具 BSP.

定义 4.4.7 Banach 空间 X 称为 $P(n, \varepsilon)$ 凸的，如果对每组 $x_1, \cdots, x_n \in U(X)$，有 $\min\limits_{j \neq k} \|x_j - x_k\| < 2 - \varepsilon$. Banach 空间 X 称为 P 凸的，如果对某个 n，及 $\varepsilon > 0$，它是 $P(n, \varepsilon)$ 凸的.

定义 4.4.8 Banach 空间 X 称为 $J(n, \varepsilon)$ 凸的，如果对每组 $x_1, \cdots, x_n \in U(X)$，有

$$\min_{1<k<n} \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=k+1}^{n} x_i \right\| < n - \varepsilon.$$

X 称为 J 凸的，如果它是 $J(n, \varepsilon)$ 凸的，对某个 n 和 $\varepsilon > 0$.

定理 4.4.12 Banach 空间 X 是超自反的，当且仅当它是 J 凸的. (证明见 D. van Dulst, Math. Centrum Amsterdan 1978 p. 215.)

定理 4.4.13 P 凸的 Banach 空间是超自反的.

证明：实际上，容易看到 P 凸 Banach 空间是 J 凸的 ($P(n, \varepsilon)$ 凸是 $J(n, \varepsilon)$ 凸的). 由定理 4.4.12 知，P 凸空间是超自反的.

注：阴洪生、赵俊峰、王崇祐：南京大学学报(1981)123—129，及阴洪生：数学年刊 Vol. 3 no. 5(1982) 617—625 研究了与 P 凸性质等价的 R 凸性质，得到若干性质.

定理 4.4.14 若 X 是 Banach 空间，则

X 是超自反 $\Leftrightarrow X$ 可以再赋范为一致凸的(记作 $\approx$ UC)

$\Leftrightarrow X$ 可以再赋范为一致光滑的($\approx$ UF)

(定义见定义 5.1.9)

$\Leftrightarrow X$ 可以再赋范是一致凸且一致光滑的

$\Leftrightarrow X$ 具超 BSP

$\Leftrightarrow X$ 具超 RNP

$\Leftrightarrow X$ 具超 KMP

$\Leftrightarrow$ 树列在 X 中生长(定义 4.4.9).

(见参考书[1]p.88.)

定义 4.4.9 Banach 空间 X 中的一个 $n-\varepsilon$ 树是 X 中一个点列 $\{x_k\}_{k=1}^{2^n-1}$,满足

(1) $x_i=\dfrac{x_{2i}+x_{2i+1}}{2}$, $i<2^n$

(2) $\|x_{2i}-x_{2i+1}\|\geqslant\varepsilon$.

称树列在 X 中生长,如果对每个 $\varepsilon>0$,每个 $k>0$,存在一个 $n(k,\varepsilon)$,使得,当 $n\geqslant n(k,\varepsilon)$,且 $\{x_i\}_{i=1}^{2^n-1}$ 是一个 $n-\varepsilon$ 树时,有 $r(\{x_i\}_{i=1}^{2^n-1})\equiv\max\{\|x_i\|;1\leqslant i\leqslant 2^n-1\}\geqslant k$.

注 1: G. Pisier (*Israel J. Math.* 20-3, 4(1975)326—350)已证明如果 X 是超自反 Banach 空间,则存在 $p>2$ 和 $c>0$ 和 X 上一个等价范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$,使$(X,|\!|\!|\cdot|\!|\!|)$是一致凸的,且它有一个凸性模 $\delta(\varepsilon)\equiv\inf\{1-1/2|\!|\!|x+y|\!|\!|; |\!|\!|x|\!|\!|=|\!|\!|y|\!|\!|=1, |\!|\!|x-y|\!|\!|\geqslant\varepsilon\}$满足,$\delta(\varepsilon)\geqslant c\varepsilon^p$,对每个 $\varepsilon>0$. 从 G. Pisier 证明中可以看到,$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$还可选取使$\|x\|\leqslant|\!|\!|x|\!|\!|\leqslant(1+\eta)\|x\|$,对任何指定的 η, $0<\eta<1$.

注 2: 由定理 4.4.14,容易证明定理 4.4.9 及定理 4.4.11. 事实上,若 X 是超自反的,则 $X\approx$UC,而 $Y\approx X$ 故 $Y\approx$UC,从而再应用定理 4.4.11 知 Y 是超自反的. 又 S. Kakutani 证明一致凸空间具 BSP(参考书[1]p.78),若 X 是超自反的,则 $X\approx$UC,但 Banach-Saks 性质是线性同胚不变的,故 X 具 Banach-Saks 性质. 定理 4.4.11 的第一个结论是由于一致非正方形是 $P(2,\varepsilon)$凸的,故由定理 4.4.13 即知。

注 3: 下面的例子是 M. M. Day(*Bull. A. M. S* 47(1941) 313—317)给出的,它是 BSP 空间,但非超自反的.

例 1: $X_M=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\oplus l_n^n\right)_2$,其中

$$l_n^n=\left\{(x_i)_{i=1}^n;\ x_i\in \boldsymbol{R}^1,\ \|(x_i)_{i=1}^n\|_n=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^n\right)^{1/n}\right\}.$$

M. M. Day 证明它不线性同胚于一致凸空间,根据定理

4.4.14，它不是超自反的．又，从 S. Kakutani 证明一致凸空间是具 BSP 的过程中看到，如果存在 $0<\theta<2$，使得对 Banach 空间 X 中任何 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，$x_n \xrightarrow{w} 0$，必存在 $x_i, x_j\in(x_n)_{n=1}^{\infty}$，使 $\|x_i+x_j\|<\theta$，则 X 具 wBSP．利用这点容易证明 X_M 具 BSP（见 J. R. Partington, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc* 82 (1977) 369–374）.

由于 BSP 空间是自反的，故 X_M 是自反的．这也说明，自反空间未必是超自反空间．□

下面例子是 A. Baernstein II (*Studia Math. T. XLII.* (1972) 91—94) 给出的．它是自反的，但不具 BSP.

例 2：称自然数的非空子集 σ 为可允许子集；如果 σ 是有限集，且 σ 的基数 $\leqslant\sigma$ 中的最小元.

令 $\Gamma=\{\sigma;\ \sigma$ 为可允许子集$\}$

对 $\sigma_1,\ \sigma_2\in\Gamma$，记 $\sigma_1<\sigma_2$，如果 σ_1 的最大元小于 σ_2 的最小元.

可允许子集的一个序列 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为块序列，如果 $\sigma_k<\sigma_{k+1}$，$\forall k\geqslant 1$.

对 $\sigma\in\Gamma$，和实数序列 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$，定义

$$S(x,\ \sigma)=\sum_{i\in\sigma}|x_i|.$$

对一个块序列 $\{\sigma_k\}$，定义

$$S(x,\ \{\sigma_k\})=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(S(x,\ \sigma_k))^2\right)^{1/2}.$$

且令 $\|x\|=\sup\{S(x,\ \{\sigma_k\});\ \{\sigma_k\}$ 是一个块序列$\}$

Baernstein II 空间为 $X_B=\{x=(x_n);\ \|x\|<+\infty\}$.

容易证明 X_B 是 Banach 空间，令

$$e_n=(0,\ \cdots,\ 0,\ \overset{\text{第}\,n\,\text{项}}{1},\ 0,\ \cdots).$$

容易看到 $\|e_n\|=1$.

下面证明 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 是有界完备、收缩基，利用定理 2.2.4 即知

X_B 是自反的. 又由于 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 是收缩基, 故 $e_n \xrightarrow{w} 0$. 令 $\{e_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任何子序列. 如果

$$S_k = k^{-1}\sum_{i=1}^{k} e_{n_i} \to x \in X_B,$$

则 $x=0$. 但这是不可能的, 因为若选 $\sigma = \{n_{n+1}, \cdots, n_{2n}\}$ 则

$$\|S_{2n}\| > \frac{1}{2}, \ \forall n.$$

故 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有子序列, 使子序列的算术平均值范数收敛. 因此 X_B 不具 BSP.

(1) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X_B 的基. 事实上, 对每个 $x \in X_B$, 记

$$T^n x = x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

若 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是基, 则存在 $x \in X_B$, 使 $\|T^n x\| > 1$, $\forall n$. 特别地, $\|x\| > 1$. 故在 Γ 中存在 $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_{p(1)}$, 使

$$\sum_{k=1}^{p(1)} S(x, \sigma_k)^2 > 1.$$

令 m 是 $\sigma_{p(1)}$ 中最大的元, 由于 $\|T^m x\| > 1$, 故在 Γ 中存在 $\sigma_{p(1)+1} < \cdots < \sigma_{p(2)}$, 使 $\sigma_{p(1)} < \sigma_{p(1)+1}$, 且

$$\sum_{k=p(1)+1}^{p(2)} S(x, \sigma_k)^2 = \sum_{k=p(1)+1}^{p(2)} S(T^m x, \sigma_k)^2 > 1.$$

故

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{p(2)} S(x, \sigma_k)^2 > 2,$$

继续下去, 得到 $\|x\| = +\infty$, 矛盾! 故 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X_B 的基.

(2) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界完备的. 事实上, 假设 $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个实数序列, 使

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| < +\infty,$$

容易看到, $x \in X_B$. 由于 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X_B 的基, 故

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = x.$$

特别地, 它表明级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ 是收敛的. 故 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界完备

基.

(3) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收缩基. 事实上, 假设不然, 则存在 $x^* \in X_B^*$, 及正整数的严格增加序列 $\{p(m)\}_{m=1}^{\infty}$, 其中 $p(1)=1$, 和 X_B 中一个序列 $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$, 使 $\|x^m\| \leqslant 1$, $x^*(x^m) \geqslant \delta > 0$, $\forall m$, 对某个 δ. 且 x^m 的坐标 x_i^m, 除了 $p(m) \leqslant i < p(m+1)$ 外, 全为 0.

令 $Q(0)=1$, 定义

$$Q(n)=Q(n-1)+p(Q(n-1)),\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

定义
$$v^n=\frac{1}{n}\frac{1}{Q(n)-Q(n-1)}\sum_{m=Q(n-1)}^{Q(n)-1} x^m,$$

且令 x 是一个序列, 它定义为

$$x_i=v_i^n,\ p(Q(n-1)) \leqslant i < p(Q(n)).$$

下面将证明 $x \in X_B$, 于是 $x=\sum_{n=1}^{\infty} v^n$, 这表明级数在 X_B 中收敛, 但这是不可能的, 因为 $x^*(v^n) \geqslant n^{-1}\delta$. 这个矛盾说明 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收缩基.

令 $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是任何块序列, 对 $n=1、2、\cdots$, 令

$A(n)=\{k;\ \sigma_k$ 的最小元在 $[p(Q(n-1)),\ p(Q(n))]$ 中$\}$.

又令 $\mu(n)$ 为 $A(n)$ 的最大元.

当 $k \in A(n)$, 且 $k < \mu(n)$ 时, σ_k 全部落在 $[p(Q(n-1)),\ p(Q(n)))$ 中, 故 $S(x,\ \sigma_k)=S(v^n,\ \sigma_k)$, 从而

$$\sum_{k \in A(n)} S(x,\ \sigma_k)^2 \leqslant \|v^n\|^2+S(x,\ \sigma_{\mu(n)})^2 \tag{4.6}$$

已知, $\|v^n\| \leqslant n^{-1}$. 为了计算 $S(x,\ \sigma_{\mu(n)})$, 记 $\sigma_{\mu(n)}=\sigma' \cup \sigma''$, 其中 $\sigma'=\sigma_{\mu(n)} \cap (0,\ p(Q(n)))$, $\sigma''=\sigma_{\mu(n)} \backslash \sigma'$, 则 $S(x,\ \sigma')=S(v^n,\ \sigma') \leqslant n^{-1}$. 又因 $\sigma_{\mu(n)} \in \Gamma$, 故 $S(x,\ \sigma'')$ 为小于等于 $p(Q(n))$ 项之和, 而其中的每一项为

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{1}{Q(N)-Q(N-1)} \cdot a$$

形式, 其中 $N \geqslant n+1$, $0 \leqslant a \leqslant 1$. 又由于 $Q(N)-Q(N-1)=p(Q(N-1))$, 而 $p(\cdot)$ 是增加的函数, 故每一项小于

$n^{-1}p(Q(n))^{-1}$,因此,$S(x, \sigma'')<n^{-1}$. 故

$$S(x, \sigma_{\mu(n)})^2=(S(x, \sigma')+S(x, \sigma''))^2<4n^{-2}. \qquad (4.7)$$

由(4.6)、(4.7)知,

$$\sum_{k\in A(n)} S(x, \sigma_k)^2<5n^{-2}.$$

从而, $S(x, \{\sigma_k\})^2=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in A(n)}\sigma(x, \sigma_k)^2<5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 由于 $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是任何块序列,故

$$\|x\|<\sqrt{5}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}<+\infty.$$

这表明 $x\in X_B$. □

Baernstein II 反例是很有用的. 我们将在第五章中再用到.

第五章　凸性、光滑性及范数可微性

Banach 空间的单位球的凸性研究，最早是由 J. Clarkson 在 1936 年讨论向量测度的 Radon-Nikodym 定理时开始的. 尔后，人们又讨论了各种凸性，它们在最佳逼近及不动点理论中有着重要的应用. 光滑性，一方面作为凸性的对偶性质而提出；另一方面，它与范数——作为一种特殊的凸函数的各种可微性质有密切联系. 本章，首先归纳各种常见凸性、光滑性和可微性定义，然后指出它们之间的联系，以及它们与空间自反性的关系. 就一般而论，还有许多关于具有各种凸性、光滑性和可微性空间本身的性质，例如，子空间、商空间及乘积空间是否仍然具有所说的性质. 由于篇幅有限，我们没有进行讨论.

§1　凸性、光滑性及范数可微性的定义

(一)凸性.

定义 5.1.1　Banach 空间 X 称为一致凸的，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x, y\in S(X)$，$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|>1-\delta$ 时，有 $\|x-y\|<\varepsilon$.

注：若对每个 Banch 空间 X，定义(一维)凸性模 $\delta_X(\varepsilon)$，

$$\delta_X(\varepsilon)=\inf\left\{1-\frac{\|x+y\|}{2};\ x,\ y\in S(X),\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon\right\}$$

容易看到，δ_X 定义了一个从 $[0, 2]$ 到 $[0, 1]$ 的函数，并且，X 是一致凸的充要条件是对任何 $\varepsilon\in(0, 2]$，有 $\delta_X(\varepsilon)>0$.

定义 5.1.2　Banach 空间 X 称为 K 一致圆形的 (KUR)，

如果对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1, \cdots, x_{k+1}\in S(X)$, $\|x_1+\cdots+x_{k+1}\|>(k+1)-\delta$ 时, 有

$$A(x_1, \cdots, x_{k+1})\equiv\sup\left\{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{k+1}) \\ \vdots & & \\ f_k(x_1) & \cdots & f_k(x_{k+1}) \end{vmatrix}; \begin{array}{l} f_i\in S(X^*) \\ i=1, \cdots, k \end{array}\right\}<\varepsilon,$$

其中大括号内表示行列式.

注: 也称 $A(x_1, \cdots, x_{k+1})$ 为由 $x_1, \cdots, x_{k+1}$ 生成的凸集的体积.

定义 5.1.3 Banach 空间 X 称为局部一致凸的 (LUC), 如果对任何 $\varepsilon>0$, $x\in S(X)$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon, x)>0$, 使得, 当 $y\in S(X)$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|>1-\delta$ 时, 有 $\|x-y\|<\varepsilon$.

定义 5.1.4 Banach 空间 X 称为局部 K 一致圆形的 (LKUR), 如果对任何 $\varepsilon>0$, $x\in S(X)$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon, x)>0$, 使得, 当 $x_1, \cdots, x_k\in S(X)$, $\|x+x_1+\cdots+x_k\|>(k+1)-\delta$ 时, 有 $A(x, x_1, \cdots, x_k)<\varepsilon$.

定义 5.1.5 Banach 空间 X 称为中点局部一致凸的, (MLUR), 如果对任何 $\varepsilon>0$, $x\in S(X)$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon, x)>0$, 使得, 当 $x_1, x_2\in S(X)$, $\left\|x-\frac{x_1+x_2}{2}\right\|<\delta$时, 有$\|x_1-x_1\|<\varepsilon$.

定义 5.1.6 Banach 空间 X 称为弱局部一致凸的, (w LUC), 如果对任 $\varepsilon>0$, $x\in S(X)$, $f\in S(X^*)$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon, x, f)>0$, 使得, 当 $y\in S(X)$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|>1-\delta$ 时, 有 $|f(x-y)|<\varepsilon$.

定义 5.1.7 Banach 空间 X 称为各向局部一致凸的 (UCED), 如果对任 $\varepsilon>0$, $z\in X\setminus\{0\}$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon, z)>0$, 使得当$x$、$y\in S(X)$, $x-y=\lambda z$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|>1-\delta$ 时, 有 $|\lambda|<\varepsilon$.

定义 5.1.8 Banach 空间 X 称严格凸的(SC 或 R)，如果 $S(X)$ 的每个点是 $U(X)$ 的端点.

注 1：还有一些其他的凸性定义见参考书[2]p. 145.

注 2：与概率论有关的 B 凸、P 凸等定义及研究见 Giesy, *Trans. A. M. S.* 125(1966)114—146, 或 D. R. Brown, *Trans. A. M. S.* 187(1974)69—81.

注 3：关于高次共轭空间的凸性定义及研究见 F. Sullivan, *Illinois J. Math.* 21(1977)*no.* 2, 315—331.

(二)光滑性.

定义 5.1.9 Banach 空间 X 称为一致光滑的(US)，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得，当 $x\in S(X)$，$0<\|y\|<\delta$ 时，有

$$\frac{\|x+y\|+\|x-y\|-2}{\|y\|}<\varepsilon.$$

定义 5.1.10 Banach 空间 X 称为强光滑的，如果对任何 $x\in S(X)$，当 $f_n\in S(X^*)$，$f_n(x)\to 1$ 时，有某个 $f\in S(X^*)$，使 $\|f_n-f\|\to 0$.

注：可以证明，此时定义中的 f 是 x 点的唯一的支撑泛函. 即 $\|f\|=\|x\|=f(x)=1$.

定义 5.1.11 如果对每个 $x\in S(X)$，$J_X(x)$ 在 $S(X^{***})$ 中有唯一的支撑泛函，则称 Banach 空间 X 为非常光滑的 (very smooth).

定义 5.1.12 如果对每个 $x\in S(X)$，在 $S(X^*)$ 中有 x 的唯一的支撑泛函，则称 Banach 空间 X 是光滑空间(S).

注 1：关于高次共轭空间的光滑性定义及研究见 F. Sullivan, *Illinois J. Math.* 21(1977)*no.* 2 315～331.

注 2：当 $x\in S(X)$ 满足定义 5.1.10，定义 5.1.11，定义 5.1.12 中所述性质时，则 x 点分别称为强光滑点，非常光滑点及光滑点.

(三)范数的可微性.

定义 5.1.13 Banach 空间 X 称为 Gateaux 可微空间，如果 X 的范数满足下列条件，对任何 $x_0\in S(X)$，和 $y\in S(X)$，及 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon, x_0, y)>0$，及数 $\rho(x_0, y)$，使得当 $|\lambda|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{\|x_0+\lambda y\|-\|x_0\|}{\lambda}-\rho(x_0, y)\right|<\varepsilon.$$

定义 5.1.14 Banach 空间 X 称为一致 Gateaux 可微空间，如果对任何固定的 $y_0\in S(X)$，$\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon, y_0)>0$，和实值函数 $\rho(x, y_0)$，其中 $x\in S(X)$，使得当 $|\lambda|<\delta$ 时，有

$$\sup\left\{\left|\frac{\|x+\lambda y_0\|-\|x\|}{\lambda}-\rho(x, y_0)\right|;\ x\in S(X)\right\}<\varepsilon.$$

定义 5.1.15 Banach 空间 X 称为 Fréchet 可微空间（F 空间），如果对任何 $x_0\in S(X)$，$\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$，及实值函数 $\rho(x_0, y)$，其中 $y\in S(X)$，使得，当 $|\lambda|<\delta$ 时，有

$$\sup\left\{\left|\frac{\|x_0+\lambda y\|-\|x_0\|}{\lambda}-\rho(x_0, y)\right|;\ y\in S(X)\right\}<\varepsilon.$$

定义 5.1.16 Banach 空间 X 称为一致 Fréchet 可微空间（UF 空间），如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，及二元实值函数 $\rho(x, y)$，其中 x、$y\in S(X)$，使得，当 $|\lambda|<\delta$ 时，有

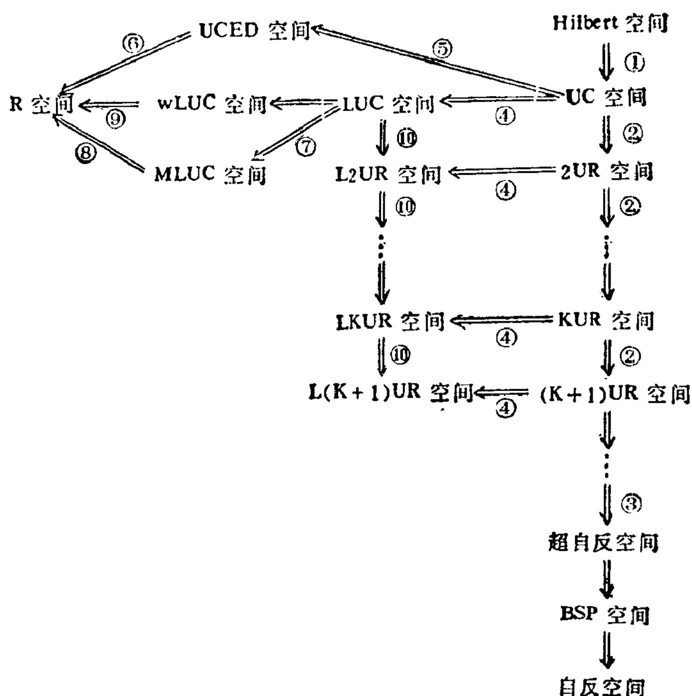
$$\sup\left\{\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\rho(x,y)\right|;x\in S(X),\ y\in S(X)\right\}<\varepsilon.$$

注：定义 5.1.1 到定义 5.1.16 有各种等价形式，这里不详细叙述。

§2 凸性、光滑性及范数可微性的各种关系

（一）各种凸性的关系：

首先，我们列出下面的关系图。



其中 ① 表示定理 5.2.1 等等.

定理 5.2.1 Hilbert 空间是一致凸的.

证明：对任何 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon^2}{4}$（不妨设 $\varepsilon<2$），则当 $x, y\in S(X)$，$\|x+y\|>2-\delta$ 时，

$$\|x+y\|^2>(2-\delta)^2=\left(2-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^2.$$

应用平行四边形法则，有

$$\|x-y\|^2=4-\|x+y\|^2<4-\left(2-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^2=\varepsilon^2-\frac{\varepsilon^4}{16}<\varepsilon^2,$$

故 $\|x-y\|<\varepsilon$. □

注：容易计算 Hilbert 空间的凸性模 $\delta_H(\varepsilon)=1-\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}$.

定理 5.2.2 对任何正整数 K，KUR 空间 ⇒ (K+1) UR 空间。

证明：容易看到，对任何正整数 k，Banach 空间 X 是 KUR 空间，当且仅当，对范数等于 1 的 $(k+1)$ 个 X 中元的序列 $\{(x_1^n, \cdots, x_{k+1}^n); n=1, 2, \cdots\}$，若当 $n\to\infty$ 时，满足

$$\|x_1^n+\cdots+x_{k+1}^n\|\to k+1,$$

则有
$$A(x_1^n, \cdots, x_{k+1}^n)\to 0, \quad n\to\infty.$$

设 $\{(x_1^n, \cdots, x_{k+2}^n); n=1, 2, \cdots\}$ 为范数等于 1 的 $(k+2)$ 个 X 中元的序列，且满足，当 $n\to\infty$ 时，$\|x_1^n+\cdots+x_{k+2}^n\|\to K+2$，则利用三角不等式，容易知道，对任何 j，$1\leqslant j\leqslant k+2$，有

$$\|x_1^n+\cdots+x_{j-1}^n+x_{j+1}^n+\cdots+x_{k+2}^n\|\to k+1,$$

由于 X 是 KUR 的，利用 KUR 空间等价定义，有

$$A(x_1^n, \cdots, x_{j-1}^n, x_{j+1}^n, \cdots, x_{k+2}^n)\to 0, \quad 1\leqslant j\leqslant k+2.$$

但由行列式的性质，容易知道，

$$A(x_1^n, \cdots, x_{k+2}^n)\leqslant \sum_{j=1}^{k+2} A(x_1^n, \cdots, x_{j-1}^n, x_{j+1}^n, \cdots, x_{k+2}^n),$$

故 $A(x_1^n, \cdots, x_{k+2}^n)\to 0$. 再利用 $(K+1)$UR 的等价定义知 X 是 (K+1) UR 空间. □

定理 5.2.3 对任何正整数 K，KUR 空间是超自反的.

证明：利用 James 定理（定理 4.2.4），若 X 不是自反的，则对每个 ε，$0<\varepsilon<1$，选 θ，$0<\theta<1$，使 $\theta>1-\dfrac{\delta(\varepsilon)}{k+1}$，且 $\theta^k>\varepsilon$，其中 $\delta(\varepsilon)$ 是 KUR 空间定义中相应于 ε 的 δ 选取。因而存在 $\{x_1, \cdots, x_{k+1}\}\subset S(X)$，$\{x_1^*, \cdots, x_{k+1}^*\}\subset S(X^*)$，使

$$x_j^*(x_i)=\begin{cases}\theta & \text{当 } j\leqslant i \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } j>i \text{ 时}.\end{cases}$$

因此，$\|x_1+\cdots+x_{k+1}\|\geqslant x_1^*(x_1+\cdots+x_{k+1})=(k+1)\theta>(k+1)-\delta(\varepsilon)$，但

$$\varepsilon<\theta^k=\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ x_2^*(x_1) & \cdots & x_2^*(x_{k+1})\\ \vdots & & \vdots\\ x_{k+1}^*(x_1) & \cdots & x_{k+1}^*(x_{k+1})\end{vmatrix}\leqslant A(x_1,\ \cdots,\ x_{k+1}),$$

这与 X 是 KUR 空间矛盾！故当 X 是 KUR 空间时，X 必是自反的．下面进一步证明对每个在 X 中有限表示的 Banach 空间 Y，Y 也必是 KUR 的，从而 Y 也必是自反的，因此 X 是超自反的．

若 Banach 空间 Y 在 X 中有限表示，但 Y 不是 KUR 空间，利用定理 5.2.2 中 KUR 空间的一个等价形式知，存在范数为 1 的 $(k+1)$ 个元组成的序列 $\{(y_1^n,\ \cdots,\ y_{k+1}^n);n=1,\ 2\cdots\}$，使 $\lim\limits_{n}\|y_1^n+\cdots+y_{k+1}^n\|=k+1$，但是

$$A(y_1^n,\ \cdots,\ y_{k+1}^n)>\varepsilon,\text{对某个 }\varepsilon>0.$$

利用有限表示定义，容易得到 X 中范数为 1 的 $(k+1)$ 个元组成的序列 $\{(x_1^n,\ \cdots,\ x_{k+1}^n);n=1,\ 2,\ \cdots\}$，使得 $\lim\limits_{n}\|x_1^n+\cdots+x_{k+1}^n\|=k+1$，但是

$$A(x_1^n,\ \cdots,\ x_{k+1}^n)>\frac{\varepsilon}{2}>0,$$

这与 X 是 KUR 空间矛盾！□

注：从定理证明中，我们看到实际上有

X 是 KUR 空间 $\Leftrightarrow$ X 是超 KUR 空间 $\Rightarrow$ X 是超自反空间．

定理 5.2.4 对任何正整数 K，KUR 空间 $\Rightarrow$ LKUR 空间．

证明：从定义直接得出．□

定理 5.2.5 一致凸空间是各向一致凸的．

证明：只须对 $z\neq0$，及 $\varepsilon>0$，考虑一致凸空间定义中相应于 $\varepsilon\|z\|$ 的 $\delta(\varepsilon\|z\|)$ 即可．□

定理 5.2.6 各向一致凸空间是严格凸的．

证明：若存在 $x\neq y$，使 $[x, y]\equiv\{\alpha x+(1-\alpha)y; 0\leqslant\alpha\leqslant1\}\subset S(X)$，令 $\varepsilon=\|x-y\|$，$z=x-y$，则对任何 $\delta>0$，$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|=1>1-\delta$，但 $\|x-y\|=\|z\|=\varepsilon$. 这与 X 是各向一致凸空间矛盾. □

定理 5.2.7 局部一致凸空间是中点局部一致凸的.

证明：对任何 $\varepsilon>0$，$x_0\in S(X)$，选

$$\delta_1(x_0, \varepsilon)=\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon, x_0\right),$$

其中 $\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon, x_0\right)$ 是局部一致凸空间定义中相应于点 x_0 及 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的数 δ.

当 x_1、$x_2\in S(X)$，$\left\|x_0-\frac{x_1+x_2}{2}\right\|<\delta_1$ 时，选 $f\in S(X^*)$，使 $f(x_0)=1$，则

$$f(x_1)>1-2\delta,\ f(x_2)>1-2\delta,$$

从而，$\|x_0+x_2\|>2-2\delta$，$\|x_1+x_0\|>2-2\delta$，故

$$\|x_0-x_1\|<\frac{\varepsilon}{2},\ \|x_0-x_2\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而 $\|x_1-x_2\|<\varepsilon$，故 X 是中点局部一致凸的. □

定理 5.2.8 中点局部一致凸空间是严格凸的.

证明：若存在 $x, y\in S(X)$，$x\neq y$，使 $[x, y]\subset S(X)$，选 $x_0=\frac{x+y}{2}$，令 $\|x-y\|=\varepsilon$，则对一切 $\delta>0$，$\left\|x_0-\frac{x+y}{2}\right\|=0$，但 $\|x-y\|=\varepsilon$，这与 X 是中点局部一致凸空间矛盾！□

定理 5.2.9 w 局部一致凸空间是严格凸的.

证明：若存在 $x, y\in S(X)$，$x\neq y$，使 $[x, y]\subset S(X)$，取 $x_0=\frac{x+y}{2}$，及 $f\in S(X^*)$，使 $f(x)\neq f(y)$，因而，$f(x_0)\neq f(x)$，令 $\varepsilon=|f(x_0)-f(x)|$，这时，有 $\|x_0+x\|=2$，但是，$|f(x_0)-f(x)|=\varepsilon$. 这与 X 是 w 局部一致凸空间矛盾！□

定理 5.2.10 局部 KUR 空间是局部(K+1)UR 空间，对

任何正整数 K.

证明：仿定理 5.2.2.

(二)范数可微性与光滑性的关系.

为了研究范数可微性与光滑性的关系，我们引入支撑映像，作为一种工具.

由 Hahn-Banach 定理，对每个 $x\in S(X)$，至少存在一个 $f\in S(X^*)$，使 $f(x)=1$.

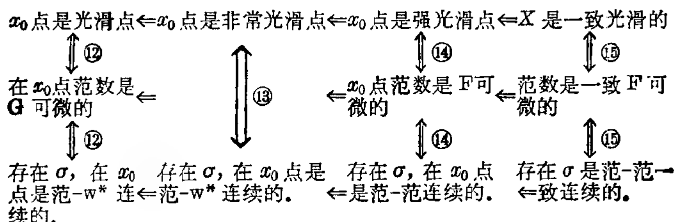
令 $\sum(x)=\{f; f\in S(X^*),\ f(x)=1\}$，$\forall x\in S(X)$. 容易看到 $\sum(x)$ 是 X^* 中非空 w* 紧凸集，且 $\sum(x)\subset S(X^*)$，$\forall x\in S(X)$.

定义 5.2.1 $\sum: S(X)\to 2^{S(X^*)}$，对 $x\in S(X)$，$\sum(x)=\{f; f\in S(X^*),\ f(x)=1\}$，称为支撑映像. 其中 $2^{S(X^*)}$ 表示 $S(X^*)$ 的一切子集构成的集.

注 1：支撑映像一般是集值映像. 显然，支撑映像是单值的当且仅当 X 是光滑的. 又支撑映像 $\sum$ 的任一"截口"σ，即 $\sigma: S(X)\to S(X^*)$，其中 $\sigma(x)\in\sum(x)$，$\forall x\in S(X)$，称为一个支撑函数.

注 2：令 $\sigma(\lambda x)=\lambda\sigma(x)$，$\lambda\geqslant 0$，则支撑函数可延拓到定义在整个空间上，且满足 $\langle y,\sigma(y)\rangle=\|y\|^2$.

光滑性、范数可微性及支撑函数的连续性之间关系如下：



其中，⑫ 表示定理 5.2.12 等等.

首先，我们证明下面有用的引理.

引理 5.2.11 若 $\lambda>0$，$x,\ y\in S(X)$，σ 是任何支撑函数，

则

$$\frac{\langle y,\ \sigma(x)\rangle}{\|x\|}\leqslant\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}\leqslant\frac{\langle y,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle}{\|x+\lambda y\|}.$$

证明:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle y,\ \sigma(x)\rangle}{\|x\|}&=\frac{\langle \lambda y,\ \sigma(x)\rangle}{\lambda\|x\|}\\
&=\frac{\langle x,\ \sigma(x)\rangle+\langle \lambda y,\ \sigma(x)\rangle-\|x\|^2}{\lambda\|x\|}\\
&\leqslant\frac{|\langle x+\lambda y,\ \sigma(x)\rangle|-\|x\|^2}{\lambda\|x\|}\leqslant\frac{\|\sigma(x)\|\|x+\lambda y\|-\|x\|^2}{\lambda\|x\|}\\
&=\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda\|x\|}=\frac{\|x+\lambda y\|^2-\|x\|\cdot\|x+\lambda y\|}{\lambda\|x+\lambda y\|}\\
&\leqslant\frac{\|x+\lambda y\|^2-|\langle x,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle|}{\lambda\|x+\lambda y\|}\\
&=\frac{\langle x+\lambda y,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle-|\langle x,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle|}{\lambda\|x+\lambda y\|}\\
&=\frac{\langle \lambda y,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle+\langle x,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle-|\langle x,\sigma(x+\lambda y)\rangle|}{\lambda\|x+\lambda y\|}\\
&\leqslant\frac{\langle y,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle}{\lambda\|x+\lambda y\|}.\ \square
\end{aligned}$$

推论 若 $0<|\lambda|<1$, 则

$$\left|\frac{\langle y,\ \sigma(x)\rangle}{\|x\|}-\frac{\langle y,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle}{\|x+\lambda y\|}\right|$$

$$\leqslant\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}+\frac{1}{1-|\lambda|}|\langle y,\ \sigma(x)\rangle-\langle y,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle|.$$

证明:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\langle y,\ \sigma(x)\rangle}{\|x\|}-\frac{\langle y,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle}{\|x+\lambda y\|}\right|\\
&\quad\leqslant\left|\frac{\langle y,\ \sigma(x)\rangle}{\|x\|}-\frac{\langle y,\ \sigma(x)\rangle}{\|x+\lambda y\|}\right|\\
&\qquad+\left|\frac{\langle y,\ \sigma(x)\rangle}{\|x+\lambda y\|}-\frac{\langle y,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle}{\|x+\lambda y\|}\right|\\
&\quad\leqslant|\langle y,\ \sigma(x)\rangle|\cdot\left|1-\frac{1}{\|x+\lambda y\|}\right|
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\|x+\lambda y\|}|\langle y,\ \sigma(x)\rangle-\langle y,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle|$$

$$\leqslant\left|1-\frac{1}{\|x+\lambda y\|}\right|$$

$$+\frac{1}{\|x+\lambda y\|}|\langle y,\ \sigma(x)\rangle-\langle y,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle|$$

$$\overset{(*)}{\leqslant}\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}+\frac{1}{1-|\lambda|}|\langle y,\ \sigma(x)\rangle-\langle y,\ \sigma(x+\lambda y)\rangle|,$$

((*)因为 $\|x+\lambda y\|\geqslant\|x\|-|\lambda|\,\|y\|=1-|\lambda|>0$, 故

$$\frac{1}{\|x+\lambda y\|}<\frac{1}{1-|\lambda|}.$$

又当 $\|x+\lambda y\|<1$ 时,则

$$\left|1-\frac{1}{\|x+\lambda y\|}\right|=\frac{1}{\|x+\lambda y\|}-1$$

$$\leqslant\frac{1}{1-|\lambda|}-1=\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|},$$

当 $\|x+\lambda y\|\geqslant 1$ 时,则

$$\left|1-\frac{1}{\|x+y\|}\right|=1-\frac{1}{\|x+\lambda y\|}$$

$$\leqslant 1-\frac{1}{1+|\lambda|}=\frac{|\lambda|}{1+|\lambda|}\leqslant\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}.\Big).\ \square$$

定理 5.2.12 若 X 是 Banach 空间,则下列等价:

(1) x_0 点是光滑的.

(2) 每个支撑函数 σ: $S(X)\to S(X^*)$ 在 x_0 点范数到 w^* 连续.

(3) 存在一个支撑函数 σ: $S(X)\to S(X^*)$ 在 x_0 点范数到 w^* 连续.

(4) 范数在 x_0 点是 G 可微的.

证明: (1)⇒(2) 任取支撑函数 σ: $S(X)\to S(X^*)$, 选 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$, 且 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0$.

考虑 $\{\sigma(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 只须证明 $\{\sigma(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的任何子序列 $\{\sigma(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 有唯一的 w^* 闭包点 f_{x_0} (x_0 点唯一的支撑泛函) 即

可.

由于 $\{\sigma(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}\subset U(X^*)$, 由 Banach-Aloaglu 定理, $\{\sigma(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ 有子定向列 $\{\sigma(x_\delta)\}$, 使

$$\sigma(x_\delta)\xrightarrow{w^*}f,$$

从而 $\|f\|\leqslant 1$, 且

$$\begin{aligned}|\langle x_0, f\rangle-1|&=|\langle x_0, f\rangle-\langle x_\delta, \sigma(x_\delta)\rangle|\\&\leqslant|\langle x_0, f\rangle-\langle x_0, \sigma(x_\delta)\rangle|\\&\quad+|\langle x_0, \sigma(x_\delta)\rangle-\langle x_\delta, \sigma(x_\delta)\rangle|\\&\leqslant|\langle x_0, f-\sigma(x_\delta)\rangle|+\|x_0-x_\delta\|\to 0.\end{aligned}$$

故 $\langle x_0, f\rangle=1$, 从而, $\|f\|=1$, 所以, f 也是 x_0 点支撑泛函, 由 x_0 点支撑泛函唯一性知, $f=f_{x_0}$. □

(2)⇒(3) 显然成立.

(3)⇒(4) 令 σ 是 $S(X)\to S(X^*)$ 的一个支撑函数, 它在 x_0 点范-w* 连续.

任给 $y\in S(X)$, $\varepsilon>0$, 则存在 $\delta(\varepsilon, x_0, y)$, 使 $\delta<\varepsilon$, $\delta<4$, 且当 $|\lambda|<\delta$ 时, 有

$$|\langle y, \sigma(x_0)\rangle-\langle y, \sigma(x_0+\lambda y)\rangle|<\varepsilon.$$

由引理 5.2.11 及推论知,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\|x_0+\lambda y\|-\|x_0\|}{\lambda}-\frac{\langle y, \sigma(x_0)\rangle}{\|x_0\|}\right|\\&\leqslant\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}+\frac{1}{1-|\lambda|}|\langle y, \sigma(x_0)\rangle-\langle y, \sigma(x_0+\lambda y)\rangle|\\&\leqslant\frac{\delta+\varepsilon}{1-|\lambda|}<\frac{\delta+\varepsilon}{1-\delta}<\frac{8}{3}\varepsilon<3\varepsilon.\ \square\end{aligned}$$

(4)⇒(1) 令 $y\in S(X)$, $f\in\sum(x_0)$, 由引理 5.2.11 知,

$$f(y)=\frac{\langle y, \sigma(x_0)\rangle}{\|x_0\|}\leqslant\frac{\|x_0+\lambda y\|-\|x_0\|}{\lambda},\ \forall\lambda>0,$$

$$f(y)\geqslant\frac{\|x_0+\lambda y\|-\|x_0\|}{\lambda},\ \forall\lambda<0.$$

因为在 x_0 点范数是 G 可微的. 当 $\lambda\searrow 0$ 时, 有 $f(y)\leqslant\rho(x_0, y)$,

当 $\lambda\nearrow 0$ 时，有 $f(y)\geqslant\rho(x_0, y)$，故 $f(y)=\rho(x_0, y)$，因此 $\Sigma(x_0)=\{\rho(x_0, \cdot)\}$，即 $\Sigma(x_0)$ 是单点集．故 x_0 点是光滑点．□

定理 5.2.13 若 X 是 Banach 空间，则下列等价：

(1) x_0 点是非常光滑点．

(2) 若 $\{x_n^*\}, \{y_n^*\}\subset S(X^*)$，且 $x_n^*(x_0)\to 1$，$y_n^*(x_0)\to 1$，则 $x_n^*-y_n^*\xrightarrow{\text{w}}0$．

(3) 每个支撑函数 σ：$S(X)\to S(X^*)$ 在 x_0 点范数-w 连续．

(4) 存在一个支撑函数 σ：$S(X)\to S(X^*)$ 在 x_0 点范数-w 连续．

证明：(1)⇒(2) 若(2)不成立，则存在 $\{x_n^*\}, \{y_n^*\}\subset S(X^*)$，$x^{**}\in S(X^*)$，和 $a>0$，使 $x_n^*(x_0)\to 1$，$y_n^*(x_0)\to 1$，而 $|x^{**}(x_n^*-y_n^*)|>a>0$，$\forall n$．

由于 $U(X^{***})$ 是 $\sigma(X^{***}, X^{**})$ 紧的．设 x_0^{***}、y_0^{***} 分别为 $\{\hat{x}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$，$\{\hat{y}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 的某个 w* 极限．则 $x_0^{***}(\hat{x}_0)=y_0^{***}(\hat{x}_0)=1$，但 $|(x_0^{***}-y_0^{***})(x^{**})|\geqslant a>0$，从而 x_0^{***}，y_0^{***} 是 $\hat{x}_0$ 在 X^{***} 中两个不同的支撑泛函，这与 x_0 点是非常光滑点矛盾！□

(2)⇒(3) 设 σ：$S(X)\to S(X^*)$ 是任一支撑函数．

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$，且 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0$．则

$$|\sigma(x_n)(x_0)-1|=|\sigma(x_n)(x_0)-\sigma(x_n)(x_n)|\leqslant\|x_n-x_0\|\to 0,$$

故 $\sigma(x_n)(x_0)\to 1$，由条件(2)知，$\sigma(x_n)-\sigma(x_0)\xrightarrow{\text{w}}0$，即

$$\sigma(x_n)\xrightarrow{\text{w}}\sigma(x_0),$$

这就表明支撑函数 σ 在 x_0 点范-w连续．□

(3)⇒(4) 显然成立．

(4)⇒(1) 只须将定理 5.2.12 证明 (iii)⇒(iv) 中 $y\in S(X)$ 换成 $y^{**}\in S(X^{**})$，就得到

$$\left|\frac{\|\hat{x}_0+\lambda y^{**}\|-\|\hat{x}_0\|}{\lambda}-\frac{\langle y^{**}, \widehat{\sigma(x_0)}\rangle}{\|x_0\|}\right|<3\varepsilon.$$

这表明 X^{**} 在范数在 $\hat{x}_0$ 点是 G 可微的. 再应用定理 5.2.12 (4)⇒(1) 知, $\hat{x}_0$ 点是 $U(X^{**})$ 的光滑点, 即 x_0 是非常光滑点. □

注: 从非常光滑定义看到, 若 $\hat{x}_0$ 是 $U(X^{**})$ 的光滑点, 则 x_0 点是非常光滑点. 于是, 立即看到, X^{**} 光滑⇒X 非常光滑.

又从定理 5.2.13 的证明中看到:

X 是非常光滑的⇔X^{**} 的范数在 $S(X)$ 的每个点是 G 可微的.

定理 5.2.14 若 X 是 Banach 空间, 则下列等价:

(1) x_0 点是强光滑点.

(2) 每个支撑函数 σ: $S(X)\to S(X^*)$ 在 x_0 点范-范连续.

(3) 存在一个支撑函数 σ: $S(X)\to S(X^*)$ 在 x_0 点范-范连续.

(4) 范数在 x_0 点是 F 可微的.

证明: (1)⇒(2) 令 σ: $S(X)\to S(X^*)$ 是任意一个支撑函数.

若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$, $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$, 则

$$\langle x_0, \sigma(x_n)\rangle=\langle x_0-x_n+x_n, \sigma(x_n)\rangle$$
$$=\langle x_0-x_n, \sigma(x_n)\rangle+\langle x_n, \sigma(x_n)\rangle.$$

但是, $$|\langle x_0-x_n, \sigma(x_n)\rangle|\leqslant\|x_0-x_n\|\to 0,$$

又 $\langle x_n, \sigma(x_n)\rangle=1$, 故 $\langle x_0, \sigma(x_n)\rangle\to 1$, 由条件 (1) 知,

$$\|\sigma(x_n)-\sigma(x_0)\|\to 0.$$

即 (2) 成立. □

(2)⇒(3) 显然成立.

(3)⇒(4) 设 σ: $S(X)\to S(X^*)$ 是支撑函数, 它在 x_0 点是范-范连续的. 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得, 当 $y\in S(X)$, $|\lambda|<\delta_1$ 时, 有

$$\|\sigma(x_0)-\sigma(x_0+\lambda y)\|<\varepsilon/3.$$

选 $\delta_2>0$, 使得当 $|\lambda|<\delta_2$ 时, 有

$$\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $\delta=\min\left(\delta_1,\ \delta_2,\ \frac{1}{2}\right)$，根据引理 5.2.11 及推论，有

$$\left|\frac{\|x_0+\lambda y\|-\|x_0\|}{\lambda}-\langle y,\ \sigma(x_0)\rangle\right|$$

$$\leqslant\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}+\frac{1}{1-|\lambda|}\|\sigma(x_0)-\sigma(x_0+\lambda y)\|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+2\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

这表明范数在 x_0 点是 F 可微的. □

(4)⇒(1) 显然，范数在 x_0 点是 F 可微的，那么范数在 x_0 点是 G 可微的，由定理 5.2.12 知，x_0 点是光滑的，即存在唯一元 $f_0\in S(X^*)$，使 $f_0(x_0)=1$.

设 $f_n\in S(X^*)$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，$f_n(x_0)\to1$. 要证 $\|f_n-f_0\|\to 0$. 反证法. 否则存在 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 (仍记作) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，使 $\|f_n-f_0\|\geqslant3r>0$，对某个 $r>0$.

选 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$，使 $f_n(x_n)-f_0(x_n)\geqslant2r>0$，则

$$\begin{aligned}f_0(x_0)-f_n(x_0)&\leqslant(f_0(x_0)-f_n(x_0))\left\{\frac{1}{r}(f_n(x_n)-f_0(x_n))-1\right\}\\&=(f_n(x_0)-f_0(x_0))\\&\quad+\frac{1}{r}(f_0(x_0)-f_n(x_0))(f_n(x_n)-f_0(x_n))\\&=(f_n-f_0)\left(x_0+\frac{1}{r}(f_0(x_0)-f_n(x_0))x_n\right)\\&\leqslant\left\|x_0+\frac{1}{r}(f_0(x_0)-f_n(x_0))x_n\right\|-\|x_0\|\\&\quad-f_0\left(\frac{1}{r}(f_0(x_0)-f_n(x_0))x_n\right).\end{aligned}$$

令
$$y_n=\frac{1}{r}(f_0(x_0)-f_n(x_0))x_n,$$

则
$$\|y_n\|=\frac{1}{r}(f_0(x_0)-f_n(x_0)),$$

故 $\quad 0<r=\dfrac{(f_0-f_n)(x_0)}{\|y\|}\leqslant\dfrac{\|x_0+y_n\|-\|x_0\|-f_0(y_n)}{\|y_n\|}$,

因范数在 x_0 点 F 可微,故

$$\frac{\|x_0+y_n\|-\|x_0\|-f_0(y_n)}{\|y_n\|}\to 0,$$

矛盾!这表明 $\|f_n-f_0\|\to 0$,从而 x_0 点是强光滑点. □

定理 5.2.15 若 X 是 Banach 空间,则下列等价:

(1) 存在支撑函数 $\sigma: S(X)\to S(X^*)$是范-范一致连续的.

(2) 范数是一致 F 可微的.

(3) X 是一致光滑的.

(4) X^*是一致凸的.

(5) 每个支撑函数 $\sigma: S(X)\to S(X^*)$是范-范一致连续的.

证明: (1)⇒(2)设 $\sigma: S(X)\to S(X^*)$是范-范一致连续的,则任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,使得,当 $x, y\in S(X)$, $|\lambda|<\delta_1$ 时,有

$$\|\sigma(x)-\sigma(x+\lambda y)\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

选 $\delta_2>0$,使得,当 $|\lambda|<\delta_2$ 时,有

$$\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $\delta=\min\left(\delta_1,\ \delta_2,\ \dfrac{1}{2}\right)$,根据引理 5.2.11 及推论,有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\langle y,\ \sigma(x)\rangle\right|\\&\quad\leqslant\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}+\frac{1}{1-|\lambda|}\|\sigma(x)-\sigma(x+\lambda y)\|\\&\quad\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+2\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故范数是一致 F 可微的. □

(2)⇒(3) 如果范数是一致 F 可微的,则

$$g(x,\ y,\ \lambda)=\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|-\langle\lambda y,\ \sigma(x)\rangle}{\lambda}\to 0,$$

当 $\lambda\to 0$ 时, 对 $x, y\in S(X)$一致地成立. 从而,当 $0<\lambda<\delta$ 时,

$$g(x, y, \lambda)+g(x, y, -\lambda)<\frac{\varepsilon}{2}, \ \forall x, y\in S(X),$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$. 故对任 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使

$$\|x+\lambda y\|+\|x-\lambda y\|<2\|x\|+2\varepsilon\|\lambda y\|=2+\varepsilon\|\lambda y\|,$$
$$\forall x, y\in S(X),$$

这表明 X 是一致光滑的.

(3)⇒(4) 若 X 是一致光滑的, 则对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in S(X)$, $0<\|y\|<\delta$ 时, 有

$$\|x+y\|+\|x-y\|<2+\frac{\varepsilon}{2}\|y\|. \tag{5.1}$$

令 $\delta'=\frac{\varepsilon}{8}\delta$, 则当 $f, g\in S(X^*)$, $\|f-g\|\geqslant\varepsilon$ 时, 取 $y_0\in X$, $\|y_0\|=\frac{3\delta}{4}$, 使 $(f-g)(y_0)>\frac{\delta}{2}\varepsilon$, 从而

$$\begin{aligned}\|f+g\|&=\sup\{(f+g)(x); x\in S(X)\}\\&=\sup\{f(x+y_0)+g(x-y_0)-(f-g)(y_0); x\in S(X)\}\\&<\sup\left\{\|x+y_0\|+\|x-y_0\|-\frac{\delta}{2}\varepsilon; x\in S(X)\right\}\\&\overset{\text{由(5.1)}}{\leqslant}2+\frac{\varepsilon}{2}\|y\|-\frac{\varepsilon}{2}\delta=2-\frac{\varepsilon\delta}{8}=2-\delta'.\end{aligned}$$

故 X^* 是一致凸的. □

(4)⇒(5) 若 $\sigma: S(X)\to S(X^*)$ 是任意支撑函数.

令 $\varepsilon>0$, 因为 X^* 是一致凸的, 故存在 $\delta>0$, 使得当 $\|\sigma(x)+\sigma(y)\|>2-\delta$ 时, 有 $\|\sigma(x)-\sigma(y)\|<\varepsilon$.

令 $x, y\in S(X)$, 假设 $\|x-y\|<\delta$, 则

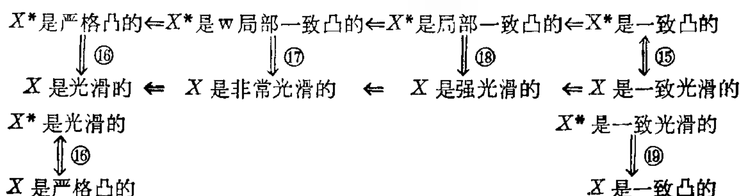
$$\begin{aligned}&\|\sigma(x)+\sigma(y)\|+\|x-y\|\\&\quad\geqslant(\sigma(x)+\sigma(y))(x)+\sigma(y)(y-x)=2,\end{aligned}$$

从而, $\|\sigma(x)+\sigma(y)\|\geqslant2-\|x-y\|>2-\delta$, 故

$$\|\sigma(x)-\sigma(y)\|<\varepsilon.$$

这表示 σ 是范-范一致连续的. □

（三）凸性、光滑性和范数可微性的关系.



其中 ⑯ 表示定理 5.2.16 等等.

定理 5.2.16 若 X 是赋范空间，则

(1) 若 X^* 是严格凸的，则 X 是光滑的.

(2) 若 X^* 是光滑的，则 X 是严格凸的.

特别地，若 X 是自反 Banach 空间，则

$$X \text{ 是严格凸的} \Leftrightarrow X^* \text{ 是光滑的},$$

且
$$X \text{ 是光滑的} \Leftrightarrow X^* \text{ 是严格凸的}.$$

证明：(1) 若 X 不是光滑的，则存在 $x_0\in S(X)$，及 x^*, $y^*\in S(X)$, $x^*\neq y^*$，且 $x^*(x_0)=y^*(x_0)=1$，因此

$$[x^*,\ y^*]\subset S(X^*),$$

这与 X^* 是严格凸的矛盾！□

(2) 若 X 不是严格凸的，则存在 $x_1\neq x_2$，使

$$[x_1,\ x_2]\subset S(X),$$

令 $x_0^*\in S(X^*)$, $x_0\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=1$，则 $\hat{x}_1(x_0^*)=\hat{x}_2(x_0^*)=1$，从而 $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ 是 x_0^* 的两个支撑泛函. 这与 X^* 是光滑的矛盾！□

定理 5.2.17 若 X^* 是 w 局部一致凸的，则 X 是非常光滑的.

证明：设 $\{f_n\}\subset S(X^*)$, $f_0\in S(X^*)$, $f_n(x_n)=1$, $f_0(x_0)=1$，且 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0$，其中 $\{x_n\}\subset S(X)$, $x_0\in S(X)$. 则

$$1\geqslant\left\|\frac{f_n+f_0}{2}\right\|\geqslant\frac{f_n(x_n)+f_0(x_n)}{2}\to 1,$$

由于 X^* 是 w 局部一致凸的，从而 $f_n\xrightarrow{w}f_0$. 这说明支撑函数

是范-w 连续的，由定理 5.2.13 知，X 是非常光滑的. □

定理 5.2.18 若 X^* 是局部一致凸的，则 X 是强光滑的.

证明：同定理 5.2.17 证明，只是根据 X^* 是局部一致凸的，得到 $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$，这表明支撑函数是范-范连续的，由定理 5.2.14 知，X 是强光滑的. □

定理 5.2.19 X 是一致凸的充要条件是 X^* 是一致光滑的.

证明：由定理 1.3.18 知，若 X 是一致凸的，则 X 是自反的. 从而 X^{**} 是一致凸的，由定理 5.2.15 知，X^* 是一致光滑的. 反之，若 X^* 是一致光滑的，则由定理 5.2.15 知，X^{**} 是一致凸的，再应用定理 1.3.18 知，X^{**} 是自反的，应用定理 4.2.1 知，X 是自反的，从而 X 是一致凸的. □

注：从定理 5.2.19 证明可看到，若 X^* 是一致光滑的，则 X 是自反的. 实际上，当 X 是一致光滑的时，由定理 5.2.15 知 X^* 是一致凸的，从而 X 是自反的.

(四)凸性、光滑性及范数可微性与自反性的关系.

定理 1.3.18 证明了 X 是一致凸的，则 X 是自反的. 由定理 5.2.19 的注知若 X 是一致光滑的，则 X 是自反的(实际上，这两种空间均是超自反的).

其他各种凸性、光滑性及范数可微性与自反性关系取决于下面的定理.

定理 5.2.20 若 X^* 是非常光滑的，则 X 是自反的.

证明：任取 $f \in S(X^*)$，由 Bishop-Phelps 定理知，存在 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(X^*)$，使 $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$，其中 f_n 达到它的范数，即存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(X)$，使 $f_n(x_n) = 1$，$\forall n$.

由于 X^* 是非常光滑的，故

$$\hat{x}_n \xrightarrow{\text{w}} F_f,$$

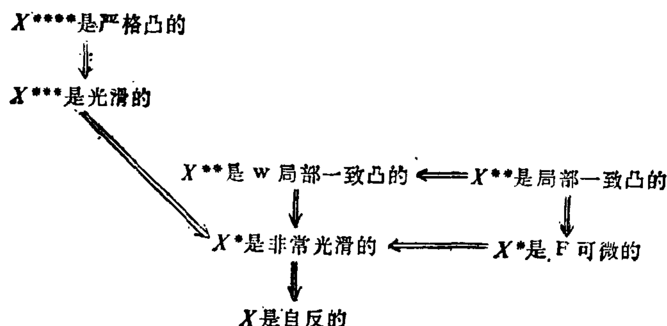
其中 $F_f \in S(X^{**})$，$F_f(f) = 1$.

由 Mazur 定理，$J_X(X)$是 w 闭的，故 $F_f\in J_X(X)$，即存在 $x_0\in S(X)$，使 $F_f=\hat{x}_0$，从而

$$f(x_0)=F_f(f)=1.$$

这表明 f 达到范数. 由 James 定理知，X 是自反的. □

由定理 5.2.13 的注知：X^{**} 是光滑的⇒X 是非常光滑的. 因此，有下列关系



(五)具有(H)性质的空间.

在第一章§1中我们已经给出(H)性质的定义(定义 1.1.1)，(H)性质即单位球面上序列的范数收敛与 w 收敛是一致的.

由于 Schur 空间(定义 1.1.2)定义为在其中序列的范数收敛与 w 收敛是一致的空间，故 Schur 空间必是具(H)性质的空间. 在实变函数论中，已经证明 l_1 空间是 Schur 空间. 显然，无限维 Schur 空间的任何无限维闭子空间必不自反. 这是由于 Schur 空间的闭子空间也是 Schur 空间，若 Schur 空间含无限维自反的子空间 Y，则 $U(Y)$是 w 序列紧的，从而，$U(Y)$是范紧的，这与 Y 是无限维空间矛盾！

下面我们再给出一些具有(H)性质的 Banach 空间.

性质 5.2.21 若 X 是 Banach 空间，则(H)性质等价于下列条件：

$$\left.\begin{array}{l}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U(X),\ x_n\xrightarrow{w}x\\ \operatorname{sep}(x_n)\equiv\inf\{\|x_n-x_m\|,\ n\neq m\}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\|x\|<1.$$

证明：首先指出 X 具(H)性质等价于下列条件：

$$\left.\begin{array}{l}x_n\xrightarrow{w}x\\ \|x_n\|\to\|x\|\end{array}\right\}\Rightarrow x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x. \qquad (*)$$

事实上，若$(*)$成立，则由于当$\|x_n\|=1=\|x\|$，$x_n\xrightarrow{w}x$时$(*)$的条件满足，故$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$，即 X 具有(H)性质．反之，若 $x_n\xrightarrow{w}x$，$\|x_n\|\to\|x\|$，不妨设 $\|x\|\neq0$，则由于

$$\frac{x_n}{\|x_n\|}\xrightarrow{w}\frac{x}{\|x\|},\quad\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\|=\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|=1,$$

由(H)性质知，$\frac{x_n}{\|x_n\|}\xrightarrow{\|\cdot\|}\frac{x}{\|x\|}$，故 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$，即$(*)$成立．

若 X 具(H)性质，则$(*)$成立，若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，$x_n\xrightarrow{w}x$，$\operatorname{sep}(x_n)\equiv\inf\{\|x_n-x_m\|,\ n\neq m\}>0$，但 $\|x\|=1$，则由于

$$1=\|x\|\leqslant\varliminf_n\|x_n\|\leqslant\varlimsup_n\|x_n\|\leqslant1,$$

知 $\lim\limits_n\|x_n\|=1=\|x\|$，由$(*)$知，$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$，这与

$$\operatorname{sep}(x_n)=\inf\{\|x_n-x_m\|,\ n\neq m\}>0$$

矛盾！故必有 $\|x\|<1$．

反之，若 $\{x_n\}\subset S(X)$，$x\in S(X)$，$x_n\xrightarrow{w}x$，且 $x_n\not\xrightarrow{\|\cdot\|}x$，由于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任何收敛的子序列必以 x 为极限，故 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 必不是全有界的，从而存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，使 $\operatorname{sep}(x_{n_i})>0$，由于 $x_{n_i}\xrightarrow{w}x$，故由条件知，$\|x\|<1$，矛盾！这表明 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$，即 X 具有(H)性质．□

(H)性质也称为范数是 Kadec-Klee 范数，也有的直接称具(H)性质的空间为 KK 空间．

R. Huff(*Rocky montain J. Math. Vol*10 *no*. 4 (1980) 743

~749)引入了 UKK 空间和 NUC 空间.

定义 5.2.2 Banach 空间 X 称为 UKK 空间(一致 Kadec-Klee 空间), 如果下列条件成立: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $0<\delta<1$, 使得

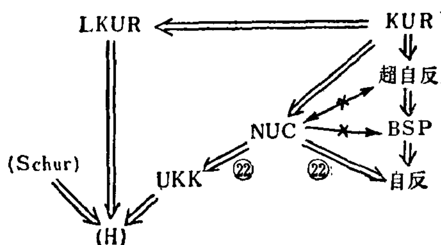
$$\left.\begin{array}{l}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U(X),\ x_n\xrightarrow{w}x\\ \mathrm{sep}(x_n)\geqslant\varepsilon\end{array}\right\}\Rightarrow\|x\|<\delta.$$

定义 5.2.3 Banach 空间 X 称为 NUC 空间 (接近一致凸空间), 如果下列条件成立: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $0<\delta<1$, 使得

$$\left.\begin{array}{l}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U(X)\\ \mathrm{sep}(x_n)\geqslant\varepsilon\end{array}\right\}\Rightarrow\mathrm{co}(x_n)\cap B_\delta(0)\neq\emptyset,$$

其中 $B_\delta(0)=\{x;\ \|x\|<\delta\}$.

下面先列表说明 NUC 空间, UKK 空间与其他空间的关系, 再加以证明.



显然, UKK 空间具有 (H) 性质.

定理 5.2.22 若 X 是 Banach 空间, 则

X 是 NUC 空间 $\Leftrightarrow$ X 是自反的 UKK 空间.

证明: "$\Rightarrow$"首先证明若 X 是 NUC 空间, 则 X 是自反的. 反证法. 若 X 不是自反的. 令 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, 对任何 δ, $0<\delta<1$, 选 θ, $0<\theta<1$, 使 $\theta>\max\left\{\delta,\ \dfrac{1}{2}\right\}$, 由 James 定理(定理 4.2.4), 因 X 不是自反的, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$, $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X^*)$, 使

$$x_i^*(x_j)=\begin{cases}\theta & i\leqslant j\\ 0 & i>j.\end{cases}$$

当 $n\geqslant m$ 时，$\|x_n-x_m\|\geqslant x_n^*(x_n-x_m)=\theta>\frac{1}{2}$，故 $\operatorname{sep}(x_n)>\frac{1}{2}$，但是，当 $\alpha_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ 时，

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\|\geqslant x_1^*\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right)=\theta>\delta,$$

从而 $\operatorname{co}(x_n)\cap B_\delta(0)=\emptyset$，这与 X 是 NUC 空间矛盾！故 X 必是自反的.

下面证明若 X 是 NUC 空间，则 X 是 UKK 空间. 若 $\{x_n\}\subset U(X)$，$x_n\xrightarrow{w}x$，$\operatorname{sep}(x_n)\geqslant\varepsilon$，由于 X 是 NUC 空间，选择相应于 ε 的 δ，使 $\operatorname{co}(x_n)\cap B_\delta(0)\neq\emptyset$，则存在

$$y_n=\sum_{i=p_n}^{q_n}\alpha_i x_i,\ \alpha_i\geqslant 0\quad \sum_{i=p_n}^{q_n}\alpha_i=1,\ p_1<q_1<p_2<q_2<\cdots,$$

使 $y_n\in B_\delta(0)$. 此时，有 $y_n\xrightarrow{w}x$，由 Mazur 定理知，$x\in\overline{B_\delta(0)}$，即 $\|x\|\leqslant\delta$. 这表明 X 是 UKK 空间. □

"$\Leftarrow$"对任何 $\varepsilon>0$，选择 UKK 空间定义中相应于 ε 的 $\delta>0$.

当 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，$\operatorname{sep}(x_n)\geqslant\varepsilon$ 时，由于 X 是自反的，故存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，使 $x_{n_i}\xrightarrow{w}x$，对某个 $x\in X$，由于 X 是 UKK 空间，故 $\|x\|<\delta$. 由 Banach-Mazur 定理(第一章§1(一)注1)知，存在 $\{x_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}$ 的凸组合 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，使

$$y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x,$$

故 $\operatorname{co}(x_n)\cap B_\delta(0)\neq\emptyset$. 所以 X 是 NUC 空间. □

注 1：R. Huff 证明 M. M. Day 空间（本章§4 例 1）$(\sum\oplus l_n^n)_2$ 是 NUC 空间，但已知 M. M. Day 空间不是超自反的。

注 2：令 $X=l_2$，赋以等价范数

$$\|x\|=\max\left\{\frac{\|x\|_2}{\sqrt{2}},\ \|x\|_\infty\right\},$$

则 $(l_2,\ \|\cdot\|)$ 是超自反空间.

令 $y=e_1$, $y_n=e_1+e_n$, 其中 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 l_2 的自然基. $|||y|||=|||y_n|||=1$, $y_n \xrightarrow{w} y$, 但 $\operatorname{sep}(y_n)=\sqrt{2}$, 故 $y_n \overset{|||\cdot|||}{\not\longrightarrow} y$, 这表明 $(l_2, |||\cdot|||)$ 不具 (H) 性质, 从而更不是 NUC 空间.

注 3: LKUR⇒(H), 见定理 5.2.36.

KUR⇒NUC, 见定理 5.2.34.

NUC⇏BSP, 见本章(八)例 1.

(六)具体空间的凸性和光滑性.

l_1 空间是不光滑的. 事实上, 令 $x=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \cdots\right)$, 则 $x\in l_1$, 且 $\|x\|=1$. 令 $x_1^*=(1, 1, 0, 0, \cdots)$, $x_2^*=(1, 1, 1, 0, 0\cdots)$, 则 x_1^*, $x_2^*\in l_1^*\cong m$, 且 $x_1^*\neq x_2^*$, 但 $x_1^*(x)=x_2^*(x)=1$. 故 l_1 不是光滑的. 但 l_1 的单位球还可能有光滑点. 下面定理给出 l_1 中光滑点的特征.

定理 5.2.23 在 l_1 空间中,

$x_0\in S(l_1)$ 是光滑点⇔x_0 的每个分量都不等于 0.

$S(l_1)$ 没有 F 可微点.

证明: (1) 若对某个 $x_n=0$, 其中 $x_0=(x_n)\in S(l_1)$. 设 e_n 是 l_1 的自然基, 则

$$\frac{\|x_0+te_n\|-\|x_0\|}{t}=\frac{|t|}{t},$$

故当 $t\to 0$ 时, 上式的极限不存在. 因此, 在 x_0 点范数不是 G 可微的, 从而 x_0 点不是光滑点.

(2) 若 $x_0=(x_n)\in S(l_1)$ 且 $x_n\neq 0$, $\forall n$.

对任何 $y\in S(l_1)$. 任取 $\varepsilon>0$, 选 N 充分大, 使

$$\sum_{n>N}|y_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

选 $\delta>0$, 使得当 $1\leqslant n\leqslant N$, $|t|<\delta$ 时, 有

$$\operatorname{sgn}(x_n+ty_n)=\operatorname{sgn}(x_n).$$

令 $x_0^*=(\operatorname{sgn}x_n)$, 则当 $|t|<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{\|x_0+ty\|-\|x_0\|}{t}-\langle x_0^*, y\rangle\right|=\left|\frac{\|x_0+ty\|-\|x_0\|}{t}-\sum_{n=1}^{\infty}y_n\operatorname{sgn}x_n\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{|x_n+ty_n|-|x_n|-ty_n\cdot\operatorname{sgn}x_n}{t}\right|+2\sum_{n>N}|y_n|$$

$$=2\sum_{n>N}|y_n|<\varepsilon.$$

从而范数在 $x_0=(x_n)$ 点 G 可微，且 G 导数就是 $x^*=(\operatorname{sgn}x_n)$. 故此时 x_0 点为光滑点.

(3) 只须考虑 $x=(x_n)$, $x_n\neq0$, $\forall n$.

令 $y^m=(0, 0, \cdots, -2x_m, -2x_{m+1}, \cdots)$，则 $\|y^m\|\to0$, 当 $m\to\infty$ 时. 注意到，$x^*=(\operatorname{sgn}x_n)$是仅有的可能的 F 导数，但是，

$$\lim_{y^m\to0}\frac{|\|x+y^m\|-\|x\|-\langle x^*, y^m\rangle|}{\|y^m\|}=\lim_{y^m\to0}\frac{\left|\sum\limits_{n\geqslant m}-2|x_n|\right|}{\|y^m\|}$$

$$=\lim_{y^m\to0}\frac{\|y^m\|}{\|y^m\|}=1,$$

故范数在 $x=(x_n)$ 点不是 F 可微的. 从而 $S(X)$ 没有 F 可微点. □

容易看到，c_0 不是光滑的，例如

$$x=\left(1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\right)\in S(c_0),$$

但 l_1 的自然基 e_1、e_2、e_3 是三个不同支撑泛函. 由于光滑空间的子空间也是光滑的(应用 Hahn-Banach 定理)，从而 m 也不是光滑的. 下面讨论它们单位球的光滑点.

定理 5.2.24 若 Ω 是紧 Hausdorff 空间，则 $x_0(t)\in C(\Omega)$ 是光滑点当且仅当 $x_0(t)$ 是一个峰函数(peak function)，即 $x_0(t)$仅在一点达到它的范数.

注：对任何 $x\in X$，若存在唯一的 $f\in S(X^*)$，使 $f(x)=\|x\|$，则也称 x 为光滑点. 显然，x_0 是光滑点当且仅当 $\frac{x_0}{\|x_0\|}$ 是光滑点. 故下面证明中仅考虑 $x\in S(X)$情况.

证明：(1) 若 $x_0(t)$不是峰函数，则存在 $t_1\neq t_2$，使

$$x_0(t_1)=x_0(t_2)=1=\|x\|.$$

考虑点测度 $\mu_i(E)$, $i=1, 2$,

$$\mu_i(E)=\begin{cases}0 & t_i\notin E\\ 1 & t_i\in E,\end{cases}$$

则 $\mu_1, \mu_2\in C(\Omega)^*$, 且 $\mu_1\neq\mu_2$, 由 Riesz 表现定理(参见王建华译 Halmos 的测度论, 1958), $\Phi_{\mu_1}(x_0)=\Phi_{\mu_2}(x_0)=1$, 故 x_0 点不是光滑点.

(2) 若 $x_0(t)$是峰函数. 设 $x_0(t_0)=1=\|x_0\|$, 对某个(唯一的)$t_0\in\Omega$.

对任何 $x\in C(\Omega)$,令 $t_\alpha\in\Omega$, $-1<\alpha<1$,使

$$\|x_0+\alpha x\|=|x_0(t_\alpha)+\alpha x(t_\alpha)|\geqslant|x_0(t_0)+\alpha x(t_0)|,$$

故

$$0<1-|x_0(t_\alpha)|\leqslant|\alpha|\cdot|x(t_0)|+|\alpha|\cdot|x(t_\alpha)|\leqslant 2|\alpha|\cdot\|x\|.$$

(注意,上式成立,由于

$$\begin{aligned}1-|\alpha|\cdot|x(t_0)|&<|1+\alpha x(t_0)|\leqslant|x_0(t_\alpha)+\alpha x(t_\alpha)|\\&\leqslant|x_0(t_\alpha)|+|\alpha||x(t_\alpha)|.)\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{\alpha\to 0}|x_0(t_\alpha)|=1$.

由于 Ω 是紧的, 故当 $\alpha\to 0$ 时, 有 $t_\alpha\to t_0$. (事实上,否则当 $\alpha\to 0$ 时, 有 $t_\alpha\not\to t_0$, 则 $\{t_\alpha\}$ 有子定向列 $\{t_\delta\}$ 使 $t_\delta\to t_1\neq t_0$, 则 $|x_0(t_1)|=\lim\limits_{\delta\to 0}|x_0(t_\delta)|=1$,矛盾!)

对充分小的$|\alpha|$,

$$\begin{aligned}\alpha x(t_0)&=1+\alpha x(t_0)-1=|1+\alpha x(t_0)|-1\\&\leqslant|x_0(t_\alpha)+\alpha x(t_\alpha)|-1\\&=\|x_0+\alpha x\|-\|x_0\|=x_0(t_\alpha)+\alpha x(t_\alpha)-1\\&\leqslant\alpha x(t_\alpha).\end{aligned}$$

从而,当 $\alpha>0$ 时,

$$x(t_0)\leqslant\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\|x_0+\alpha x\|-\|x_0\|}{\alpha}\leqslant\lim_{\alpha\to 0^+}x(t_\alpha)=x(t_0).$$

当 $\alpha<0$ 时,

$$x(t_0)=\lim_{\alpha\to0^-}x(t_\alpha)\leqslant\lim_{\alpha\to0^-}\frac{\|x_0+\alpha x\|-\|x_0\|}{\alpha}\leqslant x(t_0).$$

故 x_0 点具 G 导数 δ_{t_0}, 从而 x_0 是光滑点.

对 $x_0(t_0)=-1$ 情况, 考虑 $(-x_0)(t)$, 则 $(-x_0)(t_0)=1$, 因此 $(-x_0)$ 的 G 导数为 δ_{t_0}, 故容易看到 x_0 点 G 导数为 $-\delta_{t_0}$, x_0 也是光滑点. 总之, x_0 点是光滑点, 具 G 导数 $\operatorname{sgn}x_0(t_0)\cdot\delta_{t_0}$(其中 $\delta_{t_0}(x)=x(t_0)$, $\delta_{t_0}\in C(\Omega)^*$, $x\in C(\Omega)$.)□

注: 容易看到在 c_0 空间中, 光滑点也仅是"峰函数". (实际上, 证明同 $C(\Omega)$ 情况, 但这时, 从 $\lim\limits_{\alpha\to0}|x_0(n_\alpha)|=1$, 得到当 $\alpha\to0$ 时, $n_\alpha\to n_0$ 这一事实是使用 $|x_0(n)|\xrightarrow{n}0$.)

又利用 $m\cong C(\beta(N))$, 其 $\beta(N)$ 是 N 的 Stone-Cech 紧化(见参考书[4], p. 113), 可知 m 的光滑点也仅是"峰函数". 对 c 空间可类似讨论.

定理 5.2.25 $x_0(t)\in S(L^1[0,1])$,

$$x_0\text{ 是光滑点}\Leftrightarrow\mu(\{t;x_0(t)=0\})=0.$$

证明: 取 $\Phi(t)=\operatorname{sgn}(x_0(t))$, 则 $\Phi\in S(L^\infty[0,1])$.

若 $\mu(\{t;\ x_0(t)=0\})=0$, 任取 $\Phi_1\in L^\infty[0,1]$, $\|\Phi_1\|=1$, $\Phi_1(x_0)=1$. 由于 $\|\Phi_1\|=1$, 故 $|\Phi_1(t)|\leqslant1$(a. e), 但

$$0=\int_0^1[\Phi(t)x_0(t)-\Phi_1(t)x_0(t)]dt$$

$$=\int_0^1(|x_0(t)|-\Phi_1(t)x_0(t))dt,$$

从而 $|\Phi_1(t)|\overset{\text{a.e}}{=\!=}1$(因 $\mu(\{t;x_0(t)=0\})=0$).

令 $A_1=\{t;x_0(t)>0\}$, $A_2=\{t;x_0(t)<0\}$, 由于

$$|x_0(t)|-\Phi_1(t)x_0(t)\geqslant0\text{(a. e)}$$

故

$$\int_A x_0(t)(1-\Phi_1(t))=0,$$

从而在 A_1 上, $\Phi_1(t)\overset{\text{a.e}}{=\!=}1$. 同理, 在 A_2 上, $\Phi_1(t)\overset{\text{a.e}}{=\!=}1$, 故由

$\mu(\{t, x_0(t)=0\})=0$ 知,

$$\Phi_1(t) \xlongequal{\text{a.e}} \Phi(t),$$

即 $\Phi_1=\Phi$,因此,x_0 点是光滑点,且 x_0 点的 G 导数是 $\operatorname{sgn} x_0(t)$.

反之,假如 $\mu(\{t;\ x_0(t)=0\})>0$,则容易选取 $\Phi_1, \Phi_2 \in S(L^\infty[0, 1])$,$\Phi_1 \neq \Phi_2$,使 $\Phi_1(x_0)=\Phi_2(x_0)=1$,故 x_0 点不是光滑点. □

注:从证明中容易看到,对使得 $[L^1(\Omega, \Sigma, \mu)]^* \cong L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ 成立的测度空间 (Ω, Σ, μ),上述定理也成立.

下面讨论 l_p 和 $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(1<p<+\infty)$ 的一致凸性. l_p 和 $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ 的一致凸性的证明最早见于 1936 年 Clarkson 文章(*Trans. A. M. S.* 40(1936)396~414),但证明较长. 文中得到 $0<\delta_{l_p}(\varepsilon) \leqslant 1-\sqrt[p]{1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p}$ (Nanner 估计,当 $p \geqslant 2$ 时,$\delta_{L_p}(\varepsilon)=1-\sqrt[p]{1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p}$,见 *Ark. Math.* 3(1956) 239~244).下面给出另一个证明(E. J. McShane, *Proc. A. M.S.* 1(1959) 402~408).

先讨论一致凸空间的一个性质.

定理 5.2.26 设 X 是一致凸空间,$1<p<+\infty$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta(\varepsilon, p)>0$,使得当 $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$,且 $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$ 时,有

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p<(1-\delta(\varepsilon, p))\left(\frac{\|x\|^p+\|y\|^p}{2}\right), \qquad (5.2)$$

或者,当 $\|x-y\| \geqslant \varepsilon \max(\|x\|, \|y\|)$ 时,有

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p<(1-\delta(\varepsilon, p))\left(\frac{\|x\|^p+\|y\|^p}{2}\right). \qquad (5.3)$$

证明:(1) 先给一个不等式. 若 $1<p<+\infty$,则

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^p \leqslant \frac{1}{2}(1+t^p), \text{当 } t \geqslant 0 \text{ 时}. \qquad (5.4)$$

且当 $0 \leqslant t<1$ 时,严格不等号成立(用数学分析方法考虑函数

$f(t)=\left(\frac{1+t^p}{2}\right)\Big/(1+t)^p$ 即可).

(2) 先考虑 $\|x\|=1$, $\|y\|\leqslant 1$ 情况. 若(5.2)不成立, 则存在 $\varepsilon>0$, 和 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 满足 $\|x_n\|=1$, $\|y_n\|\leqslant 1$, 且 $\|x_n-y_n\|\geqslant\varepsilon$, 但

$$\frac{\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|^p}{\frac{\|x_n\|^p+\|y_n\|^p}{2}}\to 1, \tag{5.5}$$

因此, $\|y_n\|\to 1$. (事实上, 否则存在 $\{y_n\}$ 的子列 $\{y_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 使 $\|y_{n_i}\|\leqslant\alpha<1$, $\forall i$. 故, 利用(5.4), 有

$$\left\|\frac{x_{n_i}+y_{n_i}}{2}\right\|^p\leqslant\frac{1}{2^p}(1+\|y_{n_i}\|^p)\leqslant\frac{(1+\alpha)^p}{2^p\left(\frac{1+\alpha^p}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}(1+\|y_{n_i}\|^p),$$

故
$$\frac{\left\|\frac{x_{n_i}+y_{n_i}}{2}\right\|^p}{\frac{\|x_{n_i}\|^p+\|y_{n_i}\|^p}{2}}\leqslant\frac{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^p}{\frac{1+\alpha^p}{2}}<1,$$

这与(5.5)矛盾!)

从而, $\lim\limits_n\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|=1$.

令 $z_n=\frac{y_n}{\|y_n\|}$, 则 $\|z_n-y_n\|=\left\|\frac{y_n}{\|y_n\|}-y_n\right\|\to 0$. 选充分大 n_0, 使得当 $n>n_0$ 时, 有 $\|z_n-x_n\|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

但另一方面,

$$\begin{aligned}1&=\lim_n\frac{\|x_n+y_n\|}{2}\leqslant\lim_n\left(\frac{\|x_n+z_n\|}{2}+\frac{\|y_n-z_n\|}{2}\right)\\&=\lim_n\left\|\frac{x_n+z_n}{2}\right\|\leqslant 1,\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_n\left\|\frac{x_n+z_n}{2}\right\|=1$, 这与一致凸定义矛盾! □

(3) 对 $\|x\|\leqslant 1$, $\|y\|\leqslant 1$ 情况, 设 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$, 且不妨设 $\|x\|$

$\geqslant\|y\|$，令 $x'=\frac{x}{\|x\|}$，$y'=\frac{y}{\|x\|}$，则 $\|x'\|=1$，$\|y'\|\leqslant 1$，且

$$\|x'-y'\|=\frac{1}{\|x\|}\|x-y\|\geqslant\varepsilon,$$

由(2)的证明知，

$$\left\|\frac{x'+y'}{2}\right\|^p<(1-\delta(\varepsilon,\ p))\left(\frac{\|x'\|^p+\|y'\|^p}{2}\right),$$

从而 $$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p<(1-\delta(\varepsilon,\ p))\left(\frac{\|x^p\|+\|y\|^p}{2}\right).\ \square$$

(4) 对一般 $x,\ y\in X$ 情况，设 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$，令

$$x'=\frac{x}{\max(\|x\|,\ \|y\|)},\ y'=\frac{y}{\max(\|x\|,\ \|y\|)},$$

则 $\|x'\|\leqslant 1$，$\|y'\|\leqslant 1$，且 $\|x'-y'\|=\frac{\|x-y\|}{\max(\|x\|,\ \|y\|)}\geqslant\varepsilon$（这里假设 $\max(\|x\|,\ \|y\|)>1$），由(3)的证明知，有

$$\left\|\frac{x'+y'}{2}\right\|^p<(1-\delta(\varepsilon,\ p))\left(\frac{\|x'\|^p+\|y'\|^p}{2}\right),$$

从而 $$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p<(1-\delta(\varepsilon,\ p))\left(\frac{\|x\|^p+\|y\|^p}{2}\right).\ \square$$

特别地 $(\boldsymbol{R}^1,\ |\cdot|)$ 显然是一致凸的，故对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon,\ p)$，其中 $1<p<+\infty$，使得当 $|x-y|>\varepsilon\max(|x|,\ |y|)$ 时，有

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p<(1-\delta(\varepsilon,\ p))\left(\frac{|x|^p+|y|^p}{2}\right).$$

定理 5.2.27 若 $(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$ 是任何测度空间，$1<p<+\infty$，则 $L_p(\mu)$ 是一致凸的.

证明：对任何 $\varepsilon>0$，选 $(\boldsymbol{R}^1,\ |\cdot|)$ 中相应于 $\varepsilon\cdot 4^{-\frac{1}{p}}$ 的 δ（根据定理 5.2.26），令 $x,\ y\in U(L_p(\mu))$，$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$.

令 $M=\{\omega;\ \varepsilon^p(|x(\omega)|^p+|y(\omega)|^p)\leqslant 4(|x(\omega)-y(\omega)|^p)\}$，

这样，当 $\omega\in M$ 时，$\max(|x(\omega)|,\ |y(\omega)|)\cdot\varepsilon\cdot 4^{-\frac{1}{p}}\leqslant|x(\omega)-y(\omega)|$，故

$$\left|\frac{x(\omega)+y(\omega)}{2}\right|^p<(1-\delta)\left(\frac{|x(\omega)|^p+|y(\omega)|^p}{2}\right). \tag{5.6}$$

而另一方面，

$$\int_{\Omega\setminus M}|x(\omega)-y(\omega)|^p d\mu\leqslant\frac{\varepsilon^p}{4}\int_\Omega(|x(\omega)|^p+|y(\omega)|^p)d\mu$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon^p}{2},$$

但 $\|x-y\|^p\geqslant\varepsilon^p$，从而

$$\int_M|x(\omega)-y(\omega)|^p d\mu\geqslant\frac{\varepsilon^p}{2},$$

故
$$\max\left(\int_M|x(\omega)|^p d\mu,\ \int_M|y(\omega)|^p d\mu\right)\geqslant\frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}},$$

所以有

$$\int_\Omega\left[\frac{|x(\omega)|^p+|y(\omega)|^p}{2}-\left|\frac{x(\omega)+y(\omega)}{2}\right|^p\right]d\mu$$
$$\geqslant\int_M\left[\frac{|x(\omega)|^p+|y(\omega)|^p}{2}-\left|\frac{x(\omega)+y(\omega)}{2}\right|^p\right]d\mu$$

由(5.6)

$$\geqslant\delta\int_M\frac{|x(\omega)|^p+|y(\omega)|^p}{2}>\delta\,\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}}.$$

因此，

$$\int_\Omega\frac{|x(\omega)+y(\omega)|^p}{2^p}\,d\mu\leqslant\int_\Omega\frac{|x(\omega)|^p+|y(\omega)|^p}{2}\,d\mu-\delta\,\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}}$$
$$\leqslant1-\delta\,\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}}.$$

这样，得到$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p\leqslant1-\delta\,\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}}$，令$\delta_1=1-\left(1-\delta\,\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}}\right)^{1/p}$，则 $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leqslant1-\delta_1$. □

定理 5.2.28 若$(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$是任何测度空间，$1<p<+\infty$，则 $L_p(\mu)$是一致光滑的.

证明： 由于 $L_q(\mu)$是一致凸的，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，且$(L_p(\mu))^*\cong$

$L_q(\mu)$，故 $L_p(\mu)$ 是一致光滑的．又由于对任何 $x(t)\in L_p(\mu)$，$\|x(t)\|=1$，有 $\dfrac{x(t)|x(t)|^{p-2}}{\|x(t)\|^{p-1}}\in S(L_q(\mu))$，且

$$\int_\Omega x(t)\frac{x(t)|x(t)|^{p-2}}{\|x(t)\|^{p-1}}d\mu=\frac{\|x\|^p}{\|x\|^{p-1}}=\|x\|=1,$$

因此 $x(t)\in S(L_p(\mu))$ 的 F 导数为 $\dfrac{x(t)|x(t)|^{p-2}}{\|x(t)\|^{p-1}}$．□

下面列表作一个简单归纳．

	空　间	凸　性	光　滑　性
序列空间	c_0	不严格凸 $\text{ext}U(c_0)=\phi$	不光滑，光滑点见定理 5.2.24
	c	不严格凸	不光滑，光滑点见定理 5.2.24
	$l_\infty\equiv m$	不严格凸	不光滑，光滑点见定理 5.2.24
	l_p　$1<p<+\infty$	一致凸空间	一致光滑空间
函数空间	$C(\Omega)$，Ω 是紧 Hausdorff 空间	不严格凸	不光滑，光滑点⇔峰函数，见定理 5.2.24
	$L_p(\mu)$　$1<p<+\infty$ $(\Omega,\Sigma\ \mu)$ 是任何测度空间	一致凸空间，见定理 5.2.7	一致光滑空间，见定理 5.2.28
	$L_1[0,1]$	不严格凸 $\text{ext}U(L_1[0,1])=\phi$	不光滑，光滑点⇔$\mu(t;x(t)=0)=0$，见定理 5.2.25
	$L_\infty[0,1]$	不严格凸	不光滑

（七）一致凸空间．

一致凸空间是目前知道具有"最强凸性"的 Banach 空间，并且是目前知道的在几何性质方面"弱"于 Hilbert 空间的"最强"的空间．

下面列举若干性质而不加证明（有些请读者作为习题，有些可查阅有关文献）．

定义 5.2.4　Banach 空间 X 的子空间 M 称为 Chebyshev 子空间，如果对每个 $x\in X$，存在唯一的 $m\in M$，使 $\|x-m\|=$

$d(x, M)$.

(1) 一致凸空间的每个闭线性子空间都是 Chebyshev 子空间.

(2) 若 A 是一致凸空间 X 的闭凸子集，则对每个 $x\in X$，存在唯一元 $P_A(x)\in A$，使 $\|P_A(x)-x\|=d(x, A)$（称 P_A 为集 A 的度量投影），且 P_A 是范-范（一致）连续的.

(3) 一致凸空间具 Banach-Saks 性质（见参考书[1]p. 78）.

定义 5.2.5 若 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，$x\in A$ 称为 A 的非直径点，如果 $\sup\{\|x-y\|;\ y\in A\}\equiv r_x(A)<\operatorname{diam} A$.

定义 5.2.6 Banach 空间 X 称为具有正规结构，如果每个有界闭凸集具有一个非直径点.

(4) 一致凸空间 X 具正规结构（见参考书[1]p. 38）.

(5) 若 $X=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus X_i\right)_p$，$1<p<+\infty$，则

X 是一致凸的$\Leftrightarrow X_i$ 是一致凸的，$\forall i$，且 X_i 具有共同的凸性模.

（X_i 具共同凸性模是指，$\exists a_\varepsilon>0$，使 $a_\varepsilon<\inf\limits_i \delta_i(\varepsilon)$，$\forall\varepsilon>0$.）

由此得到，取值于 X 的 p 次 Bochner 可积空间 $L_p(X, \mu)$ 是一致凸的（$1<p<+\infty$）当且仅当 X 是一致凸的（见 M. M. Day, *Bull. A. M. S.* 47(1941)504～507）.

(6) 若 X 是一致凸的，则对任何闭集 $K\subset X$，

$C_K=\{x\in X;\ x$ 在 K 中没有唯一最佳逼近点$\}$ 是 X 中第一纲集.

$F_K=\{x;\ x\in X, \exists a_x\in K$，使 $\|x-a_x\|=\sup\limits_{b\in K}\|x-b\|\}$ 是 X 中稠集（见 M. Edelstein, *Israel J. Math.* vol 3～4(1966)171～176）.

注：关于凸性模研究见参考书[1]p. 57.

（八）KUR 空间.

1951 年 E. Silverman (*Revista Math. Uni. Parma.* 2 (1951)47～76) 引入了 Banach 空间 X 中由 n 个元 $x_1, \cdots, x_n$ 所围成的凸集的体积概念. 由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 所围成的凸集的体积 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$定义为

$$A(x_1, \cdots, x_n)=\sup\left\{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix};\ \begin{matrix} f_i\in U(X^*) \\ i=1, \cdots, n \end{matrix}\right\}.$$

1979 年 F. Sullivan 利用 Banach 空间中上述的体积概念,引入了 KUR 空间(定义 5.1.2), 由此得到一大类非一致凸但是超自反的 Banach 空间. 在本章 §2 已讨论了 KUR 空间的一些性质. 这里再进一步建立若干定理.

显然 KUR 空间的子空间是 KUR 空间.

定理 5.2.29 若 X 是 KUR 空间, 则 X 的任何商空间 X/M 是 KUR 空间,其中 M 是 X 的闭子空间.

证明: 由于 KUR 空间是自反的, 故对任何 $[x]=x+M\in X/M$, $\|[x]\|=1$, 存在 $x_0\in[x]$, 使得

$$\|x_0\|=\mathrm{dist}(0, x+M)=\|[x]\|=1,$$

此时$[x_0]=[x]$.

对任何 $\varepsilon>0$, 选择 KUR 空间定义中相应于 ε 的 δ (由于 X 是 KUR 空间, 这种选取是可以的), 若 $[x_1], \cdots, [x_{k+1}]\in S(X/M)$, 且 $\|[x_1]+\cdots+[x_{k+1}]\|\geqslant(k+1)-\delta$, 则由上面说明知, 可选 $x_i'\in S(X)$, 使 $x_i'\in[x_i]$, $i=1, \cdots, k+1$, 于是, 有

$$\|x_1'+\cdots+x_{k+1}'\|\geqslant\|[x_1']+\cdots+[x_{k+1}']\|\geqslant(k+1)-\delta,$$

因此, 根据X是 KUR 空间知,

$$\sup\left\{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1') & \cdots & f_1(x_{k+1}') \\ \vdots & & \vdots \\ f_k(x_1') & \cdots & f_k(x_{k+1}') \end{vmatrix};\ \begin{matrix} f_i\in U(X^*) \\ i=1, \cdots, k \end{matrix}\right\}<\varepsilon.$$

但是$(X/M)^*\cong M^0$，故

$$\sup\left\{\left|\begin{matrix}1 & \cdots & 1\\ G_1([x_1]) & \cdots & G_1([x_{k+1}])\\ \vdots & & \vdots\\ G_k([x_1]) & \cdots & G_k([x_{k+1}])\end{matrix}\right|;\ \begin{matrix}G_i\in(X/M)^*\\ \|G_i\|\leqslant 1\\ i=1,\cdots,k\end{matrix}\right\}$$

$$=\sup\left\{\left|\begin{matrix}1 & \cdots & 1\\ g_1(x_1') & \cdots & g_1(x_{k+1}')\\ \vdots & & \vdots\\ g_k(x_1') & \cdots & g_k(x_{k+1}')\end{matrix}\right|;\ \begin{matrix}g_i\in M^0,\\ \|g_i\|\leqslant 1\\ i=1,\cdots,k\end{matrix}\right\}$$

$$\leqslant\sup\left\{\left|\begin{matrix}1 & \cdots & 1\\ f_1(x_1') & \cdots & f_1(x_{k+1}')\\ \vdots & & \vdots\\ f_k(x_1') & \cdots & f_k(x_{k+1}')\end{matrix}\right|;\ \begin{matrix}f_i\in U(X^*)\\ i=1,\cdots,k\end{matrix}\right\}<\varepsilon,$$

故 X/M 是 KUR 空间. □

注：这个定理见俞鑫泰、臧尔彬、刘证：华东师范大学学报 1981 年第 1 期 1～8.

M. M. Day (*Trans. A. M. S.* 78 (1955) 516～523) 证明 $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus X_i\right)_p$ $(1<p<+\infty)$是一致凸的充要条件是每个 X_i 是一致凸的，且它们具有共同的凸性模. 但是，对于 KUR 空间却不然. 甚至对两个有限维 2UR 空间的 l_2 乘积已不再是 2UR 空间了. 这由下例可知.

例：$X=l_1^2=\{(x, y); x, y\in\boldsymbol{R}^1, \|(x, y)\|=|x|+|y|\}$，$Y=l_1^2$. 显然，$X$、$Y$ 是 2UR 空间. 容易看到，$(X\oplus Y)_2$ 不是 2UR 的，事实上，取

$$x=((1, 0), (0, 1)),\ y=\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1, 0)\right)$$

$$z=((0, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})),$$

$$f=((0, 1), (1, 0)),\ g=((1, 0), (1, 1)),$$

则 $\|x\|=\|y\|=\|z\|=\left\|\dfrac{x+y+z}{3}\right\|=\sqrt{2}$，但

$$A(x,\ y,\ z)\geqslant\left|\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ f(x) & f(y) & f(z)\\ g(x) & g(y) & g(z)\end{vmatrix}\right|=\frac{3}{4}.\ \square$$

事实上，关于 KUR 空间的乘积空间有如下定理.

定理 5.2.30 设 X 是 KUR 空间，Y 是 LUR 空间，其中 K，L 为正整数，则

$$\begin{aligned}Z&=(X\oplus Y)_p\\&=\{(x,\ y);\ x\in X,\ \ y\in Y,\ \|(x,\ y)\|=\sqrt[p]{\|x\|^p+\|y\|^p}\}\end{aligned}$$

$(1<p<+\infty)$ 是 $(K+L-1)UR$ 空间.

为了证明这个定理，首先注意到下列引理.

引理 5.2.31 Banach 空间 X 是 KUR 的充要条件是对 X 中任意 $k+1$ 个序列 $\{x_1^n\}_{n=1}^{\infty}$，$\cdots$，$\{x_{k+1}^n\}_{n=1}^{\infty}$，若 $\|x_i^n\|\to a$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k+1$，且 $\|x_1^n+\cdots+x_{k+1}^n\|\to a(k+1)$，则有

$$A(x_1^n,\ \cdots,\ x_{k+1}^n)\to 0.$$

证明：充分性是显然的．下面证必要性．不失一般性，令 $a=1$.

设 $\{x_i^n\}_{n=1}^{\infty}$，$i=1,\ \cdots,\ k+1$，满足引理的条件．令 $y_i^n=\dfrac{x_i^n}{\|x_i^n\|}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k+1$，$n=1,\ 2,\ \cdots$.

由于 $\|x_1^n+\cdots+x_{k+1}^n\|\to k+1$，$n\to\infty$．对每个 $\delta>0$，存在 N_0，使得，当 $n>N_0$ 时，$\|x_1^n+\cdots+x_{k+1}^n\|>k+1-\dfrac{\delta}{2}$.

由于 $\|x_i^n\|\to 1$，$n\to\infty$，$i=1,\ \cdots,\ k+1$．故存在 $N_1\geqslant N_0$，使得，当 $n>N_1$ 时，

$$\big|\|x_i^n\|-1\big|<\frac{\delta}{2(k+1)},\ i=1,\ \cdots,\ k+1.$$

因此，也有

$$
\begin{aligned}
&\|y_1^n+y_2^n+\cdots+y_{k+1}^n\| \\
&\quad =\|x_1^n+\cdots+x_{k+1}^n+y_1^n-x_1^n+\cdots+y_{k+1}^n-x_{k+1}^n\| \\
&\quad \geqslant \|x_1^n+\cdots+x_{k+1}^n\|-\sum_{i=1}^{k+1}\left\|\frac{x_i^n}{\|x_i^n\|}-x_i^n\right\| \\
&\quad > k+1-\frac{\delta}{2}-\frac{\delta(k+1)}{\delta(k+2)}=k+1-\delta.
\end{aligned}
$$

由于 X 是 KUR 空间, 对任何 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\delta(\varepsilon/2)$, 由上证明知, 存在相应 N_1, 当 $n>N_1$ 时, 有

$$
A(y_1^n, \cdots, y_{k+1}^n)<\varepsilon/2.
$$

由此, 容易得到所要结论. □

定理 5.2.30 的证明: 我们仅对 2UR 空间的 l_p 乘积 $(1<p<+\infty)$ 证明. 其他情况可用类似方法证明, 这里不详述.

假设 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w^n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$, 其中 $x^n=(x_1^n, x_2^n)$, $y^n=(y_1^n, y_2^n)$, $z^n=(z_1^n, z_2^n)$, $w^n=(w_1^n, w_2^n)$. 我们将证明, 如果 $\|x^n+y^n+z^n+w^n\|\to 4$, $n\to+\infty$, 则 $A(x^n, y^n, z^n, w^n)\to 0$.

首先, 容易看到, $\|x^n+y^n\|\to 2$. 采用 Clarkson 方法 (J. A. Clarkson, *Trans. A. M. S.* 40(1936)396~414), 得到当 $n\to\infty$ 时,

$$
\|x_1^n\|-\|y_1^n\|\to 0,\ \|x_2^n\|-\|y_2^n\|\to 0.
$$

同样, 有 $\quad \|x_i^n\|-\|z_i^n\|\to 0,\ \|x_i^n\|-\|w_i^n\|\to 0,\ i=1, 2.$

(1) 首先, 我们假设 $\|x_1^n\|\to a_1$, $\|x_2^n\|\to a_2$, 则

$$
\lim\|y_i^n\|=\lim\|z_i^n\|=\lim\|w_i^n\|=a_i,\ i=1, 2.
$$

这时, 采用 Clarkson 方法, 我们还得到

$$
\begin{aligned}
&\|x_i^n+y_i^n+z_i^n\|\to 3a_i,\ \|y_i^n+z_i^n+w_i^n\|\to 3a_i, \\
&\|x_i^n+y_i^n+w_i^n\|\to 3a_i,\ \|x_i^n+z_i^n+w_i^n\|\to 3a_i
\end{aligned}
$$

$i=1, 2.$

于是

$$\sup\left\{\begin{vmatrix}1&1&1&1\\f(x^n)&f(y^n)&f(z^n)&f(w^n)\\g(x^n)&g(y^n)&g(z^n)&g(w^n)\\h(x^n)&h(y^n)&g(z^n)&g(w^n)\end{vmatrix};f,\ g,\ h\in U(X^*)\right\}$$

$$=\sup\left\{\begin{vmatrix}1&1&1&1\\f_1(x_1^n)+f_2(x_2^n)&f_1(y_1^n)+f_2(y_2^n)&f_1(z_1^n)+f_2(z_2^n)&f_1(w_1^n)+f_2(w_2^n)\\g_1(x_1^n)+g_2(x_2^n)&g_1(y_1^n)+g_2(y_2^n)&g_1(z_1^n)+g_2(z_2^n)&g_1(w_1^n)+g_2(w_2^n)\\h_1(x_1^n)+h_2(x_2^n)&h_1(y_1^n)+h_2(y_2^n)&h_1(z_1^n)+h_2(z_2^n)&h_1(w_1^n)+h_2(w_2^n)\end{vmatrix};\right.$$

$$\left.\begin{matrix}f_1,\ g_1,\ h_1\in X_1^*\ \sqrt[q]{\|f_1\|^q+\|f_2\|^q}\leqslant 1,\ \sqrt[q]{\|h_1\|^q+\|h_2\|^q}\leqslant 1\\ f_2,\ g_2,\ h_2\in X_2^*,\ \sqrt[q]{\|g_1\|^q+\|g_2\|^q}\leqslant 1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\end{matrix}\right\}$$

$$\leqslant\sum_{i,j,k=1}^{2}\sup\left\{\begin{vmatrix}1&1&1\\f_i(x_i^n)&f_i(y_i^n)&f_i(z_i^n)\\g_j(x_j^n)&g_j(y_j^n)&g_j(z_j^n)\\h_k(x_k^n)&h_k(y_k^n)&h_k(z_k^n)\end{vmatrix};\begin{matrix}f_i\in U(X_i^*)\\g_j\in U(X_j^*)\\h_k\in U(X_k^*)\end{matrix}\right\}.$$

上述行列式的每一个至少有两行具有相同的足标，我们按下一行展开成 4 个 3 阶行列式，利用 $\{\|x_i^n\|\}$，$\{\|y_i^n\|\}$，$\{\|z_i^n\|\}$，$\{\|w_i^n\|\}$ $(i=1,\ 2)$的有界性和 2UR 的条件及引理 5.2.31，即知，当 $n\to\infty$ 时，它趋于 0.

(2) 假设 $\{\|x_i^n\|\}_{n=1}^{\infty}$ 不收敛，$i=1$ 或 2，并且假设

$$A(x^n,\ y^n,\ z^n,\ w^n)\nrightarrow 0,\ n\to\infty.$$

于是存在 $n_1<n_2<\cdots$，使对某个 $\varepsilon>0$，及一切 n_k，有

$$A(x^{n_k},\ y^{n_k},\ z^{n_k},\ w^{n_k})\geqslant\varepsilon,$$

这时存在 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{m_l\}_{l=1}^{\infty}$，使 $\|x_i^{m_l}\|\to a_i$，$i=1,\ 2$，用

(a)同样方法得出矛盾.

这就证明了 $Z=(X\oplus Y)_p(1<p<+\infty)$是 2UR 的.

对一般情况，下面指出证明的基本思路.

如果 $\|x^{(1,n)}+x^{(2,n)}+\cdots+x^{(k+l,n)}\|\to k+l,\ n\to+\infty,\ x^{(i,n)}\in U(X),\ i=1,\ \cdots,\ k+l$，并且 $x^{(i,n)}=(x_1^{(i,n)},\ x_2^{(i,n)})$.

首先，用上述同样方法得到，当 $n\to\infty$ 时，

$$\|x_1^{(i,n)}\|-\|x_1^{(j,n)}\|\to 0,\ \|x_2^{(i,n)}\|-\|x_2^{(j,n)}\|\to 0,$$

$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k+l$. 如果 $\|x_1^{(1,n)}\|\to a_1,\ \|x_2^{(1,n)}\|\to a_2(n\to\infty)$，则当 $n\to\infty$ 时，

$$\|x_1^{(i,n)}\|\to a_1,\ \|x_2^{(i,n)}\|\to a_2,\ i=2,\ \cdots,\ k+l.$$

于是也有，当 $n\to\infty$ 时，

$$\|x_1^{(i_1,n)}+x_1^{(i_2,n)}+\cdots+x_1^{(i_{k+1},n)}\|\to(k+1)a_1,$$

其中$(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{k+1})$是 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ k+l\}$ 的任意$(k+1)$个元的子集. 并且，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\|x_2^{(t_1,n)}+x_2^{(t_2,n)}+\cdots+x_2^{(t_{l+1},n)}\|\to(l+1)a_2,$$

其中$(t_1,\ t_2,\ \cdots t_{l+1})$是$\{1,\ 2,\ \cdots,\ k+l)\}$ 的任意$(l+1)$个元的子集.

估计下式

$$\sup\left\{\left|\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f^{(1)}(x^{(1,n)}) & f^{(1)}(x^{(2,n)}) & \cdots & f^{(1)}(x^{(k+l,n)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^{(k+l-1)}(x^{(1,n)}) & f^{(k+l-1)}(x^{(2,n)}) & \cdots & f^{(k+l-1)}(x^{(k+l,n)}) \end{matrix}\right|;\right.$$

$$\left. f^{(i)}\in U(X^*),\ i=1,\ 2,\ k+l-1\right\}$$

用上面证明方法，将它分解成 $2^{(k+l-1)}$ 项，每一项是 $(k+l)\times(k+l)$ 行列式的上确界. 再将每一项，分别按下法分解成 $\frac{(k+l)!}{(k+1)!}$ 个$(k+1)$阶行列式或 $\frac{(k+l)!}{(l+1)!}$ 个$(l+1)$阶行列式，这看

该行列式中属于 X_2^* 的泛函小于或等于 $(l-1)$ 以及大于 $(l-1)$ 而定.

这样得到的有限个行列式的上确界，利用 X_1 是 KUR 的和 X_2 是 LUR 的空间,同上证法,即得所要结论.

如果 $\{\|x_1^{(1,n)}\|\}$ 不收敛,同上面证法(2)导致矛盾! □

注：这个定理也见俞鑫泰、臧尔彬、刘证：华东师范大学学报 1981 年第 1 期 1～8.

R. Geremia & F. Sullivan(*Ann. Math. Pura. Appl.* (1981)231～251)和 J.Bemal & F. Sullivan (*Illinois J. Math.* 27 *no.* 3(1983)501～513)给出了下列引理.

引理 5.2.32 设 X 是 Banach 空间, $x_1, \cdots, x_{k+1}\in S(X)$, 令 $d_1=\operatorname{dist}(x_1, [x_2, \cdots, x_{k+1}])$, $d_2=\operatorname{dist}(x_2, [x_3, \cdots, x_{k+1}])$, $\cdots$, $d_k=\|x_k-x_{k+1}\|$, 则

$$d_1\cdot d_2\cdots d_k\leqslant A(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})\leqslant k^{k/2}d_1\cdot d_2\cdots d_k,$$

其中 $[x_2, \cdots, x_{k+1}]$ 表示由 $x_2, \cdots, x_{k+1}$ 生成的仿射子空间.

证明：由于

$$A(x_1, \cdots, x_{k+1})=\sup\left\{\left|\begin{matrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \langle f_1, x_1\rangle & \langle f_1, x_2\rangle & \cdots & \langle f_1, x_{k+1}\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle f_k, x_1\rangle & \langle f_k, x_2\rangle & \cdots & \langle f_k, x_{k+1}\rangle\end{matrix}\right|;\right.$$

$$\left. f_i\in S(X^*).\ i=1, \cdots, k\right\}.$$

$$=\sup\{M_1\langle f_k, x_1\rangle+M_2\langle f_k, x_2\rangle+\cdots+M_{k+1}\langle f_k, x_{k+1}\rangle\},$$

其中 $M_1, \cdots, M_{k+1}$ 是 $k+1$ 阶行列式按最后一行展开生成的 k 阶子行列式.

由于 $\{f_i\}$ 能够独立地选取,故

$$A(x_1, \cdots, x_{k+1}) = \sup\{\|M_1x_1 + M_2x_2 + \cdots + M_{k+1}x_{k+1}\|;$$
$$f_i \in S(X^*) i=1, 2, \cdots, k\}.$$

如果上述的 $k+1$ 阶行列式的最后一行用 $(1, \cdots, 1)$ 来代替，则行列式变成 0，故有

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_k = 0.$$

又 $f_1, \cdots, f_{k-1}$ 也能够选取得使 M_1 接近于 $A(x_2, x_3, \cdots, x_{k+1})$，故

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})$$
$$\geqslant \|x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_{k+1}x_{k+1}\| A(x_2, \cdots, x_{k+1}),$$

其中 $\alpha_2 + \cdots + \alpha_{k+1} = -1$，因此，

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})$$
$$\geqslant \operatorname{dist}(x_1, [x_2, \cdots, x_k]) A(x_2, \cdots, x_{k+1}),$$

归纳地论证， $A(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) \geqslant d_1 \cdot d_2 \cdots d_k$.

下面证明另一方面的不等式.

令 $y_i \in [x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{n+1}]$，使 $\|x_i - y_i\| = d_i$, $i=1, 2, \cdots, k$. 又令 $\bar{x}_i = x_i - y_i$. 则

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})$$
$$= \sup\left\{\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \langle f_1, \bar{x}_1\rangle & \langle f_1, \bar{x}_2\rangle & \cdots & \langle f_1, \bar{x}_k\rangle & \langle f_1, x_{k+1}\rangle \\ \langle f_2, \bar{x}_1\rangle & \langle f_2, \bar{x}_2\rangle & \cdots & \langle f_2, \bar{x}_k\rangle & \langle f_2, x_{k+1}\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle f_k, \bar{x}_1\rangle & \langle f_k, \bar{x}_2\rangle & \cdots & \langle f_k, \bar{x}_k\rangle & \langle f_k, x_{k+1}\rangle \end{matrix}\right\|\right\}.$$

对于 $\{f_1, f_2, \cdots, f_k\} \subset S(X^*)$，定义 l_2^n 的元

$$r_i = (\langle f_1, \bar{x}_i\rangle, \langle f_2, \bar{x}_i\rangle, \cdots, \langle f_n, \bar{x}_i\rangle),$$

利用 Hadamard 不等式(*Bull. Sci. Math.* (2) 17 (1893) 240～246)，有

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})$$
$$\leqslant \sup\{\|r_1\|_2 \cdot \|r_2\|_2 \cdots \|r_k\|_2; f_1, f_2, \cdots, f_k \in S(X^*)\}$$
$$\leqslant (\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \cdots + \|f_k\|^2)^{\frac{k}{2}} d_1 \cdot d_2 \cdots d_k$$

$\leqslant k^{\frac{k}{2}} d_1 \cdot d_2 \cdots d_k$. □

J. Bernal & F. Sullivan(*Illinois J. Math.* 27 (3) 1983 501～513)证明了一个超自反的充分条件.

定理5.2.33 若 X 不是超自反的,则对一切 $\delta>0$,和一切 n,存在 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}\}\subset U(X)$,使得

$$\|x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}\|\geqslant(n+1)-\delta,$$

且
$$A(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})\geqslant 2^n-\delta.$$

注：下面的一个直接证明是由俞鑫泰给出的.

证明：由于超自反空间与 J 凸空间是一致的. 因此,若 X 不是超自反的,则 X 不是 $J(n, \varepsilon)$凸的,对一切 n,和一切 $\varepsilon>0$.

由于下列 $n+1$ 阶行列式的绝对值等于 2^n,即

$$\left|\,|(a_{ij})|\,\right|=\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & -1 & * \\ & & & * & * \\ 1 & -1 & * & & * \end{vmatrix}\right|=2^n,$$

其中(*)是任意绝对值小于等于1的数.

利用行列式的连续性,对任何 $\varepsilon>0$,可选 $\delta>0$,使得当 $|a_{ij}|\leqslant 1$, $|b_{ij}|\leqslant 1$,且 $|a_{ij}-b_{ij}|<\delta$ 时,有

$$\left|\,\left|\,|(a_{ij})|\,\right|-\left|\,|(b_{ij})|\,\right|\,\right|<\varepsilon.$$

由于 X 不是 $J(n+1, \delta)$ 凸的,故存在 $(x_1, \cdots, x_{n+1})\subset U(X)$,使

$$\|x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}\|\geqslant(n+1)-\delta$$
$$\|x_1+\cdots+x_n-x_{n+1}\|\geqslant(n+1)-\delta$$
$$\vdots$$
$$\|x_1-x_2\cdots-x_{n+1}\|\geqslant(n+1)-\delta$$

由此,可选 $f_1, \cdots, f_n\in S(X^*)$,使

$$f_1(x_1)>1-\delta,\ f_1(x_2)>1-\delta,\ \cdots,\ f_1(x_{n+1})<-1+\delta$$

$$\cdots\cdots$$

$$f_n(x_1)>1-\delta,\ f_n(x_2)<-1+\delta,\ \cdots,\ f_n(x_{n+1})<-1+\delta,$$

则容易得到， $A(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n+1})\geqslant 2^n-\varepsilon$. □

推论 5.2.34 假设对某个 $\delta>0$ 和某个 ε, $0<\varepsilon<1$, 存在一个整数 n, 使对一切 $\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}\subset U(X)$, 若

$$\left\|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right\|>1-\delta,$$

则 $$A(x_1,\ \cdots,\ x_n)<\varepsilon,$$

那么 X 是超自反的.

俞鑫泰(科学通报, 24(1983)1473—1475) 证明 KUR 空间是 NUC 空间.

定理 5.2.35 若 Banach 空间 X 是 KUR 的, 则 X 是 NUC 空间.

证明: 由定理 5.2.22 知 NUC⇔自反 &UKK, 又由定理 5.2.3 知, KUR⇒自反. 故只须证明 KUR⇒UKK 即可.

若 X 不是 UKK 空间, 则存在 $\{x^n\}\subset U(X)$, 使得 $\|x^n\|\to 1$, 且存在 $\{x_i^n\}_{i=1}^\infty\subset U(X)$, 使

$$x_i^n\xrightarrow{w}x^n,\ \operatorname{sep}(x_i^n)\geqslant\varepsilon,\ \forall n, \text{对某个 } \varepsilon>0.$$

令 $y_i^n=x^n-x_i^n$, 则 $\|y_i^n\|\leqslant 2$, 且 $\operatorname{sep}(y_i^n)\geqslant\varepsilon$.

对任何 n, 由于 $\{\|y_i^n\|\}_{i=1}^\infty$ 是有界的, 故存在 $\{\|y_i^n\|\}_{i=1}^\infty$ 的子序列(不妨仍记作) $\{\|y_i^n\|\}_{i=1}^\infty$, 使

$$\|y_i^n\|\xrightarrow[i]{}a_n.$$

容易看到, $a_n\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}>0$, $\forall n$.

(1) 在 X 是 2UR 空间情况.

选 $\eta>0$, 使 $\eta<\min\left(1,\ \dfrac{\varepsilon}{8}\right)$. 选 2UR 空间定义中相应于 $\dfrac{\varepsilon}{2}\eta$ 的 $\delta\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\eta\right)>0$.

选 N_0 充分大，使 $f^{N_0}(x^{N_0})>1-\frac{1}{3}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\eta\right)$，其中 $f^{N_0}\in S(X^*)$，$f^{N_0}(x^{N_0})=\|x^{N_0}\|$.

固定这个 N_0，容易看到，当 i, j 充分大时，有

$$\|x^{N_0}-y_i^{N_0}\|\leqslant 1,\ \|x^{N_0}-y_i^{N_0}\|\leqslant 1,$$

且 $3\geqslant\|x^{N_0}+(x^{N_0}-y_i^{N_0})+(x^{N_0}-y_i^{N_0})\|>3-\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\eta\right)$，由于 X 是 2UR 空间，故

$$\begin{aligned}a_{N_0}\eta\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\eta&>A(x^{N_0},\ x^{N_0}-y_i^{N_0},\ x^{N_0}-y_j^{N_0})\\&=A(0,\ y_i^{N_0},\ y_j^{N_0})\\&\geqslant\|\,\|y_i^{N_0}\|y_j^{N_0}-f_i^{N_0}(y_j^{N_0})y_i^{N_0}\|,\end{aligned}$$

其中 $f_i^{N_0}\in S(X^*)$，$f_i^{N_0}(y_i^{N_0})=\|y_i^{N_0}\|$. 为了写法方便，下面将省略标号 N_0.

于是，我们有，当 i, j 充分大时，

$$a\eta>\|\,\|y_i\|y_j-f_i(y_j)y_i\|, \tag{5.6}$$

从而

$$a\eta>|\,\|y_i\|\cdot\|y_j\|-|f_i(y_j)|\cdot\|y_i\|\,|. \tag{5.7}$$

由于 $\|y_i\|\xrightarrow[i]{}a$，容易得到，当 i, j 充分大时，有

$$|\,\|y_i\|-|f_i(y_j)|\,|<\varepsilon/4. \tag{5.8}$$

再考虑充分大 i, j，使

$$\frac{a}{2\|y_i\|}<\frac{3}{4},\quad \frac{a}{2\|y_j\|}<\frac{3}{4}, \tag{5.9}$$

若 $f_i(y_j)\geqslant 0$，则由(5.6)式有，

$$\begin{aligned}a\eta&\geqslant\|f_i(y_j)y_i-\|y_i\|y_j\|\\&\geqslant\|y_i\|\cdot\|y_i-y_j\|-\|y_i\|\cdot|f_i(y_j)-\|y_i\|\,|,\end{aligned}$$

由(5.8)、(5.9)式有

$$\|y_i-y_j\|\leqslant\frac{a\eta}{\|y_i\|}+|f_i(y_j)-\|y_i\|\,|<\frac{3}{2}\eta+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.10}$$

若$f_i(y_j)\leqslant 0$,同上计算也有

$$\|y_i+y_j\|\leqslant\frac{a\eta}{\|y_i\|}+|f_i(y_j)+\|y_i\||<\frac{3}{2}\eta+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.11}$$

固定充分大的i,当k, $j>i$时,若$f_i(y_j)>f_i(y_k)\geqslant 0$,则由(5.10)式有

$$\|y_k-y_j\|\leqslant\|y_k-y_i\|+\|y_i-y_j\|<\varepsilon$$

若$f_i(y_j)$, $f_i(y_k)<0$,则由(5.11)式有

$$\|y_k+y_j\|\leqslant\|y_k+y_i\|+\|y_i+y_j\|<\varepsilon。$$

总之,这时与$\mathrm{sep}(y_i)\geqslant\varepsilon$矛盾.故当$X$是2UR时,$X$必是NUC空间.

(2) 在X是3UR空间情况.

同(1)作法,取相应于$\frac{\varepsilon}{2}\eta^2$的3UR空间定义中相应的$\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\eta^2\right)$. 容易看到,当$i_1$, i_2, i_3充分大时,有

$$a\eta^2\geqslant A(0,\ y_{i_1},\ y_{i_2},\ y_{i_3}).$$

根据引理5.2.31,有

$$a\eta^2\geqslant\mathrm{dist}(y_{i_1},\ [0,\ y_{i_2},\ y_{i_3}])A(0,\ y_{i_2},\ y_{i_3}). \tag{5.12}$$

若对一切充分大的i_1, i_2均有

$$a\eta\geqslant A(0,\ y_{i_1},\ y_{i_2}),$$

则由(1)的证明知,这与$\mathrm{sep}(y_i)\geqslant\varepsilon$矛盾.因此至少有充分大的$(i_1,\ i_2)$,使

$$A(0,\ y_{i_1},\ y_{i_2})<a\eta.$$

由(5.12)式知,对这组固定的充分大的i_{10}, i_{20},及$k>\max\{i_{10},\ i_{20}\}$,有

$$\eta>\mathrm{dist}(y_k,\ [0,\ y_{i_{10}},\ y_{i_{20}}]).$$

容易看到,存在$z_k\in\mathrm{span}\{y_{i_{10}},\ y_{i_{20}}\}$,使

$$\|y_k-z_k\|=\mathrm{dist}(y_k,\ \mathrm{span}\{y_{i_{10}},\ y_{i_{20}}\}),$$

利用有限维空间中有界集的相对紧性知,存在$\{z_k\}$的子列$\{z_{k_l}\}$

使 $z_{k_l} \xrightarrow[l]{\|\cdot\|} z_0 \in \mathrm{span}\{y_{i_{1n}}, y_{i_{2n}}\}$. 这样，当 l、m 充分大时，有 $\|y_{k_l} - y_{k_m}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. 这又与 $\mathrm{sep}(y_i) \geqslant \varepsilon$ 矛盾. 故当 X 是 3UR 空间时, X 必是 NUC 空间.

不难将(2)的证明推广到 KUR 空间($k>3$)情况. 证毕.

推论 5.2.36 对任何正整数 K, KUR 空间是具(H)性质的.

证明：由于 NUC⇒UKK⇒H. □

此外,俞鑫泰(数学年刊 1985 年(英文辑))还证明

定理 5.2.37 对任何正整数 K, LKUR 空间具(H)性质.

D. van. Dwlst & B. Sims (to appear) 证明 NUC 具有正规结构. 从而由定理 5.2.34 知, KUR 空间具正规结构(KUR 空间具正规结构也见 (F. Swllivan, *Canad. J. Math.* (1979) 628 623))

首先,引入 Chebyshev 中心概念.

定义 5.2.7 令 B、C 是 Banach 空间 X 的两个子集, 且 B 是有界的, 对每个 $x \in C$, 定义

$$r(x) = \sup\{\|x-y\|, y \in B\},$$

且令

$$r_0 = \inf\{r(x), x \in C\}.$$

集合 (可能是空集) $\{x \in C, r(x) = r_0\}$ 称为 B 关于 C 的 Chebyshev 中心. 且 r_0 称为 B 关于 C 的 Chebyshev 半径.

注：由于 r 是凸的连续函数, 故 r 是 w 下半连续的, 因此, 如果 C 是 w 紧凸集, 则关于 C 的 Chebyshev 中心是一个非空 w 紧凸集.

定理 5.2.38 若 Banach 空间 X 是 UKK 空间, 则关于 w 紧凸集的 Chebyshev 中心是非空紧凸集.

证明：令 X 的子集 C 是 w 紧凸集, 且令 B 是 X 的有界凸子集. 由定义 5.2.7 的注知, B 关于 C 的 Chebyshev 中心 A 是非空 w 紧凸集. 令 r_0 是 B 关于 C 的 Chebyshev 半径.

若 A 不是紧的,则 A 包含一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,使

$$\operatorname{sep}(x_n)\geqslant\varepsilon, \text{对某个 } \varepsilon>0.$$

通过转到子序列,不妨假设 $x_n\xrightarrow{w}x$.

选 $\delta=\delta\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)>0$ 是 UKK 定义中相应于 $\frac{\varepsilon}{r_0}$ 的 δ.

固定 $y\in B$, 由定义, $\|r_0^{-1}(x_n-y)\|\leqslant1$, $n=1, 2, \cdots$

$$\operatorname{sep}(r_0^{-1}(x_n-y))\geqslant r_0^{-1}\varepsilon,$$

且
$$r_0^{-1}(x_n-y)\xrightarrow{w}r_0^{-1}(x-y).$$

因此,由空间是 UKK 的知,

$$\|x-y\|\leqslant(1-\delta)r_0,$$

由于 y 是 B 中任意元, 这与 r_0 是 B 关于 C 的 Chebyshev 半径矛盾! □

定理 5.2.39 若 X 是 NUC 空间,则 X 具正规结构.

证明: 由于 NUC 空间是自反的, 故每个有界闭凸集 C 是 w 紧的. 如果 C 是紧的,则 C 具正规结构. (事实上,若 C 不具正规结构, 则存在 C 的有界闭凸子集 H, 使得对任何 $x_1\in H$, 存在 $x_2\in H$, 使 $\|x_1-x_2\|=\operatorname{diam}(H)$(注意,这时 H 是紧集,故上确界能达到),但是由于 H 是凸的, 故 $\frac{x_1+x_2}{2}\in H$, 因此, 又存在 $x_3\in H$,使

$$\left\|\frac{x_1+x_2}{2}-x_3\right\|=\operatorname{diam}(H).$$

以这种方式继续下去, 我们得到 H 的一个子序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使

$$\left\|x_{n+1}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right\|=\operatorname{diam}(H).$$

但是

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(H)&=\left\|x_{n+1}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right\|\\&=\left\|\frac{x_{n+1}-x_1}{n}+\frac{x_{n+1}-x_2}{n}+\cdots+\frac{x_{n+1}-x_n}{n}\right\|\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_{n+1}-x_i\|$$

$$\leqslant \operatorname{diam}(H).$$

故有 $\|x_{n+1}-x_i\|=\operatorname{dian}(H)$. $i=1, 2, \cdots, n$, $\forall n$. 从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列. 这与 H 是紧的矛盾).

否则 C 是 w 紧但不是紧的,由定理 5.2.38 知, C 关于自身的 Chebyshev 中心 A 是紧的,从而 $A\subsetneqq C$. 因此, C 关于自身的 Chebyshev 半径 $r_0<\operatorname{diam} C$, 从而, A 的每一点是 C 的非直径点. 所以 C 具有正规结构. □

推论 5.2.40 若 X 是 KUR 空间,则 X 具正规结构.

证明: 由定理 5.2.35 及定理 5.2.39 即知. □

正规结构的概念在不动点理论中起着重要作用.

定义 5.2.8 若 T 是 Banach 空间 X 的子集 K 上定义的一个映像, $T: K\to X$, T 称为非扩张的, 如果对任何 $x, y\in K$, 有

$$\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\|.$$

定义 5.2.9 若 $T: K\to X$ 是一个映像,其中 K 是 Banach 空间 X 的一个子集,若存在 $x\in K$, 使

$$Tx=x,$$

则 x 称为 T 的一个不动点.

W. A. Kirk(*Amer. M. Monthly* 72(1965)1004—1006)给出了一个重要的有关非扩张映像的不动点定理.

定理 5.2.41 若 X 是 Banach 空间, K 是 X 中 w 紧凸集且 K 具正规结构, T 是 $K\to K$ 的一个非扩张映像, 则 T 具有不动点.

证明: 令 $\mathscr{F}=\{F\subset K$; F 是非空有界闭凸集, 且 $T(F)\subset F\}$. 则$(\mathscr{F}, \subset)$构成偏序集(其中 $\subset$ 是集合的包含关系).

任取 $\mathscr{F}$ 的全序子集族 $\{F_i, i\in\Lambda\}$, 则由 K 的 w 紧性知,

$$A=\bigcap_{i\in\Lambda}F_i\neq\emptyset,$$

且 A 是有界闭凸集，$T(A)\subset A$，故 $A=\bigcap\limits_{i\in A}F_i\in\mathscr{F}$，由 Zorn 引理知，存在极小元 $H\in\mathscr{F}$。

H 关于自身的 Chebyshev 中心 $C(H)$ 是有界闭凸子集，且 $T(C(H))\subset C(H)$.（事实上，令 r_0 为 H 关于自身的 Chebyshev 半径，对任何 $x\in C(H)$, $y\in H$,

$$\|Ty-Tx\|\leqslant\|x-y\|\leqslant r_0,$$

故 $Ty\in U(Tx, r_0)\equiv\{z;\ \|z-Tx\|\leqslant r_0,\ z\in X\}$，从而

$$TH\subset U(Tx, r_0).$$

但 $TH\subset H$，故

$$TH\subset U(Tx, r_0)\cap H,$$

又 $H\cap U(Tx, r_0)\subset H$，故

$$T(H\cap U(Tx, r_0))\subset TH,$$

从而
$$T(H\cap U(Tx, r_0))\subset U(Tx, r_0)\cap H.$$

因此，$H\cap U(Tx, r_0)\in\mathscr{F}$，由 H 的极小性知，

$$H\cap U(Tx, r_0)=H,$$

从而
$$H\subset U(Tx, r_0).$$

对任何 $y\in H$，有 $\|Tx-y\|\leqslant r_0$，故

$$r_0\leqslant r(Tx)\leqslant r_0.$$

因此，$r(Tx)=r_0$，所以 $Tx\in C(H)$，这就表明 $T(C(H))\subset C(H)$)．从而 $C(H)\in\mathscr{F}$.

这时，必有 $\operatorname{diam} H=0$，否则 $\operatorname{diam} H>0$，由 K 具有正规结构有 $\operatorname{diam} C(H)<\operatorname{diam} H$，因此 $C(H)\subsetneq H$，这又与 H 的极小性矛盾！

由于 H 是非空的，$\operatorname{diam} H=0$，故 H 是单点集，即 $H=\{x_0\}$，由于 $H\in\mathscr{F}$，即知 $Tx_0=x_0$。这表明 T 具有不动点．□

推论 5.2.42 若 X 是 NUC 空间，则对每个从有界闭凸集到自身的非扩张映像必具有不动点．若 X 是 KUR 空间，则对每个从有界闭凸集到自身的非扩张映像必具不动点．

证明：由于 KUR⇒NUC⇒自反 & 具正规结构即知．□

K. Fan & I. Glicksburg(*Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 41(1955)947—953)引入了 KR 空间概念.

定义 5.2.10 令 $K\geqslant 2$ 是一个整数，一个 Banach 空间 X 称为是 KR 的，如果对任何 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset X$，使

$$\lim_{n_1,\cdots,n_k\to\infty}\left\|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}\right\|=1,$$

则 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X 中 Cauchy 序列(从而收敛于 X 中某个元 x_0). X 称为 FR，如果它是 KR，对某个 $K\geqslant 2$.

Bor Lwh Lin & Yu Xin tai (to appear in *Math. Anal. Appl.*)讨论了 KR 空间与 KUR 空间之间的关系. 下面是有关结果.

引理 5.2.43 若 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 KUR 空间的一个序列，使 $x_i\xrightarrow{w}x\in X$，如果

$$\lim_{n_1,\cdots,n_{k+1}\to\infty}\left\|\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}x_{n_i}\right\|=1,$$

则 $\|x\|=1$，且 $\lim\limits_{i\to\infty}\|x_i-x\|=0$.

证明：显然，$\lim\limits_{i\to\infty}\|x_i\|=1$，由于 X 是 KUR 的，且

$$\lim_{n_1,\cdots,n_{k+1}\to\infty}\left\|\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}x_{n_i}\right\|=1,$$

于是 $\lim\limits_{n_1,\cdots,n_{k+1}\to\infty}A(x_{n_1},\cdots,x_{n_{k+1}})=0$. 令 $y_i=x_i-x$, $i=1,2,\cdots$. 假设 $\lim\limits_{i\to\infty}\|y_i\|\neq 0$，通过选取子序列(如果必要的话)存在 $\varepsilon>0$，使 $\|y_i\|\geqslant\varepsilon$, $\forall i$. 由于 $y_i\xrightarrow{w}0$，再选取子序列(如果必要的话)，可假设 $\{y_i\}$ 是一个基序列. 令 $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的基常数为 M，令 $f_i\in X^*$，使 $f_i(y_j)=\delta_{ij}$, $i,j=1,2\cdots$. 于是 $\|f_i\|\leqslant\dfrac{2M}{\varepsilon}$, $i=1,2,\cdots$. 因此，对任何 $n_1,\cdots,n_{k+1}$，有

$$A(y_{n_1},\cdots,y_{n_{k+1}})\geqslant\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^k.$$

故

$$(\varepsilon/2M)^k \leqslant \lim_{n_1,\cdots,n_{k+1}\to\infty} A(y_{n_1},\cdots,y_{n_{k+1}})$$
$$=\lim_{n_1,\cdots,n_{k+1}\to\infty} A(x_{n_1},\cdots,x_{n_{k+1}}),$$

这是不可能的. □

定理 5.2.44 每个严格凸的 KUR 空间是(K+1)R 空间.

证明: 令 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 是 KUR 空间 X 的一个序列,使

$$\lim_{n_1,\cdots,n_{k+1}\to\infty}\left\|\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}x_{n_i}\right\|=1.$$

由于每个 KUR 空间是自反的, 故 $\{x_i\}$ 有一个 w 序列闭包点 $x\in X$, 由引理 5.2.43 知, 只须证明 x 是 $\{x_i\}$ 的唯一的 w 序列闭包点即可. 假设 y 是 $\{x_i\}$ 的一个 w 序列闭包点,则存在 $n_1<m_1<n_2<m_2<\cdots$,使

$$x_{n_i}\xrightarrow{\text{w}}x,\ x_{m_i}\xrightarrow{\text{w}}y,$$

由引理 5.2.43 知, $\|x\|=\|y\|=1$, 且

$$\lim_{i\to\infty}\|x_{n_i}-x\|=\lim_{i\to\infty}\|x_{m_i}-y\|=0.$$

由于
$$\lim_{n_1,\cdots,n_{k+1}\to\infty}\left\|\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k}x_i\right\|=1.$$

应用引理 5.2.43 到$\left\{\frac{1}{2}(x_{n_i}+x_{m_i})\right\}$,我们得到

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|=1,$$

由于 X 是严格凸的,故 $x=y$. □

由于每个 KUR 空间是超自反的, 但 M. M. Day 空间 $X_M=\left(\sum_{i=1}^\infty\oplus l_n^n\right)_2$ 是非超自反的, K. Fan & I. Glicksburg 证明 X_M 是 $2R$ 的(*Proc. Nat. Acad. Sci. U·S·A.* 41(1955)947—953). 故存在 $2R$ 空间不是 KUR 空间, ∀K.

下面例子更进一步表明存在 $2R$ 空间它线性同胚于 l_2 但 X 不是 KUR, $\forall K\geqslant1$.

例 1: 令 $E=(l_2,\ \|\cdot\|)$,其中

$$\|x\|^2=(|a_1|+(a_2^2+a_3^2+\cdots)^{1/2})^2+\left(\left(\frac{a_2}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\cdots\right)$$

对一切 $x=(a_1, a_2, \cdots)$.

T. Polak & B. Sims (*Canad. Math. Bull.* 26 (1983) 118—120)证明 E 是 $2R$. 令 $X=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus E\right)_2$, 则由 K. Fan & I. Glicksbury 的结果知, X 是 $2R$. 下面将证明 X 不是 KUR, $\forall K\geqslant 1$. 固定一个整数 $K\geqslant 1$. 令 $\{e_n\}$ 是通常 l_2 的自然基, 对 $n=1, 2, \cdots$, 令

$$x_1^n=\left(\frac{e_1+e_n}{2}, \overbrace{e_n, e_n, \cdots, e_n}^{k}, 0, 0, \cdots\right),$$

$$x_2^n=\left(e_1, \frac{e_1+e_n}{2}, e_n, \cdots, e_n, 0, 0, \cdots\right),$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_{k+1}^n=\left(e_1, e_1, \cdots, e_1, \frac{e_1+e_n}{2}, 0, 0, \cdots\right),$$

其中最后非零的向量是在$(k+1)$个坐标. 则

$$\lim_{n\to\infty}\|x_i^n\|=\sqrt{k+1},\ i=1, 2, \cdots, k+1.$$

且
$$\lim_{n\to\infty}\|x_1^n+\cdots+x_{k+1}^n\|=(k+1)^{3/2}.$$

然而, 若 $f_1=(e_1, 0, \cdots)$, $f_2=(0, e_1, 0, \cdots)$, $\cdots$, $f_k=(0, \cdots, 0, e_1, 0, \cdots)$, 则

$$A(x_1^n, \cdots, x_{k+1}^n)\geqslant\frac{1}{2^k\|f_1\|\cdots\|f_k\|}>0,\ \forall n=1, 2, \cdots.$$

这表明 X 不是 KUR. □

下面例子表明, 对每个整数 $K\geqslant 2$, 存在一个严格凸 Banach 空间, 它线性同胚于 l_2, 它是 KUR 空间, 但不是 KR 空间.

例 2: 对正整数 $K\geqslant 2$, 令 $i_1<i_2<\cdots i_k$. 对每个 $x=(a_1, a_2, \cdots)\in l_2$, 定义

$$\|x\|_{(i_1,\cdots,i_k)}^2=\left(\sum_{j=1}^{k}|a_{i_j}|\right)^2+\sum_{i\neq i_1,\cdots,i_k}a_i^2.$$

很清楚，　$\|x\|_{l_2}\leqslant\|x\|_{(i_1,\cdots,i_k)}\leqslant\sqrt{k}\,\|x\|_{l_2}$, $\forall x\in l_2$.

令 $X_{i_1,\cdots,i_k}=(l_2,\ \|\cdot\|_{(i_1,\cdots,i_k)})$，很清楚，$X_{i_1,\cdots,i_k}$ 线性同胚于 $(l_1^k\oplus l_2)_2$，故 $X_{i_1,\cdots,i_k}$ 是 KUR，但不是(K－1)UR，对一切$(i_1,\cdots,i_k)$. 进一步，$\{X_{(i_1,\cdots,i_k)}\}$有同样的 K 凸性模，即，对每个 $\varepsilon>0$，同样的 $\delta(\varepsilon)$可使用在 $X_{i_1,\cdots,i_k}$，对一切 $i_1<\cdots<i_k$.

对每个 $x\in l_2$，令

$$\|x\|_k=\sup_{i_1<\cdots<i_k}\|x\|_{i_1,\cdots,i_k},\ E_k=(l_2,\ \|\cdot\|_k).$$

则　$$\|x\|_{l_2}\leqslant\|x\|_k\leqslant\sqrt{k}\,\|x\|_{l_2},\ \forall x\in X_k.$$

下面证明 E_k 是 KUR 空间但不是 KR.

为了看到 E_k 不是 KR 空间，令 $\{e_i\}$ 是 l_2 通常的自然基，容易看到，$\|e_i\|_k=1$, $i=1, 2, \cdots$,

$$\lim_{n_1\cdots n_k\to+\infty}\left\|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}e_{n_i}\right\|_k=1\text{ 且 }\|e_i-e_j\|_k=2,\ \forall i\neq j.$$

为了证明 E_k 是 KUR 空间，对 $x_1, \cdots x_{k+1}\in l_2$，令 $V_k(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 为 $x_1,\cdots,x_{k+1}$ 在 E_k 中所生成的凸集的体积，而 $V_{l_2}(x_1,\cdots,x_{k+1})$为 $x_1,\cdots,x_{k+1}$ 在 l_2 中所生成的凸集的体积，$V_{(i_1,\cdots,i_k)}(x_1,\cdots,x_{k+1})$为 $x_1,\cdots,x_{k+1}$ 在 $X_{(i_1,\cdots,i_k)}$ 中所生成的凸集的体积. 容易看到，对任何 $x_1,\cdots,x_{k+1}$,

$$\begin{aligned}V_{l_2}(x_1,\cdots,x_{k+1})&\leqslant V_{(i_1,\cdots,i_k)}(x_1,\cdots,x_{k+1})\\&\leqslant V_k(x_1,\cdots,x_{k+1})\\&\leqslant k^{k/2}V_{l_2}(x_1,\cdots,x_{k+1}).\end{aligned}$$

给 $\varepsilon>0$，令 $\delta\left(\frac{\varepsilon}{k^{\frac{k}{2}}}\right)>0$，使对任何 $i_1,\cdots,i_k$，如果 $\|x_n\|_{i_1,\cdots,i_k}\leqslant1$, $n=1, 2,\cdots,k+1$，且 $\left\|\frac{1}{k+1}\sum_{n=1}^{k+1}x_n\right\|_{(i_1,\cdots i_k)}<1-\delta$，则

$$V_{(i_1,\cdots,i_k)}(x_1,\cdots,x_{k+1})<\varepsilon/k^{k/2}.$$

假设 $\|x_n\|_k\leqslant1$, $n=1, 2,\cdots,k+1$，且 $\left\|\frac{1}{k+1}\sum_{n=1}^{k+1}x_n\right\|_k<1-\delta$，选$(i_1,\cdots,i_k)$，使$\left\|\frac{1}{k+1}\sum_{n=1}^{k+1}x_n\right\|_{(i_1,\cdots,i_k)}<1-\delta$，则

$$V_k(x_1, \cdots, x_{k+1}) \leqslant k^{k/2} V_{l_2}(x_1, \cdots, x_{k+1})$$
$$\leqslant k^{k/2} V_{(i_1, \cdots, i_k)}(x_1, \cdots, x_{k+1})$$
$$< \varepsilon.$$

这表明 E_n 是 KUR 空间.

最后, 令 $X_k = (l_2, \|\cdot\|)$, 其中

$$\|x\|^2 = \|x\|_k^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{2^i}, \ \forall x = (a_1, a_2, \cdots) \in l_2.$$

容易看到, X_k 线性同胚于 l_2, 且是严格凸, X_k 是 KUR, 但不是 KR. □

注: 这个例子也表明存在(K+1)UR 且严格凸的空间并不是 KUR 空间.

(九)基与 Banach 空间的几何性质.

这里将给出若干基与凸性、光滑性及 Banach 空间的某些几何性质的联系的结果. 它们是由俞鑫泰和张文耀证明的.

定理 5.2.45 若 X 是具基 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 Banach 空间, 满足下列条件: 对任何 $\varepsilon > 0 \left(\varepsilon < \frac{2}{3}\right)$, 存在 $0 < \delta < 1$, 使得当 $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$, $\|P_n x\| \geqslant \delta$ 时, 有 $\|(I - P_n)x\| \leqslant \varepsilon$, 则 X 是 UKK 空间.

证明: 事实上, 对任何 $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon < 2)$, 当 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, sep $(x_n) \geqslant \varepsilon$, $x_n \xrightarrow{w} x$, 则有 $\|x\| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, 其中 $\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ 是定理条件中相应 $\frac{\varepsilon}{3}$ 的δ.

否则, 存在 $\varepsilon > 0$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\|x_n\| \leqslant 1$, $x_n \xrightarrow{w} x \in X$, sep $(x_n) \geqslant \varepsilon$, 但 $\|x\| > \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$. 选择正整数 N, 使 $\|P_N x\| > \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, 由于 $x_n \xrightarrow{w} x$, 故 $P_N x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} P_N x$, 因此, 对充分大 n, m, 有 $\|P_N x_n\| \geqslant \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, $\|P_N x_m\| \geqslant \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, 且 $\|P_N x_n - P_N x_m\| < \frac{\varepsilon}{3}$. 因此,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sep}(x_n) &\leqslant \|x_n - x_m\| \\
&\leqslant \|x_n - P_N x_n\| + \|P_N x_n - P_N x_m\| + \|x_m - P_N x_m\| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

这是不可能的. □

由这个定理, 我们可以证明 Baernstein II 空间是 NUC 空间, 这就否定了 R. Huff 的猜想, 即 NUC$\nRightarrow$BSP.

例 1: Baernstein II 空间(第 4 章 § 4 例 2) 是 NUC 空间. 由于 Baernstein II 空间是具基的自反 Banach 空间, 因此, 只须验证 Baernstein II 空间的基满足定理 5.2.45 的条件就可以了.

事实上, 对任何 $\varepsilon>0$, 选取 $\delta=(1-\varepsilon^2)^{1/2}$ 即可. 因为若 $\|P_n x\|>\delta$, 则存在一个块序列 $\{\sigma_k\}\subset\Gamma$, 使得

$$S^2(P_n x,\ \{\sigma_k\})>1-\varepsilon^2.$$

令 $\{\sigma_k'\}\subset\Gamma$ 是任何块序列, 由于对任何 n,

$$\sigma_k\cap\{1,\ \cdots,\ n\},\ \sigma_k'\cap\{n+1,\ \cdots\}\in\Gamma,$$

且对任何 $k,\ j$,

$$\sigma_k\cap\{1,\ \cdots,\ n\}<\sigma_j'\cap\{n+1,\ \cdots\}$$

(如果它们不空), 因此, 我们可以用一个新的块序列 $\{\sigma_k''\}$, 代替 $\sigma_k\cap\{1,\ \cdots,\ n\}$ 和 $\sigma_k'\cap\{n+1,\ \cdots\}$, 于是

$$
\begin{aligned}
&S^2(P_n x,\ \{\sigma_k\cap\{1,\ \cdots,\ n\}\}) \\
&\quad +S^2((I-P_n)x,\ \{\sigma_k'\cap\{n+1,\ \cdots\}\}) \\
&=S^2(x,\ \{\sigma_k''\})\leqslant 1.
\end{aligned}
$$

注意到 $S(P_n x,\ \{\sigma_k\})=S(P_n x,\ \{\sigma_k\cap\{1,\ \cdots,\ n\}\})$, 且 $S((I-P_n)x,\ \{\sigma_k'\})=S((I-P_n)x,\ \{\sigma_k'\cap\{n+1,\ \cdots\}\})$, 因此,

$$
\begin{aligned}
S^2((I-P_n)x,\ \{\sigma_k'\}) &\leqslant 1-S^2(P_n x,\ \{\sigma_k\}) \\
&\leqslant 1-(1-\varepsilon^2)=\varepsilon^2.
\end{aligned}
$$

由于 $\{\sigma_k'\}$ 是任何块序列, 故

$$\|(I-P_n)x\|\leqslant\varepsilon.$$

这表明 Baernstein II 空间是 UKK 空间, 从而是 NUC 空间. □

下面讨论基与 Banach-Saks 性质之间的关系.

定理 5.2.46 如果 X 是具基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的自反的 Banach 空间,如果基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足下列条件:

存在 δ, $0<\delta<2$, 和 N_0 使得, 对任何 $x\in S(X)$, 当 $n>N_0$ 时,有

$$\|P_n x\|+\|(I-P_n)x\|\leqslant\delta,$$

则 X^* 具 BSP

证明: 由于 X 是自反的,则相应的坐标泛函 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的基. 对任何 $f\in X^*$, 有 $f=\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(x_n)f_n$.

由 Kakutani 证明一致凸空间具 BSP 中知道, 只须证明存在 θ, $0<\theta<2$, 使得对任何 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$, $x_n\xrightarrow{\text{w}}0$, 存在 x_{n_1}, x_{n_2}, 满足 $\|x_{n_1}+x_{n_2}\|\leqslant\theta$(见参考书[1]p. 78).

取 $\varepsilon>0$, 使 $\theta=(1+\varepsilon)\delta+2\varepsilon<2$, 其中 δ 为满足定理条件的小于 2 的正数.

设 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S(X^*)$ 是任何 w 收敛于 0 的序列. 我们可选择 $N_1>N_0$, 使 $\left\|\sum\limits_{N_1+1}^{\infty}g_1(x_n)f_n\right\|\leqslant\varepsilon$. 由于 $g_i\xrightarrow{\text{w}}0$, 故对任何 n, 有 $g_i(x_n)\xrightarrow[i]{}0$. 从而存在 n_1, 使 $\left\|\sum\limits_{n=1}^{N_1} g_{n_1}(x_n)f_n\right\|\leqslant\varepsilon$. 于是,

$$\begin{aligned}\|g_1+g_{n_1}\|=&\left\|\sum_{n=1}^{N_1}g_1(x_n)f_n+\sum_{n=N_1+1}^{\infty}g_1(x_n)f_n\right.\\&\left.+\sum_{n=1}^{N_1}g_{n_1}(x_n)f_n+\sum_{n=N_1+1}^{\infty}g_{n_1}(x_n)f_n\right\|\\\leqslant&\left\|\sum_{n=1}^{N_1}g_1(x_n)f_n+\sum_{n=N_1+1}^{\infty}g_{n_1}(x_n)f_n\right\|+2\varepsilon,\end{aligned}\tag{5.13}$$

并且,

$$\left\|\sum_{n=1}^{N_1}g_1(x_n)f_n\right\|\leqslant1+\varepsilon,\quad\left\|\sum_{n=N_1+1}^{\infty}g_{n_1}(x_n)f_n\right\|\leqslant1+\varepsilon.\tag{5.14}$$

任给 $x=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)x_i \in S(X)$，则

$$\left|\left(\sum_{n=1}^{N_1} g_1(x_n)f_n+\sum_{n=N_1+1}^{\infty} g_{n_1}(x_n)f_n\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)x_i\right)\right|$$

$$=\left|\left(\sum_{n=1}^{N_1} g_1(x_n)f_n\right)(P_{N_1}x)\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{n=N_1+1}^{\infty} g_{n_1}(x_n)f_n\right)((I-P_{N_1})x)\right|$$

$$\leqslant\left\|\sum_{n=1}^{N_1} g_1(x_n)f_n\right\|\cdot\|P_{N_1}x\|$$

$$+\left\|\sum_{n=N_1+1}^{\infty} g_{n_1}(x_n)f_n\right\|\cdot\|(I-P_{N_1})x\|.$$

由(5.14)，及定理的条件(因 $N_1>N_0$)有

$$\left|\left(\sum_{n=1}^{N_1} g_1(x_n)f_n+\sum_{n=N_1+1}^{\infty} g_{n_1}(x_n)f_n\right)(x)\right|$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)(\|P_{N_1}x\|+\|(I-P_{N_1})x\|)$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)\delta.$$

由于 x 是 $S(X)$ 的任意元，故

$$\left\|\sum_{n=1}^{N_1} g_1(x_n)f_n+\sum_{n=N_1+1}^{\infty} g_{n_1}(x_n)f_n\right\|\leqslant(1+\varepsilon)\delta. \qquad (5.15)$$

由(5.13)和(5.15)，有

$$\|g_1+g_{n_1}\|\leqslant(1+\varepsilon)\delta+2\varepsilon=\theta<2. \ \square$$

Diestel (参考书[1] p. 78)指出，不知是否有

$$X \text{ 具 BSP} \Rightarrow X^* \text{ 具 BSP}.$$

下面利用定理 5.2.46 证明 Bearnstein II 的例子中的空间，它的共轭空间具 BSP，这就说明：

$$X \text{ 具 BSP} \not\Rightarrow X^* \text{ 具 BSP}.$$

(因为 Bearnstein II 空间是自反的).

例 2：Bearnstein II 空间(第 4 章 § 4 例 2) X，它的共轭空间 X^* 具 BSP. 由定理 5.2.46，只须验证 X 的基满足定理 5.2.46 的条件即可.

事实上，我们证明，可选 $\delta=2^{\frac{1}{2}}$, $N_0=1$.

设 $x\in S(X)$. n 是任意自然数.

设 $\{\sigma_k\}$ 和 $\{\sigma'_k\}$ 是任何两个块基. 则对任何 k,

$$\sigma_k\cap\{1, \cdots, n\},\ \sigma'_k\cap\{n+1, \cdots\}\in\Gamma,$$

且对任何 k,

$$\sigma_k\cap\{1, \cdots, n\}<\sigma'_k\cap\{n+1, \cdots\}$$

(如果它们都不是空集). 从而，我们可以将他们排成一个新的块序列 $\{\sigma''_k\}$. 因此，

$$\begin{aligned}
&S(P_nx, \{\sigma_k\})+S((I-P_n)x, \{\sigma'_k\})\\
&=S(P_nx, \{\sigma_k\cap\{1, \cdots, n\}\})\\
&\quad+S((I-P_n)x, \{\sigma'_k\cap\{n+1, \cdots\}\})\\
&\leqslant 2^{\frac{1}{2}}(S^2(P_nx, \{\sigma_k\cap\{1, \cdots, n\}\})\\
&\quad+S^2((I-P_n)x, \{\sigma'_k\cap\{n+1, \cdots\}\}))^{1/2}\\
&=2^{\frac{1}{2}}(S^2(x, \{\sigma''_k\}))^{1/2}\\
&\leqslant 2^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

由于 $\{\sigma_k\}$ 和 $\{\sigma'_k\}$ 是任意的，故

$$\|P_nx\|+\|(I-P_n)x\|\leqslant 2^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

下面，我们考虑具基的 Banach 空间 X, 如果 X 又是非常光滑的，那么基应当具有什么性质. 张文耀给出了下面定理的直接证明.

定理 5.2.47 若 X 是具基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Banach 空间，又 X 是非常光滑的，且基是单调的，则基是收缩基.

证明：由于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基，故相应的坐标泛函 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基序列，因此，只须证明 $X^*=\overline{\text{span}}\{f_n\}$ 即可. 实际上，只须证明 $X^*=\overline{\text{span}}^W\{f_n\}$ 即可.

由 Bishop-phelps 定理，只须考虑 $f\in S(X^*)$, 且存在 $x\in S(X)$, 使 $f(x)=1$ 的那种 f 即可.

设 $g_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)f_i$，则 $g_n\xrightarrow{w^*}f$，又由于基是单调的，容易看到 $\|g_n\|\leqslant\|f\|$. 从而

$$\|f\|\leqslant\underline{\lim}\|g_n\|\leqslant\overline{\lim}\|g_n\|\leqslant\|f\|.$$

故 $\lim\limits_{n}\|g_n\|=\|f\|$. 从而存在 N，使得当 $n>N$ 时，有 $\|g_n\|>0$，容易看到，

$$\frac{g_n}{\|g_n\|}(x)=\frac{f(P_nx)}{\|g_n\|}\to f(x).$$

由于 X 是非常光滑的，故

$$\frac{g_n}{\|g_n\|}\xrightarrow{w}f,$$

但 $\frac{g_n}{\|g_n\|}\in\mathrm{span}\{f_n\}$，故 $f\in\overline{\mathrm{span}}^{w}\{f_n\}$，即 $X^*=\overline{\mathrm{span}}\{f_n\}$.

这表明 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的一个基. 由定理 2.2.1 知道，基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收缩的. □

（九）一个注记.

陈道奇（数学学报（1982）no. 3）指出，若 X 是 Banach 空间，则 $x_0\in S(X)$ 是光滑点的充分条件是

$$\lim_{r\to0^+}\sup_{\substack{u,v\in S(X)\cap U(x_0,r)\\u\neq v}}\frac{1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|}{\|u-v\|}=0\tag{5.16}$$

成立.

俞鑫泰（数学进展 1986）指出，实际上，条件(5.16)可改为，对任何 $y\in S(X)$，令 $X_{x_0,y}=\mathrm{span}\{x_0, y\}$，则

$$\lim_{r\to0^+}\sup_{\substack{u,v\in S(X_{x_0,y})\cap U(x_0,r)\\u\neq v}}\frac{1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|}{\|u-v\|}=0\tag{5.17}$$

成立. 并给出一个简化证明. 同时当 X 是实 Banach 空间时，(5.16)实际上是范数在 x_0 点 Fréchet 可微的一个充分条件.

定理 5.2.48 若 X 是实或复的 Banach 空间，则 $x_0\in$

$S(X)$是光滑点的一个充分条件是，对任何 $y\in S(X)$，令 $X_{x_0,y}=\mathrm{span}\{x_0, y\}$，有

$$\lim_{r\to0^+}\sup_{\substack{u,v\in S(X_{x_0,y})\cap U(x_0,r)\\ u\neq v}}\frac{1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|}{\|u-v\|}=0$$

成立.

证明：若不然，则存在 $f, g\in X^*$，使 $f\neq g$，且

$$\|f\|=\|g\|=1=f(x_0)=g(x_0).$$

令 $F=\frac{1}{2}(f+g)$，则 $\|F\|=1=F(x_0)$，且 $F\neq f$，故存在 $x_1\in X$，使 $F(x_1)=0$，$1\geqslant a=f(x_1)>0$.

令 $x_n=\dfrac{x_0+\frac{1}{n}x_1}{\left\|x_0+\frac{1}{n}x_1\right\|}$，$y_n=\dfrac{x_0-\frac{1}{n}x_1}{\left\|x_0-\frac{1}{n}x_1\right\|}$. 显然，$\|x_n\|=\|y_n\|=1$，且

$$\left\|x_0+\frac{1}{n}x_1\right\|\geqslant f\left(x_0+\frac{1}{n}x_1\right)=1+\frac{1}{n}a>1,$$

$$\left\|x_0-\frac{1}{n}x_1\right\|\geqslant g\left(x_0-\frac{1}{n}x_1\right)=1-\frac{1}{n}g(x_1)=1+\frac{1}{n}a>1,$$

$$\begin{aligned}\|x_n-x_0\|&\leqslant\left\|\frac{x_0+\frac{1}{n}x_1}{\left\|x_0+\frac{1}{n}x_1\right\|}-\left(x_0+\frac{1}{n}x_1\right)\right\|+\left\|x_0+\frac{1}{n}x_1-x_0\right\|\\&\leqslant\left|1-\left\|x_0+\frac{1}{n}x_1\right\|\right|+\frac{1}{n}\\&\leqslant\frac{2}{n}.\end{aligned}$$

同理，$\|y_n-x_0\|\leqslant\frac{2}{n}$，故 $\|y_n-x_n\|\leqslant\frac{4}{n}$.

当 $n>\frac{8}{a}$ 时，有

$$\frac{1}{2}\|x_n+y_n\|=\frac{1}{2}\left\|\left(\frac{1}{\left\|x_0+\frac{1}{n}x_1\right\|}+\frac{1}{\left\|x_0-\frac{1}{n}x_1\right\|}\right)x_0\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left\|x_0+\frac{1}{n}x_1\right\|}-\frac{1}{\left\|x_0-\frac{1}{n}x_1\right\|}\right)x_1\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}a}\right)+\frac{1}{n}\left|\left\|x_0-\frac{1}{n}x_1\right\|\right.$$

$$\left.-\left\|x_0+\frac{1}{n}x_1\right\|\right|\left(\because\left\|x_0\pm\frac{1}{n}x_1\right\|>1\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}a}\right)+\frac{1}{n^2}(<1).$$

故

$$\frac{1-\frac{1}{2}\|x_n+y_n\|}{\|x_n-y_n\|}\geqslant\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}a\right)}-\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n}}$$

$$=\frac{a}{8\left(1+\frac{1}{n}a\right)}-\frac{1}{4n}>\frac{a}{16}-\frac{a}{32}$$

$$=\frac{a}{32}>0,$$

故(5.17)不成立．矛盾！(因 $x_n,\ y_n\in\mathrm{span}(x_0,\ x_1)$)．□

定理 5.2.49 若 X 是实 Banach 空间，则 $x_0\in S(X)$ 是范数的 Fréchet 可微点的充分条件是

$$\lim_{r\to0^+}\sup_{\substack{u,v\in S(X)\cap U(x_0,r)\\ u\neq v}}\frac{1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|}{\|u-v\|}=0$$

成立．

证明：由定理 5.2.14 知，范数在 x_0 点是 Fréchet 可微的等价于 x_0 是强光滑点，故只须证明如下条件成立：

若 $\{f_n\}\subset S(X^*)$，$f_n(x_0)\to1$，则必存在 $f\in S(X^*)$，使

$\|f_n-f\|\to 0$.

由定理 5.2.48 知道, x_0 点存在唯一的支撑泛函 f. 若上述条件不成立,则存在 ε, $0<\varepsilon<1$, 及 $\{f_n\}\subset S(X^*)$, 使 $f_n(x_0)>1-\frac{1}{n^2}$, 但 $\|f_n-f\|\geqslant\varepsilon>0$.

令 $F_n=\frac{1}{2}(f+f_n)$, 则 $F_n\neq f$, 故存在 $x_n\in X$, $\|x_n\|=1$, 使 $F_n(x_n)=0$, 且当 $n>\frac{64}{\varepsilon}$ 时,有

$$1\geqslant a_n=f(x_n)>\frac{\varepsilon}{8}>0.$$

事实上,否则由引理 3.1.6 知,或者 $\left\|\frac{F_n}{\|F_n\|}-f\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$,或者

$$\left\|\frac{F_n}{\|F_n\|}+f\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4},$$

这是不可能的,因为

$$\left\|\frac{F_n}{\|F_n\|}-f\right\|\geqslant\frac{1}{2}\|f_n-f\|-(1-\|F_n\|)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2n^2}>\frac{31}{64}\varepsilon,$$

$$\left\|\frac{F_n}{\|F_n\|}+f\right\|\geqslant(F_n+f)x_0-(1-\|F_n\|)\geqslant 2-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^2}>1,$$

矛盾! 故当 $n>\frac{64}{\varepsilon}$ 时,令

$$y_n=\frac{x_0+\frac{1}{n}x_n}{\left\|x_0+\frac{1}{n}x_n\right\|},\ z_n=\frac{x_0-\frac{1}{n}x_n}{\left\|x_0-\frac{1}{n}x_n\right\|},$$

我们有 $\|y_n\|=\|z_n\|=1$, 且

$$\left\|x_0+\frac{1}{n}x_n\right\|\geqslant f\left(x_0+\frac{1}{n}x_n\right)=1+\frac{1}{n}a_n>1,$$

$$\begin{aligned}\left\|x_0-\frac{1}{n}x_n\right\|&\geqslant f_n\left(x_0-\frac{1}{n}x_n\right)>1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}f(x_n)\\&>1+\frac{7}{8n}a_n>1,\end{aligned}$$

$$\|y_n-x_0\|\leqslant\frac{2}{n},\quad \|z_n-x_0\|\leqslant\frac{2}{n},\quad \|y_n-z_n\|\leqslant\frac{4}{n},$$

$$\frac{1}{2}\|y_n+z_n\|=\frac{1}{2}\left\|\left(\frac{1}{\left\|x_0+\frac{1}{n}x_n\right\|}+\frac{1}{\left\|x_0-\frac{1}{n}x_n\right\|}\right)x_0\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left\|x_0+\frac{1}{n}x_n\right\|}-\frac{1}{\left\|x_0-\frac{1}{n}x_n\right\|}\right)x_n\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1+\frac{7}{8n}a_n}\right)+\frac{1}{n^2}(<1).$$

故

$$\frac{1-\frac{1}{2}\|y_n+z_n\|}{\|y_n-z_n\|}\geqslant\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\left(1+\frac{7}{8n}a_n\right)}-\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n}}$$

$$=\frac{7a_n}{64\left(1+\frac{7}{8n}a_n\right)}-\frac{1}{4n}$$

$$>\frac{7}{128}\cdot\frac{\varepsilon}{8}-\frac{\varepsilon}{64\cdot 4}$$

$$=\frac{3}{1024}\varepsilon>0.$$

这与定理的条件矛盾! □

§3 赋等价范数改进凸性、光滑性及范数可微性

大家知道，一切有限维 Banach 空间都是线性同胚的(实际上，都线性同胚于欧氏空间). 如果某个性质 P，它在线性同胚下是不变的，那么我们可以通过对 Banach 空间 X 赋以等价范数，使 X 在新范数下具有较好的性质，并且如果原来空间 X 具性质 P，在新范数下 X 仍然具有 P. 这就为某些问题的解决创造良好条件. 这方面最早的结果是 1936 年 J. Clarkson 证明任

何可分的 Banach 空间可以赋等价范数成为严格凸空间. (注;由于任何可分 Banach 空间都可等距嵌入到 $C[0, 1]$ 中, 所以, 若解决 $C[0, 1]$ 可再赋等价范数使之成为严格凸空间就可以了. 但在下面证明中, 将抛开这种具体在 $C[0, 1]$ 上赋等价范方法, 而对一般可分 Banach 空间用简单方法证明之). 容易证明在严格凸空间中, 每个 w 紧凸集有唯一的范数最小元, 这样, 可分 Banach 空间在赋以新的等价的严格凸范数后, 对这个新范数来讲, 每个 w 紧凸集也就有唯一的范数最小元. 在许多情况下, 这是很有用的.

为了方便起见, 若 X 可以再赋范成为严格凸空间, 就记作 $\approx$sc, 等等.

本节将叙述一般再赋范方法, 及允许再赋范具有某种凸性的一些充要条件, 也叙述某些具体空间, 例如, $c_0(\Gamma)$ 的再赋范结果, 以及某些特殊空间(例如可分空间、自反空间)的再赋范结果. (由于篇幅有限, 将省略某些证明仅列表说明, 请读者查阅所列的有关文献).

定理 5.3.1 若 X 是 Banach 空间, 则 $X\approx$sc 当且仅当存在严格凸 Banach 空间 Y 及 $T: X\to Y$ 的 1—1 线性连续算子.

证明: "$\Rightarrow$"令 T 为恒等算子 I 就可以了.

"$\Leftarrow$"令 $|||x||| = (\|x\|^p+\|Tx\|^p)^{1/p}(1\leqslant p<+\infty)$, 则

$$\|x\|\leqslant |||x|||\leqslant (1+\|T\|^p)^{1/p}\|x\|.$$

若存在 x, y 使 $1=|||x|||=|||y|||=\left|\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|\right|$, 则

$$\begin{aligned}2 &= |||x+y||| = (\|x+y\|^p+\|Tx+Ty\|^p)^{1/p}\\ &\leqslant [(\|x\|+\|y\|)^p+\|Tx+Ty\|^p]^{1/p}\\ &\leqslant [(\|x\|+\|y\|)^p+(\|Tx\|+\|Ty\|)^p]^{1/p}\\ &\leqslant (\|x\|^p+\|Tx\|^p)^{1/p}+(\|Tx\|^p+\|Ty\|^p)^{1/p}\\ &=2.\end{aligned}$$

故 $\|Tx+Ty\|=\|Tx\|+\|Ty\|$, $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$.

显然，由于 T 是1—1的，故 $\|Tx\|\neq 0$，$\|Ty\|\neq 0$. 因此

$$\left\|\frac{Tx}{\|Tx\|}\right\|=\left\|\frac{Ty}{\|Ty\|}\right\|=\left\|\frac{Tx+Ty}{\|Tx+Ty\|}\right\|=1,$$

且 $$\frac{Tx+Ty}{\|Tx+Ty\|}=\frac{\|Tx\|}{\|Tx+Ty\|}\cdot\frac{Tx}{\|Tx\|}+\frac{\|Ty\|}{\|Tx+Ty\|}\cdot\frac{Ty}{\|Ty\|}.$$

从而 $\frac{1}{2}\left\|\frac{Tx}{\|Tx\|}+\frac{Ty}{\|Ty\|}\right\|=1$. (事实上，若 $\frac{1}{2}\left\|\frac{Tx}{\|Tx\|}+\frac{Ty}{\|Ty\|}\right\|<1$，不妨设 $\frac{\|Tx\|}{\|Tx+Ty\|}<\frac{1}{2}$，则

$$\begin{aligned}1&=\left\|\frac{Tx+Ty}{\|Tx+Ty\|}\right\|\\&=\left\|\frac{2\|Tx\|}{\|Tx+Ty\|}\left(\frac{1}{2}\frac{Tx}{\|Tx\|}+\frac{1}{2}\frac{Ty}{\|Ty\|}\right)\right.\\&\quad\left.+\frac{\|Ty\|-\|Tx\|}{\|Tx+Ty\|}\cdot\frac{Ty}{\|Ty\|}\right\|\\&\leqslant\frac{2\|Tx\|}{\|Tx+Ty\|}\left\|\frac{1}{2}\frac{Tx}{\|Tx\|}+\frac{1}{2}\frac{Ty}{\|Ty\|}\right\|\\&\quad+\frac{\|Ty\|-\|Tx\|}{\|Tx+Ty\|}\cdot\left\|\frac{Ty}{\|Ty\|}\right\|\\&<\frac{2\|Tx\|}{\|Tx+Ty\|}+\frac{\|Ty\|-\|Tx\|}{\|Tx+Ty\|}=1,\text{矛盾!})\end{aligned}$$

由于 Y 是严格凸的，故 $\frac{Tx}{\|Tx\|}=\frac{Ty}{\|Ty\|}$，又因为 T 是1—1的，故 $x=\frac{\|Tx\|}{\|Ty\|}y$，从而

$$1=\|x\|=\frac{\|Tx\|}{\|Ty\|}\cdot\|y\|=\frac{\|Tx\|}{\|Ty\|},$$

所以，$\|Tx\|=\|Ty\|$，因此，$x=y$. 所以$(X,\ \|\cdot\|)$是严格凸的. □

推论 5.3.2 若 X 是可分 Banach 空间，则 $X\approx$ sc.

证明：由于 X 是可分的，则在 $U(X^*)$ 中存在 w* 稠序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

定义 $T: X\to l_2$，$Tx=(2^{-\frac{n}{2}}\varphi_n(x))$. 显然，$T$ 是线性的，且 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$，故 T 是连续线性算子.

又若 $Tx=Ty$, 则由 $\{\varphi_n\}$ 是 w^* 稠的知, $x=y$. 从而 T 是 1—1 的. 由于 l_2 是一致凸的, 更是严格凸的. 根据定理 5.3.1 即得所要结论. □

推论 5.3.3 $l_\infty \approx$ so.

证明: 令 $T: l_\infty \to l_2$, $Tx=(2^{-\frac{n}{2}}a_n)$, 其中 $x=(a_n)$, 即得所要结论. □

注 1: M.M. Day 证明 $l_\infty(\omega_0) \cong l_\infty$ 不线性同胚于光滑空间, J. Lindenstrauss 利用 M. M. Day 的方法证明 l_∞ 不线性同胚于 w 局部一致凸空间(见参考书[1]120—123).

注 2: 定理 5.3.1 证明中, 用一个有界线性算子 $T: X \to Y$, 得到 Y 上新范数 $|||x|||=(\|x\|^p+\|Tx\|^p)^{1/p}$, $1 \leqslant p < +\infty$, 将 Y 的某种凸性传递给 $(X, |||\cdot|||)$, 这就是常用的称为 Clarkson-Day-Klee 方法.

注 3: V.Zizler 证明, 当且仅当 $1<p<+\infty$ 时可用上述方法将 Y 的 UCED 性传递给 X (见 M. M. Day & R. C. James & S. Swaminathan, *Canad. J. Math* vol 23 *no.* 6 (1971) 1051—1059).

注 4: M. A. Smith 指出, 由上述方法决定的新范数 $|||\cdot|||$ 也具有 $\|\cdot\|$ 原来所具有的凸性. 这样, 应用上述方法, 适当地选取 Y, 使它具有某种凸性 P, 所得到的新范数 $|||\cdot|||$ 既保持原来空间 $(X, \|\cdot\|)$ 的凸性又增加了新的凸性 P (见 M. A. Smith, *Ann. Math*. 23 (1978) 155—161).

注 5: 由上述方法不能从 Y 的光滑性得到 X 在新范数下的光滑性, 例, Day 证明 l_∞ 不线性同胚于光滑空间. 但显然推论 5.3.3 中的 T: $l_\infty \to l_2$ 是 1—1 线性算子. 而 l_2 是一致光滑的.

定理 5.3.4 若 X 是 Banach 空间, 令 $|||\cdot|||^*$ 是 X^* 中等价范数, 则下列等价:

(1) $|||\cdot|||^*$ 是共轭范数.

(2) $\{x^*; \|x^*\|\leqslant 1\}$ 是 $\sigma(X^*, X)$ 闭的.

(3) $\|\cdot\|^*$ 是 $X^*\to[0, +\infty)$ w* 下半连续的.

证明 (1)⇔(2) 见引理 4.2.2.

(1)⇒(3) 由于 $\|\cdot\|^*$ 是共轭范数, 则存在 $(X, \|\cdot\|)$ 上等价范数 $\|\cdot\|$, 使

$$\|x^*\|^* = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |x^*(x)|,$$

且 $(X, \|\cdot\|)^* \approx (X, \|\cdot\|)^*$. 因此, 若 $x_\delta^* \xrightarrow{\sigma((X, \|\cdot\|)^*, X)} x^*$, 则 $x_\delta^* \xrightarrow{\sigma((X, \|\cdot\|)^*, X)} x^*$, 从而 $\underline{\lim}\|x_\delta^*\|^* \geqslant \|x^*\|^*$. □

(3)⇒(2) 若 $x_\delta^* \xrightarrow{w^*} x^*$, 且 $\|x_\delta^*\|^* \leqslant 1$, 则由条件(3)

$$\|x^*\|^* \leqslant \underline{\lim}\|x_\delta^*\|^* \leqslant 1,$$

故 $\{x^*; \|x^*\|^*\leqslant 1\}$ 是 $\sigma(X^*, X)$ 闭的. □

注: 由这个定理知, 若 X^* 具有一个等价范数 $\|\cdot\|^*$, 使 $(X^*, \|\cdot\|^*)$ 具有某种凸性, 例如局部一致凸, 又假如知道 $\|\cdot\|^*$ 是一个共轭范数, 则根据定理 5.2.18 知, X 可再赋范具有某种光滑性(这时相应的 $\|\cdot\|$ 是 F 可微的). 且 $(X^*, \|\cdot\|^*)$ 具有所说的凸性. 下面, 我们看到, 通常就是以这种方式得到 X 可以再赋范具有某种光滑性的.

定理 5.3.5 若 X 是可分的 Banach 空间, 则 $X\approx$sm(光滑空间).

证明: 因为 X 是可分的. 故存在 $S(X)$ 中稠集 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

令 T: $X^*\to l_2$, $Tx^* = (2^{-\frac{n}{2}}x^*(x_n))$.

容易看到, T 是 X^* 到 l_2 的 1—1 连续线性算子, 由定理 5.3.1 的证明知, $\|x^*\|^* = \|x^*\| + \|Tx^*\|$ 是 $(X^*, \|\cdot\|)$ 的一个等价严格凸范数.

下面证明 $\|x^*\|^*$ 是一个共轭范数, 从而知 $X\approx$sm.

事实上, 若 $\{x_\delta^*\}\subset U(X^*, \|\cdot\|^*)$, $x_\delta^* \xrightarrow{w^*} x^*$, 则 $\{Tx_\delta^*\}$ 是范数有界的, 且 $\{Tx_\delta^*\}$ 按坐标收敛. 由于 l_2 中坐标收敛等价于 w

收敛，故 $Tx_\delta^* \xrightarrow{w} Tx^*$. 因此，$\|Tx^*\| \leqslant \underline{\lim}\|Tx_\delta^*\|$，所以，

$$1 \geqslant \underline{\lim}\ \|x_\delta^*\|^* = \underline{\lim}(\|x_\delta^*\| + \|Tx_\delta^*\|)$$

$$\geqslant \underline{\lim}\|x_\delta^*\| + \underline{\lim}\|Tx_\delta^*\|$$

$$\geqslant \|x^*\| + \|Tx^*\| = \|x^*\|^*,$$

这表明 $U(X^*, \|\cdot\|^*)$ 是 w^* 闭的. 由定理 5.3.4 知，$\|\cdot\|^*$ 是共轭范数. □

大家知道，一般地说，若 $(X, \|\cdot\|_1)$ 是严格凸的，又 $(X, \|\cdot\|_2)$ 是光滑的，并不知道存在一个新的等价范数 $|||\cdot|||$，使 $(X, |||\cdot|||)$ 既是严格凸的又是光滑的. 下面介绍一种方法，在一定条件下，可找到这种新的等价范数.

定理 5.3.6 若 $(X, \|\cdot\|)$ 是光滑空间，Y 是光滑且严格凸的空间. 又若存在 $T: X \to Y$ 是 1—1 线性有界算子，则存在 X 上新的等价范数 $|||\cdot|||$，使 $(X, |||\cdot|||)$ 既是光滑的又是严格凸的(我们有时也记作 $\approx$ scm).

证明：令 $|||x||| = \|x\| + \|Tx\|$，则

$$\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant (1 + \|T\|)\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

由定理 5.3.1 知，$(X, |||\cdot|||)$ 是严格凸的. 又

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{|||x+\lambda y||| - |||x|||}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$$

$$+ \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|Tx+\lambda Ty\| - \|Tx\|}{\lambda},$$

由于 $(X, \|\cdot\|)$ 及 $(Y, \|\cdot\|)$ 是光滑的，故上述极限存在，因此 $(X, |||\cdot|||)$ 也是光滑的. □

推论 5.3.7 若 X 是可分的，则 $X \approx$ scm.

证明：由定理 5.3.5 知，当 X 是可分时，存在等价范数 $|||\cdot|||$，使 $(X, |||\cdot|||)$ 是光滑的. 由推论 5.3.2 知，存在 $T: X \to l_2$ 的 1—1 线性有界算子，另一方面，我们知道 l_2 是既光滑又严格凸的(实际上 l_2 是一致凸且一致光滑的)，故存在 X 上等价范数 $\|\cdot\|_1$，使 $(X, \|\cdot\|_1)$ 是光滑且严格凸的. □

下面我们讨论一个重要的再赋范结果，即 $c_0(\Gamma)\approx\text{LUC}$.

设 Γ 是一个非空集.

$$c_0(\Gamma)=\{x=(x(r));\ x:\Gamma\to\boldsymbol{R}^1,\ \text{对任何}\ \varepsilon>0,$$
$$\{r;\ |x(r)|\geqslant\varepsilon\}\ \text{是有限集}\},$$
$$\|x\|=\sup_{r\in\Gamma}|x(r)|,\ \forall x\in c_0(\Gamma).$$

容易看到，$c_0(\Gamma)$是一个 Banach 空间.

对任何 $x\in c_0(\Gamma)$，令 $E(x)=\{r;\ r\in\Gamma,\ x(r)\neq 0\}$，$E(x)$称为 x 的支撑集. 显然，$E(x)$是可数集. 故不妨设

$$E(x)=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \alpha_{k+1},\ \cdots\}.$$

并且，不妨设 $|x(\alpha_k)|\geqslant|x(\alpha_{k+1})|$.

定义映像

$$D:\ c_0(\Gamma)\to l_2(\Gamma)=\{x;\ x:\Gamma\to\boldsymbol{R}^1,\ (\sum_{r\in\Gamma}|x(r)|^2)^{1/2}<+\infty\},$$

$$D(x)(r)=\begin{cases}\dfrac{x(\alpha_k)}{2^k} & \text{当}\ r=\alpha_k\in E(x)\\ 0 & \text{当}\ r\notin E(x).\end{cases}$$

令 $p(x)=\|Dx\|_{l_2}$，称 $p(x)$为 $c_0(\Gamma)$的 Day 范数.

首先证明，$p(x)$是 $c_0(\Gamma)$上的一个等价范数.

引理 5.3.8 若 $s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant 0$，且 $t_1\geqslant t_2\geqslant\cdots\geqslant 0$，且 β 是正整数的任何置换. 则当下列级数收敛时，有如下关系式.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}s_kt_k-\sum_{k=1}^{\infty}s_kt_{\beta(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}(s_k-s_{k-1})\Big(\sum_{i=1}^{k}t_i-\sum_{i=1}^{k}t_{\beta(i)}\Big).$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}s_kt_k\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}s_kt_{\beta(k)}.$ (5.18)

(3) 任何 m，若 $\{\beta(i)\}_{i=1}^{m}\neq\{1,\ \cdots,\ m\}$（作为集合不相等），则

$$\sum_{k=1}^{\infty}s_kt_k-\sum_{k=1}^{\infty}s_kt_{\beta(k)}\geqslant(s_m-s_{m+1})(t_m-t_{m+1}).\qquad(5.19)$$

证明：(1)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(s_k-s_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k}t_i-\sum_{i=1}^{k}t_{\beta(i)}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(s_k\sum_{i=1}^{k}t_i\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(s_{k+1}\sum_{i=1}^{k}t_i\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(s_k\sum_{i=1}^{k}t_{\beta(i)}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(s_{k+1}\sum_{i=1}^{k}t_{\beta(i)}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(s_k\sum_{i=1}^{k}t_i\right)-\sum_{k=2}^{\infty}\left(s_k\sum_{i=1}^{k-1}t_i\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(s_k\sum_{i=1}^{k}t_{\beta(i)}\right)+\sum_{k=2}^{\infty}\left(s_k\sum_{i=1}^{k-1}t_{\beta(i)}\right)$$

$$=s_1t_1+\sum_{k=2}^{\infty}s_k\left(\sum_{i=1}^{k}t_i-\sum_{i=1}^{k-1}t_i\right)$$

$$-s_1t_{\beta(1)}-\sum_{k=2}^{\infty}s_k\left(\sum_{i=1}^{k}t_{\beta(i)}-\sum_{i=1}^{k-1}t_{\beta(i)}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}s_kt_k-\sum_{k=1}^{\infty}s_kt_{\beta(k)}.\ \square$$

(2) 因 $s_k-s_{k-1}\geqslant 0,\sum_{i=1}^{k}t_i-\sum_{i=1}^{k}t_{\beta(i)}\geqslant 0$. 由(1)，得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}s_kt_k\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}s_kt_{\beta(k)}.\ \square$$

(3) 若作为集合，$\{\beta(i)\}_{i=1}^{m}\neq\{1,\cdots,m\}$，这说明$\beta$不是$\{1,\cdots,m\}$到自身的置换. 故存在 i_0，$1\leqslant i_0\leqslant m$，使 $\beta(i_0)>m$，从而 $\sum_{i=1}^{m-1}t_i\geqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{m}t_{\beta(i)}$，又 $t_{m+1}\geqslant t_{\beta(i)}$，所以，

$$\sum_{i=1}^{m-1}t_i+t_m+t_{m+1}\geqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{m}t_{\beta(i)}+t_m+t_{\beta(i_0)},$$

即

$$\sum_{i=1}^{m}t_i+t_{m+1}\geqslant\sum_{i=1}^{m}t_{\beta(i)}+t_m,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{m}t_i-\sum_{i=1}^{m}t_{\beta(i)}\geqslant t_m-t_{m+1}.\tag{5.20}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k t_k - \sum_{k=1}^{\infty} s_k t_{\beta(k)} \overset{\text{由(1)}}{=\!=} \sum_{k=1}^{m} (s_k - s_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k} t_i - \sum_{i=1}^{k} t_{\beta(i)}\right)$$

$$+ (s_m - s_{m+1}) \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{\beta(i)})$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} (s_k - s_{k+1}) \left[\sum_{i=1}^{k} t_i - \sum_{i=1}^{k} t_{\beta(i)}\right]$$

$$\overset{\text{由(5.20)}}{\geqslant} (s_m - s_{m+1}) \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{\beta(i)})$$

$$\overset{\text{由(5.20)}}{\geqslant} (s_m - s_{m+1})(t_m - t_{m+1}). \quad \square$$

引理 5.3.9 $p(x)$是$c_0(\Gamma)$的一个等价范数.

证明：先证明$p(x)$是一个范数.

显然，$p(x) \geqslant 0$，又$p(x) = 0 \Leftrightarrow D(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

对任何λ，$\|p(\lambda x)\| = \|D(\lambda x)\|_{l_2} = \|\lambda D(x)\|_{l_2} = |\lambda| \cdot \|D(x)\|_{l_2} = |\lambda| p(x)$.

设$x, y \in c_0(\Gamma)$，令$E(x) = \{\alpha_k\}$，$E(y) = \{\beta_k\}$，$E(x+y) = \{r_k\}$.

因$p^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} |x(\alpha_k)|^2$，又由于对$\{\alpha_k\}$的任一置换$\beta$，根据引理5.3.8(1)，有

$$p^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} |x(\alpha_k)|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} |x(\beta(\alpha_k))|^2 .$$

但是对Γ中任一序列$\{\delta_k\}$，若某个$\delta_k \notin E(x)$，则$x(\delta_k) = 0$，故更应有

$$p^2(x) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} |x(\delta_k)|^2. \tag{5.21}$$

这样，

$$p(x+y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} |(x+y)(r_k)|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} |x(r_k)|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} |y(r_k)|^2\right)^{1/2}$$

$$\overset{\text{由(5.21)}}{\leqslant} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} |x(\alpha_k)|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} |y(\beta_k)|^2\right)^{1/2}$$

$$= p(x) + p(y).$$

故 $p(x)$ 是 $c_0(\Gamma)$ 的一个范数。

又

$$\frac{\|x\|_\infty}{2}=\frac{|x(\alpha_1)|}{2}\leqslant p(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x(\alpha_k)}{2^k}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant|x(\alpha_1)|\left(\sum_{k=1}^{\infty}4^{-k}\right)^{1/2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\|x\|_\infty,$$

故 $p(x)$ 是 $c_0(\Gamma)$ 上的一个等价范数. □

定理 5.3.10 $(c_0(\Gamma),\ p(x))$ 是局部一致凸的.

证明：由于 X 是局部一致凸的充要条件是，对任 $x\in X$，当 $\|x+x_n\|\to2\|x\|$，$\|x_n\|\to\|x\|$ 时，有 $\|x-x_n\|\to0$（请读者补证）. 下面将利用这个充要条件来证明.

我们设 $p(x+x_n)\to2p(x)$，且 $p(x_n)\to p(x)$（不妨设 $x\neq0$），下面将证明 $p(x_n-x)\to0$.

令 $E(x)=\{\alpha_k\}$，$E(x_n)=\{\alpha_k^n\}$，$E(x+x_n)=\{\beta_k^n\}$.

令 $Q_n=2p^2(x)+2p^2(x_n)-p^2(x+x_n)$，则

$$Q_n=\sum_{k=1}^{\infty}4^{-k}[2|x(\alpha_k)|^2+2|x_n(\alpha_k^n)|^2-|(x+x_n)(\beta_k^n)|^2] \tag{5.22}$$

$$\overset{\text{由引理 5.3.8(1)}}{\geqslant}\sum_{k=1}^{\infty}4^{-k}[2|x(\beta_k^n)|^2+2|x_n(\beta_k^n)|^2-(x(\beta_k^n)+x_n(\beta_k^n))^2] \tag{5.23}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}4^{-k}[x(\beta_k^n)-x_n(\beta_k^n)]^2\geqslant0.$$

由假设 $p^2(x_n)\to p^2(x)$，$p^2(x+x_n)\to4p^2(x)$，故

$$Q_n=2p^2(x)+2p^2(x_n)-p^2(x+x_n)\to0.$$

从而，对每个 k，

$$\lim_{n\to\infty}(x(\beta_k^n)-x_n(\beta_k^n))=0. \tag{5.24}$$

若 $p(x_n-x)\not\to0$，则存在 $\varepsilon>0$ 和 $\{x_n\}$ 的一个子序列（仍记

作 $\{x_n\}$), 使 $\|x-x_n\|_{c_0(\Gamma)}>\varepsilon$, $\forall n$.

因 $x\neq 0$, 故可选正整数 R, 它是满足 $|x(\alpha_R)|>\frac{\varepsilon}{16}$ 的最大整数(否则将 ε 作适当调整即可). 所以有

$$|x(\alpha_{R+1})|<\frac{\varepsilon}{16}\leqslant|x(\alpha_R)|.$$

令 $\delta=2(4^{-R}-4^{-(R+1)})(|x(\alpha_R)|^2-|x(\alpha_{R+1})|^2)(>0)$.

(5.22)减去(5.23)有,

$$\begin{aligned}Q_n&\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}4^{-k}(2|x(\alpha_k)|^2-2|x(\beta_k^n)|^2\\&\quad+2|x_n(\alpha_k^n)|^2-2|x_n(\beta_k^n)|^2)\\&\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}4^{-k}(2|x(\alpha_k)|^2-2|x(\beta_k^n)|^2)\geqslant 0.\end{aligned}$$

因为 $Q_n\to 0$, 故存在 N', 使得当 $n>N'$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}4^{-k}2(|x(\alpha_k)|^2-|x(\beta_k^n)|^2)<\delta. \qquad (5.25)$$

我们有对一切 $n>N'$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^R=\{\beta_k^n\}_{k=1}^R$ (作为集合相等). (事实上, 若对某个 $n_0>N'$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^R\neq\{\beta_k^n\}_{k=1}^R$(集合不相等), 则

$$\begin{aligned}\delta&>\sum_{k=1}^{\infty}4^{-k}\cdot 2(|x(\alpha_k)|^2-|x(\beta_k^{n_0})|^2)\\&\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}4^{-k}\cdot 2|x(\alpha_k)|^2-\sum_{k=1}^{\infty}4^{-k}\cdot 2|x(\alpha_{\beta(k)})|^2\end{aligned}$$

由引理 5.3.8(3)

$$\geqslant 2(4^{-R}-4^{-(R+1)}(x^2(\alpha_R)-x^2(\alpha_{R+1})))=\delta \text{ 矛盾!}$$

其中 $\beta(k)$ 表示 $\{1, 2, \cdots\}$ 的一个子集, 它由 $\{\beta_k^{n_0}\}_{k=1}^{\infty}$ 属于 $\{\alpha_k\}$ 的元的顺序决定(例 $\beta_1^{n_0}=\alpha_3$, 则 $\beta(1)=3$, 若 $\beta_1^{n_0}\notin\{\alpha_k\}$, 则 $\beta(1)=0$), 由于 $\{\alpha_k\}_{k=1}^R\neq\{\beta_k^n\}_{k=1}^R$, 故 $\{1, 2, \cdots, R\}\neq\{\beta(1), \cdots, \beta(R)\}$.)

由于 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_R\}$ 仅有 $R!$ 种不同排列. 因此, 有无限多个 n, 使 $\{\beta_1^n, \cdots, \beta_R^n\}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_R\}$(作为集合相等), 且 $\beta_k^n=\alpha_k$, $k=1, \cdots, R$. 用 $(N+1, N+2, \cdots)$ 表示大于 N' 的子

列，对它有 $\beta_k^n=\alpha_k$, $k=1, \cdots, R(n=N+1, N+2, \cdots)$.

由(5.24)式有，$\lim\limits_n x_n(\alpha_k)=x(\alpha_k)$, $k=1, \cdots, R$ (其中 $n\in\{N+1, N+2, \cdots\}$). 从而存在 $N_1(>N')$, 使得当 $n>N_1$, $k=1, 2, \cdots, R(n\in\{N+1, N+2, \cdots\})$, 有

$$|x^2(\alpha_k)-x_n^2(\alpha_k)|<\varepsilon^2 4^{-R-4}, \ |x_n(\alpha_k)-x(\alpha_k)|<\varepsilon.$$

总之，对任何 $\varepsilon>0$, 有 $N_1(\geqslant N')$, 当 $n\in\{N+1, N+2, \cdots\}$ 且 $n>N_1$ 时，有

$$\left.\begin{cases}|(x-x_n)(\alpha)|<\varepsilon & 当\ \alpha\in\{\alpha_1, \cdots, \alpha_R\}\ 时\\ x^2(\alpha)-x_n^2(\alpha)<\varepsilon^2 4^{-R-4} & 当\ \alpha\in\{\alpha_1, \cdots, \alpha_R\}\ 时\\ p^2(x_n)-p^2(x)<\varepsilon^2 4^{-R-4}.\end{cases}\right\} \tag{5.26}$$

对每个 n, 选 $r_n\in\Gamma$, 使

$$|(x-x_n)r_n|=\|x-x_n\|_\infty\geqslant\varepsilon.$$

显然，当 $n>N_1$, $n\in\{N+1, N+2, \cdots\}$ 时，$r_n\notin\{\alpha_1, \cdots, \alpha_R\}$. 从而 $|x(r_n)|<\dfrac{\varepsilon}{16}$.

下面将证明，当 $n>N_1$ 时，$|x_n(r_n)|<\varepsilon/4$, 从而

$$|(x-x_n)(r_n)|\leqslant|x(r_n)|+|x_n(r_n)|<\frac{\varepsilon}{16}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon,$$

这与 r_n 的选取矛盾！这表明 $p(x_n-x)\to 0$.

为了方便起见下面讨论中出现的 n 均在 $\{N+1, N+2, \cdots\}$ 中，而不再特别指出了.

用以 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_R, r_n\}$ 为前 $R+1$ 项的一个序列代替 $E(x_n)$, 则由引理 5.3.9 证明中(5.21)式知，

$$\sum_{k=1}^R\frac{x_n^2(\alpha_k)}{4^k}+\frac{x_n^2(r_n)}{4^{R+1}}\leqslant p^2(x_n). \tag{5.27}$$

另一方面，$\sum\limits_{k=R+1}^\infty 4^{-k}\leqslant(3\cdot 4^R)^{-1}$, 故

$$p^2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2(\alpha_k)}{4^k}<\sum_{k=1}^{R}\frac{x^2(\alpha_k)}{4^k}+\sum_{k=R+1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\left(\frac{\varepsilon}{4^2}\right)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{R}\frac{x^2(\alpha_k)}{4^k}+\left(\frac{\varepsilon}{4^2}\right)^2(3\cdot 4^R)^{-1}. \tag{5.28}$$

故当 $n>N_1$ 时

$$\frac{x_n^2(r_n)}{4^{R+1}}\overset{\text{由}(5.27)}{<}p^2(x_n)-p^2(x)+p^2(x)-\sum_{k=1}^{R}\frac{x_n^2(\alpha_k)}{4^k}$$
$$\overset{\text{由}(5.28)}{<}p^2(x_n)-p^2(x)+\sum_{k=1}^{R}\frac{x^2(\alpha_k)-x_n^2(\alpha_k)}{4^k}$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{3\cdot 4^{R+4}}$$
$$\overset{\text{由}(5.26)}{<}\frac{\varepsilon^2}{4^{R+4}}+\frac{\varepsilon^2}{4^{R+4}}\sum_{k=1}^{R}\frac{1}{4^k}+\frac{\varepsilon^2}{3\cdot 4^{R+4}}$$
$$<\frac{\varepsilon^2}{4^{R+3}}.$$

从而，当 $n>N_1$ 时，$x_n^2(r_n)<\varepsilon^2\cdot 4^{-2}$，因此，

$$|x_n(r_n)|<\frac{\varepsilon}{4}.\quad\square$$

推论 5.3.11 若 X 是 Banach 空间，且存在 $T: X\to c_0(\Gamma)$ 1—1 连续线性算子，则 $X\approx$sc.

注：已经能够证明 $c_0(\Gamma)$ 可以再赋范，使它在新范数下是 LUC 的且是 F 可微的，此外，在新范数下相应的共轭空间是 LUC.（见参考书[2] p. 161，证明主要利用，$c_0(\Gamma)^*\cong l_1(\Gamma)$，因为 Asplund 证明 $l_1(\Gamma)\approx$LUC，再利用下面讲到的 Asplund 平均值技巧，即得所要的新范数）.

推论 5.3.12 若 X 是自反的 Banach 空间，则 $X\approx$wLUC

证明：首先指出 Lindenstrauss(*Bull. A. M. S.* 72 (1966) 967—970) 证明：若 X 是自反的 Banach 空间，则存在 $T: X\to c_0(\Gamma)$ 1—1 连续线性算子，对某个指标集 Γ.

令 $p(\cdot)$ 是 $c_0(\Gamma)$ 的 Day 范数.

定义 $|||x|||=(\|x\|^2+p^2(Tx))^{1/2}$，$\forall x\in X$. 则

$$\|x\| \leqslant |\!|\!|x|\!|\!| \leqslant \left(1+\frac{\|T\|^2}{3}\right)^{1/2}\|x\|.$$

故 $|\!|\!|x|\!|\!|$ 是 X 上一个等价范数.

设 $|\!|\!|x_n|\!|\!|=1=|\!|\!|x|\!|\!|$, 且 $|\!|\!|x+x_n|\!|\!|\to 2$. 只须证明

$$x_n \xrightarrow{\mathrm{w}} x$$

即可. (注意, 这是 wLUC 的一个等价定义, 读者容易自行验证).

容易看到 $p(Tx_n)\to p(Tx)$, 且 $p(Tx+Tx_n)\to 2p(Tx)$. (事实上, 令 $a_n=(\|x_n\|+\|x\|)^2-\|x_n+x\|^2$,

$$b_n=(p(Tx_n)+p(Tx))^2-(p(Tx_n+Tx))^2$$
$$c_n=(\|x_n\|-\|x\|)^2$$
$$d_n=(p(Tx_n)-p(Tx))^2,$$

显然, $a_n, b_n, c_n, d_n\geqslant 0$, 且

$$a_n+b_n+c_n+d_n=2(\|x_n\|^2+\|x\|^2+p^2(Tx_n)+p^2(Tx)) - (\|x_n+x\|)^2-(p(Tx_n+Tx))^2\to 0,$$

故 $b_n\to 0$, $d_n\to 0$.)

由于 $p(\cdot)$ 是 LUC 的范数, 故

$$p(Tx_n-Tx)\to 0.$$

下面将证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有唯一 w 闭包点, 根据空间是自反的, 就知 $x_n\xrightarrow{\mathrm{w}}x$. 从而 $X\approx$wLUC.

事实上, 任取子列 $\{x_{n_k}\}$, 由于 X 是自反的, 故存在 $\{x_{n_k}\}$ 的子列(仍记作 $\{x_{n_k}\}$), 使 $x_{n_k}\xrightarrow{\mathrm{w}}y$, 对某个 $y\in X$, 从而 $Tx_{n_k}\xrightarrow{\mathrm{w}}Ty$, 另一方面, 由于

$$p(Tx_{n_k}-Tx)\to 0,$$

故知 $Tx_{n_k}\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}Tx$, 从而 $Tx_{n_k}\xrightarrow{\mathrm{w}}Tx$. 因此 $Tx=Ty$, 由于 T 是 1—1 的, 故 $x=y$. 这表明 $x_n\xrightarrow{\mathrm{w}}x$. □

注: 已经能够证明, 若 X 是自反空间, 则 X 可以再赋等价范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$, 使$(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$是 LUC, 且 F 可微, 此外, $(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|^*)$是

LUC 且 F 可微的(见参考书[1]p. 186).

下面再介绍一种再赋范的有效方法——Asplund 平均技巧. 首先引入凸函数概念及一些简单性质.

定义 5.3.1 线性空间 X 上定义的函数 $f(x)$ 称为凸函数，如果对任 $x, y\in X$, 及 $0\leqslant\alpha\leqslant1$, 有

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y).$$

如果当 $0<\alpha<1$ 时严格不等号成立，则称 $f(x)$ 为严格凸函数.(注：本节只讨论取值于 $(-\infty, +\infty)$ 中的函数).

定义 5.3.2 线性空间 X 上定义的函数 $f(x)$ 称为二次齐次函数，如果 $f(tx)=t^2f(x)$, $\forall x\in X$, $t\in\boldsymbol{R}^1$.

定义 5.3.3 设 X 是 Banach 空间，f, g 是 X 上两个凸函数，若存在 $\alpha, \beta>0$, 使得

$$\alpha f\leqslant g\leqslant\beta f,$$

则称 f、g 是等价的.

性质 5.3.13 若 $f(x)$ 是 X 上的二次齐次凸函数，则对一切 $x\in X$, $f(x)\geqslant0$, 且 $f(0)=0$.

证明：$f(0)=f(t\cdot0)=t^2f(0)$, 故 $(1-t^2)f(0)\equiv0$, 从而 $f(0)=0$.

$$4f(x)=f(2x)=f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}3x\right)\leqslant\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(3x)$$

$$=\frac{1}{2}f(x)+\frac{9}{2}f(x)=5f(x),$$

故 $f(x)\geqslant0$. □

下面介绍由两个等价的二次齐次凸函数通过归纳程序构造两串等价的二次齐次凸函数的方法.

令 f_0、g_0 是两个二次齐次凸函数，且对某个 $c>0$,

$$g_0\leqslant f_0\leqslant(1+c)g_0.$$

令 $f_1=\dfrac{f_0+g_0}{2}$ (算术平均函数).

令 $g_1(x)\equiv f_0\square g_0(x)\equiv\inf\left\{\dfrac{f_0(x+y)+g_0(x-y)}{2};\ y\in X\right\}$

（下确界卷积平均函数）.

性质 5.3.14 由算术平均法及下确界卷积平均法，从两个等价二次齐次凸函数产生的两种平均函数 f_1, g_1 也是等价的二次齐次凸函数，且

$$g_0\leqslant g_1\leqslant f_1\leqslant f_0,\quad g_1\leqslant f_1\leqslant\left(1+\frac{c}{2}\right)g_1.$$

证明：

$$\begin{aligned}f_1(\alpha x+\beta y)&=\frac{f_0(\alpha x+\beta y)+g_0(\alpha x+\beta y)}{2}\\&\leqslant\frac{\alpha f_0(x)+\beta f_0(y)+\alpha g_0(x)+\beta g_0(y)}{2}\\&=\alpha\,\frac{f_0(x_0)+g_0(x)}{2}+\beta\,\frac{f_0(y)+g_0(y)}{2}\\&=\alpha f_1(x)+\beta f_1(y),\end{aligned}$$

其中 α, $\beta\geqslant0$, $\alpha+\beta=1$. 故 f_1 是凸函数. 又

$$\begin{aligned}f_1(t\alpha)&=\frac{f_0(tx)+g_0(tx)}{2}\\&=t^2\,\frac{f_0(x)+g_0(x)}{2}=t^2f_1(x),\end{aligned}$$

故 f_1 为二次齐次凸函数. 且

$$f_1(x)=\frac{f_0(x)+g_0(x)}{2}\leqslant\frac{f_0(x)+f_0(x)}{2}=f_0(x).$$

当 α, $\beta\geqslant0$, $\alpha+\beta=1$ 时，

$$\begin{aligned}g_1(\alpha x+\beta y)&=\inf\left\{\frac{f_0(\alpha x+\beta y+z)+g_0(\alpha x+\beta y-z)}{2};\ z\in X\right\}\\&=\inf\left\{\frac{f_0(\alpha x+\beta y+\alpha z_1+\beta z_2)+g_0(\alpha x+\beta y-\alpha z_1-\beta z_2)}{2};\right.\\&\qquad\left.z_1,\ z_2\in X\right\}\\&\leqslant\alpha\inf\left\{\frac{f_0(x+z)+g_0(x-z)}{2};\ z\in X\right\}\end{aligned}$$

$$+\beta\inf\left\{\frac{f_0(y+z)+g_0(y-z)}{2};\ z\in X\right\}$$

$$=\alpha g_1(x)+\beta g_1(y).$$

故 g_1 是凸函数，且 $t\neq 0$，

$$g_1(tx)=\inf\left\{\frac{f_0(tx+y)+g_0(tx-y)}{2};\ y\in X\right\}$$

$$=\inf\left\{\frac{t^2 f_0\left(x+\frac{1}{t}y\right)+t^2 g_0\left(x-\frac{1}{t}y\right)}{2};\ y\in X\right\}$$

$$=t^2 g_1(x).$$

故 g_1 是二次齐次凸函数．且

$$g_1(x)=\inf\left\{\frac{f_0(x+y)+g_0(x-y)}{2};\ y\in X\right\}$$

$$\leqslant\frac{f_0(x)+g_0(x)}{2}=f_1(x),$$

$$g_1(x)=\inf\left\{\frac{f_0(x+y)+g_0(x-y)}{2};\ y\in X\right\}$$

$$\geqslant\inf\left\{\frac{g_0(x+y)+g_0(x-y)}{2};\ y\in X\right\}$$

$$\geqslant\inf\left\{g_0\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right);\ y\in X\right\}$$

$$=g_0(x).$$

同时，还有

$$f_1(x)=\frac{f_0(x)+g_0(x)}{2}\leqslant\frac{(1+c)g_0(x)+g_0(x)}{2}$$

$$\leqslant\left(1+\frac{c}{2}\right)g_0(x)\leqslant\left(1+\frac{c}{2}\right)g_1(x).\quad\square$$

由性质 5.3.14 知，对每个 n，令

$$f_{n+1}=\frac{f_n+g_n}{2},\quad g_{n+1}=f_n\square g_n,$$

则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为两列二次齐次凸函数．且满足

$$g_n\leqslant g_{n+1}\leqslant f_{n+1}\leqslant f_n,$$

和

$$g_n\leqslant f_n\leqslant(1+2^{-n}c)g_n.$$

由于 $0\leqslant f_n-g_n\leqslant 2^{-n}cg_n\leqslant 2^{-n}cf_0$，故对每个 $x\in X$，

$$\lim_n f_n(x)=\lim_n g_n(x).$$

记这个极限为 $h(x)$。

性质 5.3.15 如上定义的 $h(x)$ 是二次齐次凸函数，且

$$\frac{1}{1+2^{-n}c}h\leqslant g_n\leqslant h\leqslant f_n\leqslant(1+2^{-n}c)h.$$

证明：显然，$h(x)$ 是二次齐次凸函数，由于

$$g_n\leqslant g_{n+1}\leqslant f_{n+1}\leqslant f_n,$$

故
$$g_n\leqslant h\leqslant f_n,$$

又 $f_n\leqslant(1+2^{-n}c)g_n$，故

$$\frac{f_n}{1+2^{-n}}\leqslant g_n\leqslant h,$$

即
$$f_n\leqslant h(1+2^{-n}c),$$

且 $h\leqslant f_n\leqslant(1+2^{-n}c)g_n$，故

$$\frac{h}{1+2^{-n}c}\leqslant g_n.\quad\square$$

下面引理将表明上述等价式中系数可进一步缩小。

引理 5.3.16 对一切 $n\geqslant 0$，$g_n\leqslant f_n\leqslant(1+4^{-n}c)g_n$，从而

$$\frac{1}{1+4^{-n}c}h\leqslant g_n\leqslant h\leqslant f_n\leqslant(1+4^{-n}c)h.$$

证明：用归纳法证明．当 $n=0$ 时，显然成立。

假设 $n=k$ 成立．即 $g_k\leqslant f_k\leqslant(1+4^{-k}c)g_k$。

令 $a=1+\dfrac{4^{-k}c}{2}$，则

$$f_{k+1}=\frac{f_k+g_k}{2}\leqslant\frac{1}{2}(1+4^{-k}c+1)g_k=ag_k.$$

故对任 $x,\ y\in X$，

$$\frac{2}{1+a}f_{k+1}(x)=\frac{1+a}{2a^2}f_{k+1}\left(\frac{2a}{1+a}x\right)$$
$$=\frac{1+a}{2a^2}f_{k+1}\left(\frac{ax+ay+ax-ay}{1+a}\right)$$

$$=\frac{1+a}{2a^2}f_{k+1}\left(\frac{ax+ay}{1+a}+\frac{a(x-y)}{1+a}\right)$$

$$\leqslant\frac{1+a}{2a^2}\left(\frac{1}{1+a}f_{k+1}(ax+ay)\right.$$

$$\left.+\frac{a}{1+a}f_{k+1}(x-y)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}f_{k+1}(ax+ay)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a}f_{k+1}(x-y)\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}f_k(x+y)+\frac{1}{2}g_k(x-y).$$

故 $\frac{2}{1+a}f_{k+1}(x)\leqslant g_{k+1}(x)$，即

$$f_{k+1}(x)\leqslant\frac{1+a}{2}g_{k+1}(x)=(1+4^{-(k+1)}c)g_{k+1}(x).\ \square$$

下面我们看到，还可由 f_0 或 g_0 的严格凸性得出 h 的严格凸性.

定理 5.3.17 若 f_0、g_0 之一是严格凸函数，则 h 也是严格凸函数.

证明：不妨设 f_0 为严格凸的.（否则由 $g_0\leqslant f_0\leqslant(1+c)g_0\leqslant(1+c)f_0$，令 $g'=(1+c)g_0$，则 g' 仍为严格凸的，且

$$f_0\leqslant g'\leqslant(1+c)f_0.$$

对 g' 作同样讨论即可.）

首先，将 f_n 展开，即将 f_n 表成 f_0 与某个凸函数 h_n 的组合.

$f_1=\frac{f_0}{2}+\frac{g_0}{2}$，令 $h_0=\frac{1}{2}g_0$，

$f_2=\frac{f_1+g_1}{2}=\frac{f_0}{2^2}+\left(\frac{g_0}{4}+\frac{g_1}{2}\right)$，令 $h_1=\frac{1}{4}g_0+\frac{1}{2}g_1$，

……

$f_n=2^{-n}f_0+(2^{-n}g_0+2^{-n+1}g_1+\cdots+2^{-1}g_{n-1})$，

令 $h_n=2^{-n}g_0+2^{-n+1}g_1+\cdots+2^{-1}g_{n-1}$，

……

由于 g_0, …, g_{n-1} 是凸函数，故 h_n 也是凸函数，由引理 5.3.16 知，

$$0 \leqslant f_n - h \leqslant f_n - g_n \leqslant 4^{-n} c \cdot g_n \leqslant 4^{-n} c \cdot f_0,$$

从而

$$\begin{aligned}(2^{-n} - c\cdot 4^{-n}) f_0 + h_n &= 2^{-n} f_0 + h_n - c\cdot 4^{-n} f_0 \\ &= f_n - c4^{-n} f_0 \leqslant h \leqslant f_n = 2^{-n} f_0 + h_n,\end{aligned}$$

即
$$(2^{-n} - c4^{-n}) f_0 + h_n \leqslant h \leqslant 2^{-n} f_0 + h_n.$$

若 x, $y \in X$, $x \neq y$, 则

$$\begin{aligned}
h(x) - 2h\left(\frac{x+y}{2}\right) + h(y) &\geqslant (2^{-n} - c4^{-n}) f_0(x) + h_n(x) \\
&\quad - 2^{-n}\cdot 2 f_0\left(\frac{x+y}{2}\right) - 2h_n\left(\frac{x+y}{2}\right) \\
&\quad + (2^{-n} - 4^{-n}\cdot c) f_0(y) + h_n(y) \\
&= 2^{-n}\left[f_0(x) - c\cdot 2^{-n} f_0(x) - 2 f_0\left(\frac{x+y}{2}\right) + f_0(y)\right. \\
&\quad \left. - c\cdot 2^{-n} f_0(y)\right] + h_n(x) - 2h_n\left(\frac{x+y}{2}\right) + h_n(y) \\
&\geqslant 2^{-n}\left[f_0(x) - c\cdot 2^{-n} f_0(x) - 2 f_0\left(\frac{x+y}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. + f_0(y) - c\cdot 2^{-n} f_0(y)\right] \\
&= 2^{-n}\left[f_0(x) + f_0(y) - 2 f_0\left(\frac{x+y}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. - c\cdot 2^{-n}(f_0(x) + f_0(y))\right].
\end{aligned}$$

选择充分大 n, 使

$$c\cdot 2^{-n}[f_0(x) + f_0(y)] < f_0(x) + f_0(y) - 2 f_0\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

那末就有
$$h(x) - 2h\left(\frac{x+y}{2}\right) + h(y) > 0.$$

容易看到，这表明 h 是严格凸的. □

定义 5.3.4 设 X 是 Banach 空间，f 是 X 上一个凸函数

(允许取值在$(-\infty, +\infty]$中，但本节仅讨论取值在$(-\infty, +\infty)$中)，假设存在$x^*\in X^*$和$t\in \boldsymbol{R}^1$，使

$$f(x)\geqslant x^*(x)+t,\ \forall x\in X,$$

则f的共轭函数f^*定义为

$$f^*(x^*)=\sup\{\langle x, x^*\rangle-f(x);x\in X\}.$$

注：此时f^*可能取无穷值.

性质 5.3.18 若$f\leqslant g$，则$f^*\geqslant g^*$，并且对任何$c>0$，$(cf)^*(x^*)=cf^*\left(\frac{x^*}{c}\right)$.

证明：由于对一切$x\in X$，$f(x)\leqslant g(x)$，故

$$\langle x, x^*\rangle-f(x)\geqslant\langle x, x^*\rangle-g(x),\ \forall x\in X,\ x^*\in X^*,$$

从而

$$\begin{aligned}f^*(x^*)&=\sup\{\langle x, x^*\rangle-f(x);x\in X\}\\&\geqslant\sup\{\langle x, x^*\rangle-g(x);x\in X\}=g^*(x^*).\end{aligned}$$

对于$c>0$，我们有

$$\begin{aligned}(cf)^*(x^*)&=\sup\{\langle x, x^*\rangle-cf(x);x\in X\}\\&=c\cdot\sup\left\{\left\langle x, \frac{x^*}{c}\right\rangle-f(x);x\in X\right\}\\&=cf^*\left(\frac{x^*}{c}\right).\ \square\end{aligned}$$

性质 5.3.19 若f是二次齐次凸函数，则f^*也是二次齐次凸函数. 并且对$c>0$，$(cf)^*=c^{-1}f^*$.

证明：当$\alpha, \beta\geqslant 0$，$\alpha+\beta=1$时，

$$\begin{aligned}f^*(\alpha x^*+\beta y^*)&=\sup\{\alpha(\langle x, x^*\rangle-f(x))+\beta(\langle x, y^*\rangle\\&\qquad-f(x));x\in X\}\\&\leqslant\alpha\sup\{\langle x, x^*\rangle-f(x);x\in X\}\\&\qquad+\beta\sup\{\langle x, y^*\rangle-f(x);x\in X\}\\&=\alpha f^*(x^*)+\beta f^*(y^*).\end{aligned}$$

故f^*是凸函数.

又当$t\in\boldsymbol{R}^1$时，

$$f^*(tx^*)=\sup\{\langle x,\ tx^*\rangle-f(x);\ x\in X\}$$
$$=t^2\sup\left\{\left\langle\frac{1}{t}x,\ x^*\right\rangle-f\left(\frac{1}{t}x\right);\ x\in X\right\}$$
$$=t^2f^*(x^*),$$

故 f^* 是二次齐次的. 因此由性质 5.3.18 知, 当 $c>0$ 时,

$$(cf)^*(x^*)=cf^*\left(\frac{x^*}{c}\right)=c^{-1}f^*(x^*),$$

即 $(cf)^*=c^{-1}f^*$. □

性质 5.3.20 $(f\Box g)^*=\dfrac{f^*+g^*}{2}$, $\left(\dfrac{f^*+g^*}{2}\right)=f^*\Box g^*$.

证明: 我们有

$$-(f\Box g)^*(x^*)=\inf\{f\Box g(x)-\langle x,\ x^*\rangle;\ x\in X\}$$
$$=\inf\left\{\inf\left\{\frac{f(x+y)+g(x-y)}{2},y\in X\right\}-\langle x,\ x^*\rangle;\ x\in X\right\}$$
$$=\inf_{x,y}\left\{\frac{f(x+y)-\langle x+y,\ x^*\rangle}{2}+\frac{g(x-y)-\langle x-y,\ x^*\rangle}{2}\right\}$$
$$=\inf_u\left\{\frac{f(u)-\langle u-x^*\rangle}{2}\right\}+\inf_v\left\{\frac{g(v)-\langle v,\ x^*\rangle}{2}\right\}$$
$$=-\left(\frac{f^*+g^*}{2}\right)(x^*).$$

故 $(f\Box g)^*=\dfrac{f^*+g^*}{2}$.

共轭地, 可证明另一个式子. □

有了以上准备工作之后, 我们对 Banach 空间的范数进行讨论.

令 $f_0(x)=\dfrac{1}{2}\|x\|^2$. 显然 f_0 是一个二次齐次凸函数.

性质 6.3.21 如上定义 f_0，若 f_0^* 是 f_0 的共轭函数，则

$$\|x^*\| = \sqrt{2f_0^*(x^*)}.$$

（我们称 f_0 为由 $\|\cdot\|$ 导出的. 上式说明 f_0^* 是由相应的共轭范数导出的. 即 $f_0^*(x^*)=\frac{1}{2}\|x^*\|^2$.）

证明：若 $x^*\neq 0$，则

$$\begin{aligned} f_0^*(x^*) &= \sup_{x\in X}\left\{x^*(x)-\frac{1}{2}\|x\|^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\|x^*\|^2\sup_{x\in X}\left\{\frac{x^*}{\|x^*\|}\left(\frac{2x}{\|x^*\|}\right)-\left\|\frac{x}{\|x^*\|}\right\|^2\right\}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

但是，
$$\frac{x^*}{\|x^*\|}\left(\frac{2x}{\|x^*\|}\right)-\left\|\frac{x}{\|x^*\|}\right\|^2\leqslant\frac{\|x\|}{\|x^*\|}\left(2-\frac{\|x\|}{\|x^*\|}\right)\leqslant 1.$$

故
$$\sup_{x\in X}\left\{\frac{x^*}{\|x^*\|}\left(\frac{2x}{\|x^*\|}\right)-\left\|\frac{x}{\|x^*\|}\right\|^2\right\}\leqslant 1.$$

又对任何 $\varepsilon>0$，取 $\|x_\varepsilon\|=1$，使

$$x^*(x_\varepsilon)=\|x^*\|(1-\varepsilon),$$

令 $y_\varepsilon=\|x^*\|x_\varepsilon$，则

$$\frac{x^*}{\|x^*\|}\left(\frac{2y_\varepsilon}{\|x^*\|}\right)-\left\|\frac{y_\varepsilon}{\|x^*\|}\right\|^2=1-2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，即知

$$\sup_{x\in X}\left\{\frac{x^*}{\|x^*\|}\left(\frac{2x}{\|x^*\|}\right)-\left\|\frac{x}{\|x^*\|}\right\|^2\right\}=1.$$

从而，由(5.29)式知，

$$f_0^*(x^*)=\frac{1}{2}\|x^*\|^2. \quad \square$$

Asplund 平均值方法就是：若 f_0 是从范数 $\|\cdot\|$ 导出的，而 g_0 又是从另一等价范数 $|||\cdot|||$ 导出. 若 $\|\cdot\|$ 具有某种凸性，则 f_0 也就相应地具有这种凸性，若 $|||\cdot|||^*$ 又具有另一种凸性，则 g_0^* 又相应地具有这另一种凸性. 从而由 h 与 h^* 的共轭关系知道，相应于 h 的范数及共轭范数分别具有两种凸性，这样 X 上的相应范数同时具某种光滑性和某种凸性.

定理 5.3.22 若 X 是 Banach 空间，$\|\cdot\|_1$ 是一个等价的严格凸范数，$\|\cdot\|_2$ 是另一个等价范数，它的共轭范数是严格凸的，则在 X 上存在一个等价范数 $\|\cdot\|_3$，使 $\|\cdot\|_3$ 是严格凸的，且它的共轭范数也是严格凸的，于是 $\|\cdot\|_3$ 兼有 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 所具有的性质.

证明：令 $f_0(x)=\frac{1}{2}\|x\|_1^2$，$g_0=\frac{1}{2}\|x\|_2^2$.

由性质 5.3.21，有

$$f_0^*(x^*)=\frac{1}{2}\|x^*\|_1^2,\quad g_0^*(x^*)=\frac{1}{2}\|x^*\|_2^2.$$

分别对 f_0、g_0 及 f_0^*、g_0^* 作两种平均函数.

$$f_1=\frac{1}{2}(f_0+g_0),\quad g_1=f_0^*\Box g_0;$$

$$(f^*)_1=\frac{1}{2}(f_0^*+g_1^*),\quad (g^*)_1=f_0^*\Box g_0^*,$$

……

$$f_{n+1}=\frac{1}{2}(f_n+g_n),\quad g_{n+1}=f_n\Box g_n;$$

$$(f^*)_{n+1}=\frac{1}{2}(f_n^*+g_n^*),\quad (g^*)_{n+1}=(f^*)_n\Box(g^*)_n,$$

……

由引理 5.3.16 知，对某个 $c>0$，一切 n，

$$\frac{1}{1+4^{-n}c}h\leqslant g_n\leqslant h\leqslant f_n\leqslant(1+4^{-n}c)h. \tag{5.30}$$

又根据性质 5.3.18 及性质 5.3.19 知，

$$\frac{1}{1+4^{-n}c}h^*\leqslant f_n^*\leqslant h^*\leqslant g_n^*\leqslant(1+4^{-n}c)h^*. \tag{5.31}$$

又由性质 5.3.20，有

$$f_n^*=(g^*)_n,\quad g_n^*=(f^*)_n,$$

故由(5.31)式，

$$\frac{1}{1+4^{-n}c}h^*\leqslant(g^*)_n\leqslant h^*\leqslant(f^*)_n\leqslant(1+4^{-n}c)h^*, \tag{5.32}$$

所以

$$h^*(x^*)=\lim_{n\to\infty}(g^*)_n(x^*)\lim_{n\to\infty}(f^*)_n(x^*)\equiv(h)^*(x^*).$$

(5.33)

令 $\|x\|_3=\sqrt{2h(x)}$, 由定理 5.3.17 知, $h(x)$ 是二次齐次严格凸函数, 再由(5.30)式, 容易看到, $\|\cdot\|_3$ 是一个等价的严格凸范数, 由性质 5.3.21 及 (5.33) 式知, $\|\cdot\|$ 的共轭范数 $\|\cdot\|_3^*=\sqrt{2h^*(x^*)}=\sqrt{2(h)^*(x^*)}$ 也是严格凸等价范数, 故 $\|\cdot\|$ 即所求的. □

从上面的讨论, 我们看到两种常用的再赋范方法:

(1) Clarkson-Klee-Day 方法.

(2) Asplund 平均方法.

关于一些具体结果我们列表归纳如下.

表 (I)

$X\approx$ sc	充要条件是: 存在严格凸空间 Y, 及 T: $X\to Y$ 1—1 连续线性算子.	定理 5.3.1
$X\approx$ URED	充要条件是: 存在 URED 空间 Y, 及 T: $X\to Y$ 1-1 连续线性算子.	定理 5.3.1 的注
$X\approx$ LUC	充分条件是: (a) 存在 $T: X\to c_0(\Gamma)$, (对某个 Γ) 1—1 连续线性算子. (b) 存在一族 $s_\lambda\in B(X)=\{T;\ T:\ X\to X$ 有界线性算子$\}$, $\lambda\in\Lambda$, 使 ① $\|s_\lambda\|=1$, $s_\lambda X$ 是可分的, $\forall\lambda\in\Lambda$. ② 对每个 $x\in X$, $(\|s_\lambda x\|)\in c_0(\Lambda)$. ③ 若 $x\neq0$, 则 $x\in\overline{\operatorname{span}}\bigcup_{\lambda\in\Lambda(x)}s_\lambda(x)$, 其中 $\Lambda(x)=\{\lambda\in\Lambda; s_\lambda x\neq0\}$.	参考书[1]
$X\approx$ UC	充要条件: X 是超自反的.	定理 4.4.12
X^* 具等价的共轭范数 $\|\cdot\|^*$	充要条件: $U(X^*, \|\cdot\|^*)$ 是 w* 闭的.	定理 4.3.2

表 (II)

X 是自反的	X 可再赋范成为局部一致凸及 F 可微空间，且相应的共轭空间也是局部一致凸的及 F 可微的。	推论 5.3.12 及参考书[1]p. 185
X 是可分的	X 可再赋范为局部一致凸的且相应的共轭空间是严格凸的。	推论5.3.2 定理 5.3.5 推论5.3.7 及参考书[2] p. 160
X^* 是可分的	X 可再赋范为局部一致凸及 F 可微的，且相应共轭空间也是局部一致凸及光滑，且相应的二次共轭空间严格凸。	参考书[1]p. 185

表 (III)

$c_0(\Gamma)$，对任何 Γ	$c_0(\Gamma)$ 可再赋范局部一致凸及 F 可微，且相应共轭空间为局部一致凸的。	定理 5.3.10 及参考书[2]p. 161
$l_1(\Gamma)$，对任何 Γ	$l_1(\Gamma)$ 可再赋范 URED，也可再赋范 LUR。	参考书[2]p. 160
$l_1(\omega_0)=l_1$	见可分空间。	
$l_\infty(\omega_0)=l_\infty=m$	$l_\infty(\omega_0)\approx$ sc，$\not\approx$wLUR，$\not\approx$sm。	推论 5.3.3 及参考书[1]120—123
$l_\infty(\Gamma)$，Γ 不可数	$\not\approx$sc。	参考书[1]p. 123
$L_\infty(\mu)$，μ 是 σ 有限测度	$\approx$URED。	*Canad. J. Math.*(1971) 1051—1059

第六章　向量测度的RNP的几何理论

§1　向量测度和Bochner积分

作为预备知识，首先，对向量测度和Bochner积分作一个回顾(建议读者阅读Hille & Phillips«泛函分析与半群»(中译本)第三章).

本文中，(Ω, Σ, μ)将表示有限完备非负测度空间，X是Banach空间.

(一)向量测度，可测函数.

定义6.1.1　若$m: \Sigma\to X$是一个函数，m称为可数可加向量测度(本书中，简称为向量测度)，如果对任何$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中$E_n\in\Sigma$，$E_i\cap E_j=\emptyset$，当$i\neq j$时．有

$$m\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n),$$

其中级数按范数收敛.

定义6.1.2　向量测度m称为μ绝对连续或μ连续，如果当$\mu(E)=0$时，有$m(E)=0$.

定理6.1.1　向量测度m是μ连续的当且仅当对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$\mu(E)<\delta$时，有$\|m(E)\|<\varepsilon$.

证明：见Hille & Phillips«泛函分析与半群»中译本p.94.

定义6.1.3　向量测度m的全变差(本书中简称为变差)$|m|$定义为

$$|m|(E)=\sup_{\pi}\sum_{E_i\in\pi}\|m(E_i)\|,$$

其中 π 是 Ω 的一个(有限)分割, $\pi=\{E_1, \cdots, E_n\}$, 即 $E_i\in\Sigma$, $\bigcup_{E_i\in\pi} E_i=\Omega$, 当 $i\neq j$ 时, $E_i\cap E_j=\emptyset$.

若 $|m|(\Omega)<+\infty$, 则称向量测度 m 是有界变差的.

定义 6.1.4 若 $x: \Omega\to X$ 是一个函数, x 称为 μ 强可测的(或 μ 可测的), 如果存在 Ω 上 X 值的可数值可测函数列 $\{x_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$, 使

$$\|x_n(\omega)-x(\omega)\|\to 0 \quad \mu\text{a. e.}$$

注: 可数值可测函数指的是 $x=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\chi_{E_i}$, 其中 $E_i\in\Sigma$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i=\Omega$, 当 $i\neq j$ 时, $E_i\cap E_j=\emptyset$, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset X$.

定理 6.1.2(Egoroff) 如果 $\{x_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 μ 可测函数列, $x_n(\omega)\xrightarrow{\|\cdot\|} x(\omega)$, μ a. e, 则 $x_n(\omega)$ 几乎一致收敛于 $x(\omega)$ ($x_n(\omega)\overset{\|\cdot\|}{\rightrightarrows} x(\omega)$, μa. e), 即对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $A\in\Sigma$, $\mu(A)<\varepsilon$, 使得对任何 $\delta>0$, 存在 N, 当 $n\geqslant N$, $\omega\in\Omega\setminus A$ 时, 有

$$\|x_n(\omega)-x(\omega)\|<\delta.$$

证明: 容易看到, $x(\omega)$ 是 μ 可测的. 如果必要, 可除去一个 0 测度集, 我们不妨设 $x_n(\omega)\xrightarrow{\|\cdot\|} x(\omega)$.

令 $E_n^m=\bigcap_{i=n}^{\infty}\left\{\omega; \|x_i(\omega)-x(\omega)\|<\frac{1}{m}\right\}$, 则

$$E_1^m\subset E_2^m\subset\cdots\subset E_n^m\subset\cdots.$$

由于 $x_n(\omega)\to x(\omega)$, 故

$$\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m=\lim_n E_n^m,$$

从而 $\mu(\Omega)=\lim_n \mu(E_n^m)$. 因为 $\mu(\Omega)<+\infty$, 故对一切 m,

$$\lim_n \mu(\Omega\setminus E^m)=0.$$

对任何 $\varepsilon>0$, 对每个 m, 选 $N_0(m, \varepsilon)$, 使得

$$\mu(\Omega\setminus E_{N_0(m,\varepsilon)}^m)<\frac{\varepsilon}{2^m}.$$

令 $A=\bigcup_{m=1}^{\infty}(\Omega\backslash E_{N_0(m,\varepsilon)}^{m})$，则 $A\in\Sigma$，且

$$\mu(A)\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\mu(\Omega\backslash E_{N_0(m,\varepsilon)}^{m})<\varepsilon.$$

对任何 $\delta>0$，选 m_0 使 $\frac{1}{m_0}<\delta$，则当 $n>N_0(m_0,\varepsilon)$，$\omega\in\Omega\backslash A$ 时，$\omega\in E_{N_0(m_0,\varepsilon)}^{m_0}$，故

$$\|x_n(\omega)-x(\omega)\|<\frac{1}{m_0}<\delta.\quad\square$$

从这个定理的证明，使我们看到如何从实变函数论证方法转变为一般的向量测度的论证方法。

(二)可积函数。

定义 6.1.5 可数值可测函数

$$x(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\chi_{E_n}$$

称为 Bochner 可积的，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\|x_n\|<+\infty,$$

此时，对一切 $E\in\Sigma$，定义：

$$\int_E x(\omega)d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n\cap E)x_n.$$

注：容易证明，$\int_E x(\omega)d\mu$ 是可以定义的，并且是可数可加的，μ 连续的，以及

$$\left\|\int_E x(\omega)d\mu\right\|\leqslant\int_E\|x(\omega)\|d\mu.$$

定义 6.1.6 若 $x:\ \Omega\to X$ 是一个函数，x 称为(关于 μ) Bochner 可积的，如果存在 Bochner 可积的可数值可测函数列 $\{x_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$，使

(1) $x_n(\omega)\xrightarrow{\|\cdot\|}x(\omega)$，$\mu$ a. e.

(2) $\int_\Omega\|x(\omega)-x_n(\omega)\|d\mu\to 0.$

此时,对一切 $E\in\Sigma$, 定义:

$$\int_E x(\omega)d\mu=\lim_n\int_E x_n(\omega)d\mu.$$

注: 由定义条件中(1)知 $x(\omega)$ 是 μ 可测的, 故 (2) 式是有意义的,且由于对任何 $E\in\Sigma$,

$$\left\|\int_E x_n d\mu-\int_E x_m d\mu\right\|\leqslant\int_E\|x_n-x\|d\mu$$

$$+\int_E\|x_m-x\|d\mu\to 0$$

知, $\int_E x_n d\mu$ 是 Banach 空间中 Cauchy 序列, 因此 $\lim_n\int_E x_n d\mu$ 存在.

今后将记 $L_1(\mu, X)=\{x;\ x$ 是 Bochner 可积函数$\}$.

定理 6.1.3 (Bochner) 令 x: $\Omega\to X$ 是一个函数, 则 $x\in L_1(\mu, X)$ 当且仅当 x 是 μ 可测的,且

$$\int_\Omega\|x(\omega)\|d\mu<+\infty.$$

此时,

$$\left\|\int_\Omega x(\omega)d\mu\right\|\leqslant\int_\Omega\|x(\omega)\|d\mu.$$

证明: 见 Hille & Phillips«泛函分析与半群»中译本 p. 99.

定理 6.1.4 (1) 当 $x\in L_1(\mu, X)$ 时,定义

$$\|x\|_1=\int_\Omega\|x(\omega)\|d\mu,$$

则 $L^1(\mu, X)$ 是 Banach 空间 (将 a. e 相等函数看作同一元).

(2) (Lebesgue 控制收敛定理) 若 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset L_1(\mu, X)$, $f(\omega)\in L_1(\mu)$, 且 $\|x_n(\omega)\|\leqslant f(\omega)$ μ a. e 成立, 又若 $x_n(\omega)\xrightarrow[\text{a. e}]{\|\cdot\|}x(\omega)$, 则 $x(\omega)\in L_1(\mu, X)$, 且对一切 $E\in\Sigma$,

$$\lim_n\int_E x_n(\omega)d\mu=\int_E x(\omega)d\mu.$$

(3) 若 $x\in L_1(\mu, X)$, 令

$$m_x(E)=\int_E x(\omega)d\mu,$$

则 m_x 是 μ 连续，有界变差向量测度，且对一切 $E\in\Sigma$，

$$|m_x|(E)=\int_E\|x(\omega)\|d\mu.$$

(4) Σ 可测简单函数在 $L_1(\mu, X)$ 中稠.

证明: (1) 见 Hille & Phillips «泛函分析与半群» 中译本 101 页.

(2) 仿纯量函数证明.

(3) 首先证明 m_x 是可数可加的.

设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Sigma$, $E_i\cap E_j=\emptyset$, 当 $i\neq j$ 时，则

$$m_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n}x(\omega)d\mu=\int_{\Omega}x(\omega)\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n}(\omega)d\mu_{\circ}$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x(\omega)\chi_{E_i}(\omega)=x(\omega)\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n}(\omega),$$

且 $$\sum_{i=1}^{\infty}x(\omega)\chi_{E_i}(\omega)\in L_1(\mu, X),$$

以及 $$\left\|\sum_{i=1}^{n}x(\omega)\chi_{E_i}(\omega)\right\|\leqslant\|x(\omega)\|\in L_1(\mu),$$

由 Lebesgue 控制定理，有

$$m_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_n\sum_{i=1}^{n}\int_{E_i}x(\omega)d\mu=\sum_{i=1}^{\infty}m_x(E_i).$$

故 m_x 是可数可加的.

又容易看到，

$$\begin{aligned}|m_x|(E)&=\sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\|m_x(E_i)\|=\sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\left\|\int_{E_i}x(\omega)d\mu\right\|\\&\leqslant\sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{E_i}\|x(\omega)\|d\mu=\sup_{\pi}\int_E\|x(\omega)\|d\mu\\&=\int_E\|x(\omega)\|d\mu,\end{aligned}\tag{6.1}$$

其中 π 是 E 的任何(有限)分割，$\pi=\{E_1, \cdots, E_n\}$.

下面说明另一方向的不等式. 因为$x(\omega)\in L_1(\mu, X)$, 故$x(\omega)$是μ可测的, 从而$x(\omega)$具有几乎可分值域(见 Hille & Phillips«泛函分析与半群»中译本 p. 90).

不妨设$x(\omega)$具可分值域, 设$S_0=\{\omega;\ \|x(\omega)\|>0\}$, 则$S_0\in\Sigma$, 由于$x(\omega)$具可分值域, 故存在$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$在$\{x(\omega);\ \omega\in\Omega\}$中稠.

任意给定$\varepsilon>0$, 定义

$$E_n=\{\omega;\ \|x(\omega)-a_n\|<\varepsilon;\ x\in S_0\},$$

则$E_n\in\Sigma$, 又由于$\{a_n\}$在$\{x(\omega);\ \omega\in\Omega\}$中稠, 故

$$S_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

令$F_n=E_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n=1}E_k$, 则$\{F_n\}$是两两不相交的, 且

$$S_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n.$$

定义 $$x_\varepsilon(\omega)=\begin{cases}a_n & 当\ \omega\in F_n,\ 对某个\ n\ 时,\\ 0 & 当\ \omega\in\Omega\setminus S_0\ 时.\end{cases}$$

则$\|x_\varepsilon(\omega)-x(\omega)\|<\varepsilon$, 在$\Omega$上处处成立.

由于$x(\omega)$是 Bochner 可积的, 故$x_\varepsilon(\omega)$也是 Bochner 可积的($\|x_\varepsilon(\omega)\|\leqslant\|x(\omega)-x_\varepsilon(\omega)\|+\|x(\omega)\|$, 在$\Omega$上处处成立)且

$$\int_E x_\varepsilon(\omega)d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mu(F_n\cap E),$$

$$\int_E\|x_\varepsilon(\omega)\|d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\mu(F_n\cap E).$$

从而,

$$\begin{aligned}\int_E\|x(\omega)\|d\mu&\leqslant\int_E\|x(\omega)-x_\varepsilon(\omega)\|d\mu+\int_E\|x_\varepsilon(\omega)\|d\mu\\&\leqslant\varepsilon\mu(E)+\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\mu(F_n\cap E)\\&\leqslant\varepsilon\mu(E)+\sum_{n=1}^{n_0}\|a_n\|\mu(F_n\cap E)+\varepsilon\ (对某个\ n_0)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{n_0} \|a_n \mu(F_n \cap E)\| + \varepsilon(\mu(E)+1) \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \left\| \int_{F_n \cap E} x_\varepsilon(\omega) d\mu \right\| + \varepsilon(\mu(E)+1) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \left\| \int_{F_n \cap E} x(\omega) d\mu \right\| \\
&\quad + \sum_{n=1}^{n_0} \int_{F_n \cap E} \|x_\varepsilon(\omega) - x(\omega)\| d\mu + \varepsilon(\mu(E)+1) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \|m_x(F_n \cap E)\| \\
&\quad + \sum_{n=1}^{n_0} \varepsilon \mu(F_n \cap E) + \varepsilon(\mu(E)+1) \\
&\leqslant |m_x|(E) + \varepsilon(2\mu(E)+1).
\end{aligned}
$$

由于 ε 是任意的，故

$$\int_E \|x(\omega)\| d\mu \leqslant |m_x|(E),$$

结合(6.1)有 $\int_E \|x(\omega)\| d\mu = |m_x|(E)$. □

(4) 留给读者补证.

§2 可 凹 集

可凹集的概念是1966年由 M. A. Rieffel (*Fun. Ana. Proc. Conf., Irvine, Calif.* 1966, B. R. Gelbaum, editor, Academic Press, London; Thompson, Washington, D. C, 71-77)提出的. 它在研究向量测度的 Radon-Nikodym 定理与 Banach 空间中集合的几何性质的联系中起着重要作用.

在阅读下列有关定理、定义时，建议读者画示意图帮助理解有关定理、定义的直观几何想法.

定义 6.2.1 若 K 是 X 的有界子集，K 的 σ 凸包是

$$\sigma-\mathrm{co}(K)=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i;\ \alpha_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i=1,\ x_i\in K\right\}.$$

注：由于空间是完备的，K 的有界性保证了级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i$ 是收敛的.

性质 6.2.1 若 K 是 X 的有界子集，则

$$\mathrm{co}(K)\subset\sigma-\mathrm{co}(K)\subset\overline{\mathrm{co}}(K).$$

证明：显然，$\mathrm{co}(K)\subset\sigma-\mathrm{co}(K)$。

若 $\alpha_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i=1$，$x_i\in K$。由于，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i+\left(1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)x_1\in\mathrm{co}(K),$$

且
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i+\left(1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)x_1\longrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i,$$

故 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i\in\overline{\mathrm{co}}(K)$，这表明 $\sigma-\mathrm{co}(K)\subset\overline{\mathrm{co}}(K)$. □

定义 6.2.2 Banach 空间 X 的一个子集 K 叫做可凹集 (dentable set)，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $x_\varepsilon\in K$，使

$$x_\varepsilon\notin\overline{\mathrm{co}}(K\setminus B(x_\varepsilon,\ \varepsilon)),$$

其中 $B(x_\varepsilon,\ \varepsilon)\equiv B_\varepsilon(x_\varepsilon)\equiv\{y\in X;\ \|y-x_\varepsilon\|<\varepsilon\}$.

一个点 $x\in K$ 叫做 K 的一个可凹点，如果对任何 $\varepsilon>0$，有 $x\notin\overline{\mathrm{co}}(K\setminus B(x,\ \varepsilon))$.

注：显然，若 K 具有一个可凹点，则 K 就是一个可凹集，反之不然.

定义 6.2.3 Banach 空间 X 的一个有界子集 K 叫做 σ 可凹集，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $x_\varepsilon\in K$，使

$$x_\varepsilon\notin\sigma-\mathrm{co}(K\setminus B(x_\varepsilon,\ \varepsilon)).$$

注：由性质 6.2.1 知，若有界集 K 是可凹集，则 K 是 σ 可凹集. 但反之不然，见下例.

例 1：Banach 空间 $L_\infty[0,\ 1]$ 的闭单位球 K 是 σ 可凹的，但不是可凹的.

证明：先证 K 是 σ 可凹的．事实上，令 $x=\chi_{[0,1]}$，则 x 是一个 σ 可凹点．因为对任何 $\varepsilon>0$，若

$$\chi_{[0,1]}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_n,$$

其中，$\|f_n\|_\infty\leqslant 1$，$\alpha_n\geqslant 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=1$，则对一切 n，应有 $f_n\xrightarrow{\text{a.e}}\chi_{[0,1]}$，故

$$x\notin\sigma-\mathrm{co}(K\setminus B(x,\ \varepsilon)).$$

这表明 x 是一个 σ 可凹点，从而 K 是 σ 可凹的．

下面证明 K 不是可凹的．事实上，选 ε_0，$0<\varepsilon_0<\dfrac{1}{3}$，则对一切 $f\in K$，有

$$f\in\overline{\mathrm{co}}(K\setminus B(f,\ \varepsilon_0))。$$

这是因为，(1) 若 $f\in K$，$\|f\|>\varepsilon_0$，则对任何正整数 m，存在两两不相交正测度集 E_1，…，E_m，使对 $n=1$, 2, …, m，有

$$\|f\chi_{E_n}\|>\varepsilon_0.$$

令 $f_n=f-f\chi_{E_n}$，则 $\|f_n\|\leqslant\|f\|\leqslant 1$，且对一切 $n\in\{1,\ \cdots,\ m\}$，有 $\|f-f_n\|=\|f\chi_{E_n}\|>\varepsilon_0$，故 $f_n\in K\setminus B(f,\ \varepsilon_0)$．又

$$\left\|f-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{m}f_n\right\|\leqslant\frac{1}{m}\|f\|,$$

故 $f\in\overline{\mathrm{co}}(K\setminus B(f,\ \varepsilon_0))$．

(2) 若 $f\in K$，$\|f\|<\varepsilon_0\left(<\dfrac{1}{3}\right)$，令

$$f_1=f-2\varepsilon_0\chi_{[0,1]},\ f_2=f+2\varepsilon_0\chi_{[0,1]},$$

则 f_1，$f_2\in K\setminus B(f,\ \varepsilon_0)$，且 $f=\dfrac{f_1+f_2}{2}$，故

$$f\in\overline{\mathrm{co}}(K\setminus B(f,\ \varepsilon_0)),$$

总之，对任何 $f\in K$，有

$$f\in\overline{\mathrm{co}}(K\setminus B(f,\ \varepsilon_0)),$$

故 K 不是可凹集． □

定义 6.2.4 设 A 是 Banach 空间 X 的有界集，$x_0\in A$ 称为 A 的一个暴露点，如果存在 $f\in S(X^*)$，使

$$f(x)>f(A\backslash\{x\}).$$

若此外还有当 $x_n\in A$, $f(x_n)\to f(x)$ 时，$\|x_n-x\|\to 0$，则 x 称为 A 的一个强暴露点. f 称为相应于 x 的暴露泛函，当后者成立时 f 称为相应于 x 的强暴露泛函.

定义 6.2.5 设 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，$x_0\in A$ 称为 A 的一个强端点，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 x_0 不是长度为 ε 含于 $A+\delta U(x)$ 内的某个线段的中点.

下面我们讨论可凹集的性质.

定理 6.2.2 (1) A 是可凹集$\Leftrightarrow$对任何 $x\in X$，$x+A$ 是可凹集$\Leftrightarrow$对某个 $x\in X$，$x+A$ 是可凹集 (即可凹性是平移不变的).

(2) A 是可凹集$\Leftrightarrow$对任何 $\alpha\in \boldsymbol{R}^1\backslash\{0\}$，$\alpha A$ 是可凹集$\Leftrightarrow$对某个 $\alpha\neq 0$，αA 是可凹集(即可凹性是数乘不变的).

(3) 若对某个集 B，$A+B$ 是可凹集，则 A 是可凹集.

(4) 若 A 的每个可数子集是可凹集，则 A 是可凹集(即可凹性是可数决定的).

(5) 若 $\overline{\mathrm{co}}(A)$是可凹集，则 A 是可凹集.

(6) 若 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 是可凹集，则至少一个 A_i 是可凹集.

(7) 若有界集 B 有一个暴露点 x_0，则 B 是 σ 可凹集.

(8) x_0 是有界集 B 的一个强暴露点 $\Rightarrow x_0$ 是 B 的一个可凹点 $\Rightarrow B$ 是可凹集.

(9) 相对 w 紧集是可凹的.

(10) 若 K 是紧凸集，则 x_0 是 K 的端点 $\Leftrightarrow x_0$ 是 K 的可凹点 $\Leftrightarrow x_0$ 是 K 的强端点.

(11) A 不是可凹的 $\Leftrightarrow$ 存在 $\varepsilon>0$，使得对一切 $x\in A$，有 $A\subset\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B(x,\varepsilon))$. 特别地，当 A 是闭凸集时，有

A 不是可凹的 $\Leftrightarrow$ 存在 $\varepsilon>0$，使得对一切 $x\in A$，有 $A=\overline{\text{co}}(A\setminus B(x,\ \varepsilon))$。

(12) 设 A 是闭凸集，$\text{int}\,A\neq\emptyset$，若 A 不是可凹的，则存在 $\varepsilon>0$，使对一切 $x\in A$，

$$\text{int}\,A\subset\text{co}((\text{int}\,A)\setminus B_\varepsilon(x)).$$

即若 A 不是可凹的，则 $\text{int}\,A$ 也不是 σ 可凹的(更不是可凹的)。

(13) 若 C 是有界闭凸集，则 C 是可凹集 $\Leftrightarrow$ 对每个 $\varepsilon>0$ 存在 C 的一个切片 $S(x^*,\ \alpha,\ C)\equiv\{y;\ y\in C,\ x^*(y)\geqslant\sup x^*(C)-\alpha\}$，其中 $\alpha>0$，使 $\text{diam}\,S(\alpha^*,\ \alpha,\ C)<\varepsilon$。

(14) 若 C 是有界闭凸集，则下列等价：

① C 不是可凹集。

② 存在 $\varepsilon>0$，使得没有 C 的切片具有有限 ε 网。

③ 存在 $\varepsilon>0$，使得对每个有限集 $F\subset C$，有

$$C=\overline{\text{co}}(C\setminus\overline{B}_\varepsilon(F)),$$

其中 $\overline{B}_\varepsilon(F)=\bigcup_{x\in F}\{y\in X;\ \|y-x\|\leqslant\varepsilon\}$。

证明：(1) 若 A 是可凹集。则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $x_\varepsilon\in A$，使

$$x_\varepsilon\notin\overline{\text{co}}(A\setminus B_\varepsilon(x_\varepsilon)),$$

从而 $\quad x_\varepsilon+x\notin\overline{\text{co}}(A\setminus B_\varepsilon(x_\varepsilon))+x=\overline{\text{co}}(A+x\setminus B_\varepsilon(x_\varepsilon+x))$，

故 $x+A$ 是可凹的，其中 x 是 X 中任何元。

反之，若对某个 $x\in X$，$x+A$ 是可凹的，由上面论证知，$x+A-x=A$ 是可凹的。 □

(2) 若 A 是可凹的，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $x_\varepsilon\in A$，使得

$$x_\varepsilon\notin\overline{\text{co}}(A\setminus B_\varepsilon(x_\varepsilon)),$$

从而，对任 $\alpha\neq0$，

$$\alpha x_\varepsilon\notin\alpha\,\overline{\text{co}}(A\setminus B_\varepsilon(x_\varepsilon))=\overline{\text{co}}(\alpha A\setminus B_{\alpha\varepsilon}(\alpha x_\varepsilon)),$$

这表明 αA 是可凹的。

反之，由 $A=\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha A(\alpha\neq0)$ 知，当 αA 可凹时，A 是可凹集. □

(3) 若 A 不是可凹的，则存在 $\varepsilon>0$，对一切 $x\in A$，有

$$x\in\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B(x,\ \varepsilon)),$$

任取 $y\in A+B$，则 $y=x_1+x_2$，其中 $x_1\in A$，$x_2\in B$. 因此，$x_1\in\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_\varepsilon(x_1))$，故

$$\begin{aligned}y=x_1+x_2&\in\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_\varepsilon(x_1))+x_2\\&=\overline{\mathrm{co}}(A+x_2\backslash B_\varepsilon(x_1+x_2))\\&\subset\overline{\mathrm{co}}(A+B\backslash B_\varepsilon(x_1+x_2)),\end{aligned}$$

这表明 $A+B$ 也不是可凹集. □

(4) 若 A 不是可凹集，则存在 $\varepsilon>0$，使得，对每个 $x\in A$，有

$$x\in\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_\varepsilon(x)).\tag{6.2}$$

固定 $x_0\in A$，则存在 $A\backslash B_\varepsilon(x_0)$ 的元的凸组合的序列收敛于 x_0，记被选取的 $A\backslash B_\varepsilon(x_0)$ 中元的全体为 $C_1=\{x_{i_1}\}_{i_1=1}^\infty$，则 C_1 的基数 $\overline{\overline{C}}_1=\aleph_0$.（可数基数）. 对每个 x_{i_1}，由(6.2)式知，又存在 $A\backslash B_\varepsilon(x_{i_1})$ 的元的凸组合的序列收敛于 x_{i_1}，记这些被选取的元为 $\{x_{i_1,i_2}\}_{i_1=1}^\infty{}_{i_2=1}^\infty=C_2$，则 C_2 的基数 $\overline{\overline{C}}_2=\aleph_0$. 对每个 x_{i_1,i_2} 再根据(6.2)式，由上述方法得到 C_3，继续下去，得到 $\{C_n\}_{n=1}^\infty$.

令 $$C=\{x_0\}\cup C_1\cup C_2\cup\cdots\cdots$$

则 $\overline{\overline{C}}=\aleph_0$. 且对任何 $x_{i_1,i_2,\cdots i_n}$，我们有 $x_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 是 $A\backslash B_\varepsilon(x_{i_1,\cdots,i_n})$ 中元 $\{x_{i_1,\cdots,i_n,i_{n+1}}\}_{i_{n+1}=1}^\infty$ 的凸组合的极限. 又 $\{x_{i_1,\cdots,i_{n+1}}^n\}_{i_{n+1}=1}^\infty\subset C$，从而

$$\{x_{i_1,\cdots,i_{n+1}}\}_{i_{n+1}=1}^\infty\subset C\backslash B_\varepsilon(x_{i_1,\cdots,i_n}),$$

故 $$x_{i_1,\cdots,i_n}\in\overline{\mathrm{co}}(C\backslash B_\varepsilon(x_{i_1,\cdots,i_r})),$$

这表明 C 不可凹. 由此得到若 A 的每个可数子集是可凹的，那么 A 本身是可凹的. □

(5) 由于 $\overline{\mathrm{co}}(A)$ 是可凹的. 任给 $\varepsilon>0$，存在 $x\in\overline{\mathrm{co}}(A)$，

使得,

$$x\notin\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{co}(A)\setminus B_{\varepsilon/2}(x)).$$

令 $Q=\overline{\mathrm{co}}\,(\overline{\mathrm{co}}(A)\setminus B_{\varepsilon/2}(x))$, 则 $\overline{\mathrm{co}}(A)\not\subset Q$.

由于 Q 是闭凸集, 故 $A\not\subset Q$. 即 $A\setminus Q\neq\emptyset$. 我们有 $A\setminus Q\subset B_{\varepsilon/2}(x)$. (事实上, 若 $a\in(A\setminus Q)\setminus B_{\varepsilon/2}(x)$, 则

$$a\in A\setminus B_{\varepsilon/2}(x)\subset\overline{\mathrm{co}}(A\setminus B_{\varepsilon/2}(x))\subset\overline{\mathrm{co}}(\overline{\mathrm{co}}(A\setminus B_{\varepsilon/2}(x))=Q,$$

矛盾!)

对任何 $a\in A\setminus Q$, 我们有 $A\setminus B_\varepsilon(a)\subset Q$. (事实上, 若存在 $a_0\in A\setminus Q$, 使 $A\setminus B_\varepsilon(a_0)\not\subset Q$, 则存在 a_2, 使 $a_2\in(A\setminus B_\varepsilon(a_0))\setminus Q$, 由于 a_0, $a_2\in A\setminus Q\subset B_{\varepsilon/2}(x)$, 则 $\|a_2-a_0\|<\varepsilon$. 但另一方面, $a_2\notin B_\varepsilon(a_0)$, 故 $\|a_2-a_0\|\geqslant\varepsilon$, 矛盾!). 从而由于 Q 是有界闭凸集, 对任何 $a\in A\setminus Q$ 有

$$\overline{\mathrm{co}}(A\setminus B_\varepsilon(a))\subset Q. \tag{6.3}$$

我们已经证明 $A\setminus Q\neq\emptyset$, 任取 $a\in A\setminus Q$, 则由(6.3)有

$$a\notin\overline{\mathrm{co}}(A\setminus B_\varepsilon(a)),$$

这表明 A 是可凹集. □

(6) 用反证法. 若 A_i, $i=1,\cdots,n$ 都不是可凹集, 则可选 $\varepsilon>0$, 使得当 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 时, 有

$$x\in\overline{\mathrm{co}}(A_i\setminus B_\varepsilon(x))\subset\overline{\mathrm{co}}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\setminus B_\varepsilon(x)\Big).$$

这表明 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 是不可凹集. □

(7) 若 $x_0\in B$ 是一个暴露点. 若 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset B$, $\alpha_n\geqslant0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=1$, 使 $x_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_nx_n$, 则对于 x_0 点相应的暴露泛函 x_0^*, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nx_0^*(x_n)=x_0^*(x_0),$$

因此, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x_0^*(x_0)-x_0^*(x_n))=0$, 由于级数具非负项, 故每项等于0, 再因为 x_0 是暴露点, 故, 对一切 n, 有 $x_n=x_0$. 这表明 $x_0\notin$

$\sigma-\text{co}(B\backslash B_\varepsilon(x_0))$. 因此 x_0 是 B 的一个 σ 可凹点. 所以 B 是 σ 可凹集. □

(8) 设 x_0 是 B 的强暴露点.

对任何 $\varepsilon>0$, 由强暴露点定义, 存在 $k>0$, 使得当 $y\in B\backslash B_\varepsilon(x_0)$ 时, 有

$$x_0^*(x_0)>x_0^*(y)+k,$$

其中 x_0^* 是相应于 x_0 点强暴露泛函.

因此,

$$\begin{aligned}x_0^*(x_0)-k&\geqslant\sup\{x_0^*(y);\ y\in B\backslash B_\varepsilon(x_0)\}\\&=\sup\{x_0^*(y);\ y\in\overline{\text{co}}(B\backslash B_\varepsilon(x_0))\}\end{aligned}$$

这表明 $\qquad x_0\notin\overline{\text{co}}(B\backslash B_\varepsilon(x_0))$.

故 x_0 是 B 的一个可凹点. 从而 B 是可凹集. □

(9) 设 P 是相对 w 紧集. 则 $\bar{P}^{\text{w}}$ 是 w 紧集. 由 Mazur 定理, $\overline{\text{co}}^{\text{w}}(\bar{P}^{\text{w}})=\overline{\text{co}}(P)$ 是 w 紧凸集, 又由于 Banach 空间的 w 紧凸集是它的强暴露点的闭凸包(见参考书[1] p. 166). 故存在 x_0, 使 x_0 是 $\overline{\text{co}}(P)$ 的强暴露点. 由 (8), $\overline{\text{co}}(P)$ 是可凹的, 再根据(5), P 是可凹的. □

(10) 设 x_0 是紧凸集 K 的端点, 我们要证明 x_0 是可凹点. 若不然, 则存在 $\varepsilon>0$, 使

$$x_0\in\overline{\text{co}}(K\backslash B_\varepsilon(x_0))。$$

由于 $\overline{\text{co}}(K/B_\varepsilon(x_0))$ 也是紧凸集, 由 Krein-Milman 定理, $\text{ext}\,\overline{\text{co}}(K\backslash B_\varepsilon(x_0))\subset\overline{K\backslash B_\varepsilon(x_0)}$. 因为

$$(\text{ext}\,K)\cap\overline{\text{co}}(K\backslash B_\varepsilon(x_0)\subset\text{ext}\,\overline{\text{co}}(K\backslash B_\varepsilon(x_0)),$$

故 $x_0\in\overline{K\backslash B_\varepsilon(x_0)}$, 矛盾! 故 x_0 是可凹点.

下面证明若 x_0 是 K 的可凹点, 则 x_0 是 K 的强端点.

设 x_0 不是 K 的强端点, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得对一切 $\delta>0$, x 是长为 ε 的含于 $K+\delta U(X)$ 的线段的中点. 设

$$a_n,\ b_n\in K+\frac{1}{n}U(X),\ \|a_n-b_n\|=\varepsilon,$$

且 $x_0=\frac{a_n+b_n}{2}$, $n=1, 2, \cdots$. 则

$$a_n=a_n'+\frac{1}{n}a_n'',\ b_n=b_n'+\frac{1}{n}b_n'',$$

其中 $a_n', b_n'\in K$, 而 $a_n'', b_n''\in U(X)$.

因此, $x_0=\frac{a_n'+b_n'}{2}+\frac{a_n''+b_n''}{2}$, 由于 K 是凸集, 故 $\frac{a_n'+b_n'}{2}\in K$, 且

$$\|a_n'-x_0\|\geqslant\|a_n-x\|-\|a_n'-a_n\|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{n},$$

当 n 充分大时, 有

$$\|a_n'-x_0\|\geqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

同理, 我们得到 $\|b_n'-x_0\|\geqslant\frac{\varepsilon}{3}$.

因此, $a_n', b_n'\in K\backslash B_{\varepsilon/3}(x_0)$, 当 n 充分大时. 所以, 当 n 充分大时, $\frac{a_n'+b_n'}{2}\in \mathrm{co}(K/B_{\varepsilon/3}(x_0))$.

又由于 $\left\|x_0-\frac{a_n'+b_n'}{2}\right\|\leqslant\frac{1}{n}\to 0$, 故

$$x_0\in\overline{\mathrm{co}}(K/B_{\varepsilon/3}(x_0)).$$

从而, x_0 不是可凹点. 这表明若 x_0 是 K 的可凹点, 则 x_0 是 K 的强端点.

显然, 若 x_0 是 K 的强端点, 则 x_0 是 K 的端点. □

注: 实际上, 我们证明对任何有界闭凸集 B, B 的可凹点必是强端点.

(11) "$\Leftarrow$"证明是很简单的.

"$\Rightarrow$" 设 A 不是可凹集, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得对一切 $y\in A$, 有

$$y\in\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_\varepsilon(y)).$$

任意给定 x_0, 对任何 $y\in A$, 当 $\|y-x_0\|>\frac{\varepsilon}{2}$ 时, 有

$$y\in A\backslash B_{\varepsilon/2}(x_0)\subset\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_{\varepsilon/2}(x_0)).$$

而对任何 $y\in A$，当 $\|y-x_0\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 时，有 $B_{\varepsilon/2}(x_0)\subset B_\varepsilon(y)$，故

$$y\in\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_\varepsilon(y))\subset\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_{\varepsilon/2}(x_0)).$$

从而，$A\subset\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_{\varepsilon/2}(x_0))$. 又由于 x_0 是 A 中任意元，故对任意 $x\in A$，有

$$A\subset\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_{\varepsilon/2}(x)).$$

特别地，当 A 是(有界)闭凸集时，有

$$\overline{\mathrm{co}}(A)=A\subset\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_{\varepsilon/2}(x))\subset\overline{\mathrm{co}}(A)=A,$$

故对一切 $x\in A$，此时有

$$A=\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_{\varepsilon/2}(x)).$$

令 $\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon_1$，即得所要结论. □

(12) 设 A 是闭凸集，且 $\mathrm{int}\,A\neq\emptyset$。若 A 不是可凹集. 由(11)知，存在 $\varepsilon>0$，使对一切 $x\in A$，有

$$A=\overline{\mathrm{co}}(A/B_\varepsilon(x)).$$

对每个 $x\in A$，令 $J_{x,\alpha}=A\backslash\overline{B}_\alpha(x)$，则

$$\mathrm{int}\,J_{x,\alpha}=(\mathrm{int}A)\backslash\overline{B}_\alpha(x).$$

由于 $\mathrm{int}\,A\neq\emptyset$，可选 ε_1，$0<\varepsilon_1<\varepsilon$，使得对每个 $x\in A$，$\mathrm{int}\,J_{x,\varepsilon_1}\neq\emptyset$. 令 $J_{x,\varepsilon_1}=J_x$.

对固定的 $x_0\in A$，由于 $\varepsilon_1<\varepsilon$，故 $A=\overline{\mathrm{co}}(Jx_0)$.

首先，有 $J_{x_0}\subset\overline{\mathrm{int}\,J_{x_0}}$. (事实上，若 $y\in J_{x_0}$，则 $y\in A$，且 $\|y-x_0\|>\varepsilon_1$. 任取 $z\in\mathrm{int}\,A$，由第一部分定理1、2、2(7)知，$[z,\ x_0)\subset\mathrm{int}\,A$，从而存在 $u\in[z,\ x_0)\cap B_{\varepsilon_1}(x_0)\subset\mathrm{int}\,A$，也有 $[v,\ y)\subset\mathrm{int}\,A$，故存在 $v\in[u,\ y)$，使

$$[v,\ y)\subset(\mathrm{int}\,A)\backslash\overline{B}_{\varepsilon_1}(x_0)=\mathrm{int}\,J_{x_0}.$$

故 $y\in\overline{\mathrm{int}\,J_{x_0}}$). 于是，$J_{x_0}\subset\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{int}\,J_{x_0})$. 所以，

$$\overline{\mathrm{co}}(J_{x_0})\subset\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{int}\,J_{x_0}),$$

故

$$\mathrm{int}\,A=\mathrm{int}\,\overline{\mathrm{co}}(J_{x_0})\subset\mathrm{int}\,\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{int}\,J_{x_0}). \tag{6.4}$$

应用第一部分定理1、2、2(7)，及 $\operatorname{int}\overline{\mathrm{co}}(\operatorname{int}J_{x_0})\supset\operatorname{int}J_{x_0}\neq\emptyset$，知

$$\begin{aligned}\operatorname{int}\overline{\mathrm{co}}(\operatorname{int}J_{x_0})&=\operatorname{int}\mathrm{co}(\operatorname{int}J_{x_0})=\mathrm{co}(\operatorname{int}J_{x_0})\\&=\mathrm{co}(\operatorname{int}(A\setminus\bar{B}_{\varepsilon_1}(x_0))\\&=\mathrm{co}((\operatorname{int}A)\setminus\bar{B}_{\varepsilon_1}(x_0)).\end{aligned}\tag{6.5}$$

选 $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$，由(6.4)，(6.5)知对每个 $x\in A$，

$$\operatorname{int}A\subset\mathrm{co}((\operatorname{int}A)\setminus B_{\varepsilon_1}(x)).\quad\Box$$

(13) "$\Leftarrow$" 任取 $\varepsilon>0$，由假设存在 C 的切片 $S(x_*,\alpha,C)$，使 $\operatorname{diam}S(x^*,\alpha,C)<\varepsilon$。

选 $x\in C$，使

$$x^*(x)\geqslant\sup x^*(C)-\frac{\alpha}{2},$$

则 $x\in S(x_*,\alpha,C)$。

任取 $y\in C\setminus B_\varepsilon(x)$，由于 $\operatorname{diam}S(x^*,\alpha,C)<\varepsilon$，故 $y\notin S(x^*,\alpha,C)$。所以

$$\begin{aligned}C\setminus B_\varepsilon(x)\subset C\setminus S(x^*,\alpha,C)=\{y;y\in C,\ x^*(y)\\<\sup x^*(C)-\alpha\},\end{aligned}$$

从而 $\quad\overline{\mathrm{co}}(C\setminus B_\varepsilon(x))\subset\{y\in C;\ x^*(y)\leqslant\sup x^*(C)-\alpha\}$，

故 $x\notin\overline{\mathrm{co}}(C\setminus B_\varepsilon(x))$。因此，$C$ 是可凹的。

"$\Rightarrow$" 假设 C 是可凹的，任取 $\varepsilon>0$，则存在 x_0，使

$$x_0\in C\setminus\overline{\mathrm{co}}(C\setminus B_{\varepsilon/2}(x_0)).$$

由分离定理，存在 $x^*\in S(X^*)$，$\alpha>0$，使

$$x^*(x_0)>x^*(x_0)-\alpha>\sup x^*(\overline{\mathrm{co}}(C/B_{\varepsilon/2}(x_0))).$$

令 $\alpha_1=\sup x^*(C)-x^*(x_0)+\alpha$，则 $\alpha_1\geqslant\alpha$。由于

$$x^*(x_0)=\sup x^*(C)+\alpha-\alpha_1>\sup x^*(C)-\alpha_1,$$

故 $x_0\in S(x^*,\alpha_1,C)$。容易看到，

$$S(x^*,\alpha_1,C)\subset\bar{B}\left(x_0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

从而 $\operatorname{diam}S(x^*,\alpha_1,C)\leqslant\varepsilon$。 $\Box$

注：若对 $B\subset X^*$，定义 w^* 可凹集：对任何 $\varepsilon>0$，存在 $x^*\in B$，使

$$x^*\notin\overline{\mathrm{co}}^{\mathrm{w}^*}(B\backslash B_\varepsilon(x^*)),$$

并且，对每个有界闭凸集 $B\subset X^*$ 定义 B 的 w^* 切片

$$S(x,\ \alpha,\ B)=\{y^*\in B;\ y^*(x)\geqslant\sup\hat{x}(B)-\alpha\}.$$

我们容易证明 X^* 中有界闭凸集 B 是 w^* 可凹的当且仅当对每个 $\varepsilon>0$，存在 B 的 w^* 切片 $S(x,\ \alpha,\ B)$，使 $\operatorname{diam}S(x,\ \alpha,\ B)<\varepsilon$.

(14) ①⇒② 设 C 不是可凹的. 我们不妨设 $C\subset U(X)$. 由(13)知，存在 $\delta>0$，使 C 的每个切片的直径大于 δ。

令 $\varepsilon=\dfrac{\delta}{3}$，任取 $x^*\in S(X^*)$，及 α，使

$$\inf x^*(C)<\alpha<\sup x^*(C).$$

考虑切片 $S(x^*,\ \sup x^*(C)-\alpha,\ C)$，容易看到，

$$S(x^*,\ \sup x^*(C)-\alpha,\ C)=\{x\in C;\ x^*(x)\geqslant\alpha\}\equiv S.$$

(若 $\alpha=\inf x^*(C)=\sup x^*(C)$，则 $S(x^*,\ \sup x^*(C)-\alpha,\ C)=C$，此时 C 也不能有有限 ε 网，因为否则，C 为紧凸集，由 Krein-Milman 定理，$\operatorname{ext}C\neq\emptyset$，再由 (10) 知 C 是可凹的，对 $\alpha=\inf x^*(C)$ 的切片可类似地讨论.) 下面要证明 S 没有有限的 ε 网.

令 $H=\{x\in C;\ x^*(x)=\alpha\}$，显然，$H\subsetneq S$，且 H 是闭凸集.

反证法. 若 S 有有限 ε 网 $\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$，将这个有限 ε 网缩减成下列意义下"最小的"：即对某个 $m\leqslant n$，有

$$S=\overline{\mathrm{co}}(H\cup(S\cap\overline{B}_\varepsilon(x_1,\ \cdots,\ x_m)),$$

但是 $$S\neq K_1\equiv\overline{\mathrm{co}}(H\cup(S\cap\overline{B}_\varepsilon(x_2,\ \cdots,\ x_m))).$$

所以，必存在 $y_0\in[S\cap\overline{B}_\varepsilon(x_1)]\backslash K_1$，由分离定理，存在 $y^*\in S(X^*)$，使

$$a=\sup y^*(K_1)<y^*(y_0)\leqslant\sup y^*(S)=M.$$

选 β, 使 $a<\beta<M$, 且 $\frac{\beta-a}{M-a}>1-\frac{\delta}{12}$.

令 $S'=S(y^*, M-\beta, S)=\{x; x\in S, y^*(x)\geqslant\beta\}$.

下面证明 $\operatorname{diam} S'\leqslant\delta$.

事实上, 令 $L=\{x; x\in S\cap\overline{B}_\varepsilon(x_1), y^*(x)\geqslant a\}$,

$$K_2=\{x; x\in S, y^*(x)\leqslant a\},$$

故 $K_1\subseteq K_2$, $y_0\in L$, 并且

$$L\cup K_2\supset H\cup(S\cap\overline{B}_\varepsilon(x_1, \cdots, x_m)). \tag{6.6}$$

(因为 $K_2\supset K_1\supset H\cup(S\cap\overline{B}_\varepsilon(x_2, \cdots, x_m))$, 又当 $z\in S\cap\overline{B}_\varepsilon(x_1)$ 时, 若 $y^*(z)\geqslant a$, 则 $z\in L$, 否则有 $y^*(z)<a$, 此时 $z\in K_2$, 总之 $z\in L\cup K_2$, 故 $L\cup K_2\supset H\cup(S\cap\overline{B}_\varepsilon(x_1, \cdots, x_m))$). 从而, 由 (6.6) 有

$$S=\overline{\operatorname{co}}(L\cup K_2).$$

由于 $\{x; x\in S, y^*(x)>\beta\}$ 在 S' 中稠, 且 $\operatorname{co}(L\cup K_2)$ 在 S 中稠, 故 $S'\cap\operatorname{co}(L\cup K_2)$ 在 S' 中稠. (事实上, 任取 $y\in S'$, 若 $y^*(y)>\beta$, 则可选 $z\in\operatorname{co}(L\cup K_2)$, 使 $\|z-y\|<\eta$, 其中 η 为任意小的正数, 且 $y^*(z)>\beta$, 从而 $z\in S'\cap\operatorname{co}(L\cup K_2)$. 这表明此时 y 可以用 $S'\cap\operatorname{co}(L\cup K_2)$ 中元任意逼近. 若 $y^*(y)=\beta$, 则选 $h\in S$, 使 $y^*(h)>\beta$, 且 $[y, h)\subset\{x; x\in S, y^*(x)>\beta\}$, 从而对任意小的正数 η, 存在 $z\in\{x; x\in S, y^*(x)>\beta\}$, 且 $\|y-z\|<\frac{\eta}{2}$. 由刚才讨论知, 对这个 z, 存在 $v\in S'\cap\operatorname{co}(L\cup K_2)$, 使 $\|z-v\|<\frac{\eta}{2}$, 故 $\|y-v\|<\eta$, 这表明此时 y 也可以用 $S'\cap\operatorname{co}(L\cup K_2)$ 中任意元逼近. 总之 $S'\cap\operatorname{co}(L\cup K_2)$ 在 S' 中稠.)

任取 h_1、$h_2\in\operatorname{co}(L\cup K_2)\cap S'$, 由于 L, K_2 是凸集, 故

$$h_i=\lambda_i u_i+(1-\lambda_i)v_i,$$

其中 $u_i\in L$, $v_i\in K_2$, $0\leqslant\lambda_i\leqslant1$, $i=1, 2$. 所以,

$$\begin{aligned}\beta\leqslant y^*(\lambda_i u_i+(1-\lambda_i)v_i)&\leqslant\lambda_i M+(1-\lambda_i)a\\&=\lambda_i(M-a)+a.\end{aligned}$$

因此， $\lambda_i \geqslant \dfrac{\beta-\alpha}{M-\alpha} > 1-\dfrac{\delta}{12}$， 即 $(1-\lambda_i) < \dfrac{\delta}{12}$, $i=1, 2$.

并且, $u_i \in \overline{B}_\varepsilon(x_1)$, $\|u_i\| \leqslant 1$, $\|v_i\| \leqslant 1$, $i=1, 2$. 从而

$$
\begin{aligned}
&\|\lambda_1 u_1 + (1-\lambda_1) v_1 - (\lambda_2 u_2 + (1-\lambda_2) v_2)\| \\
&\leqslant \|\lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2\| + \sum_{i=1}^{2} \|(1-\lambda_i) v_i\| \\
&\leqslant \|u_1 - (1-\lambda_1) u_1 - (u_2 - (1-\lambda_2) u_2)\| + \frac{\delta}{12} + \frac{\delta}{12} \\
&\leqslant \|u_1 - u_2\| + \sum_{i=1}^{2} \|(1-\lambda_i) u_i\| + \frac{\delta}{6} \\
&\leqslant 2\varepsilon + \frac{\delta}{3} = \delta.
\end{aligned}
$$

这表明 $\mathrm{diam}(\mathrm{co}(L \cup K_2) \cap S') = \mathrm{diam}(S') \leqslant \delta$. 这就证明了 S' 的直径小于等于 δ.

由 δ 的选法知, S' 不是 C 的切片.

令 $r = \sup y^*(C) \geqslant \sup y^*(S) = M > \beta$. 因此,

$$
\begin{aligned}
S' &= \{x \in S,\ y^*(x) \geqslant \beta\} \subset \{x \in C;\ y^*(x) \geqslant \beta\} \\
&= S(y^*,\ r-\beta,\ C\}.
\end{aligned}
$$

故存在 $z \in S(y^*, r-\beta, C) \backslash S'$. 所以 $z \notin S$, 于是 $x^*(z) < \alpha$.

任取 $b \in S'$, 由于 $S' \cap K_1 = \emptyset$, $S' \subset S$, 及 $H \subset K_1$, 故 $b \notin H$, 所以 $x^*(b) \neq \alpha$, 但 $b \in S' \subset S$, 又有 $x^*(b) \geqslant \alpha$, 所以 $x^*(b) > \alpha$. 从而存在 $0 < \lambda < 1$, 使

$$
x^*(\lambda z + (1-\lambda) b) = \alpha, \text{ i. e } \lambda z + (1-\lambda) b \in H.
$$

另一方面, 又由于 $b \in S'$, 故 $y^*(b) \geqslant \beta$, 并且, 由 z 的选取知, $y^*(z) \geqslant \beta$, 故

$$
y^*(\lambda z + (1-\lambda) b) \geqslant \beta.
$$

于是 $\lambda z + (1-\lambda) b \in S'$, 这样就得到

$$
\lambda z + (1-\lambda) b \in S' \cap H \subset S' \cap K_1,
$$

这表明 $S' \cap K_1 \neq \emptyset$, 这是不可能的. 所以 S 不能有有限 ε 网. □

②⇒③ 若 ③ 不成立，则对一切 $\varepsilon>0$，存在 $\{x_1, \cdots, x_n\}\subset C$，使

$$\mathrm{co}(C\setminus \overline{B}_\varepsilon(x_1, \cdots, x_n))\subsetneqq C.$$

因此，存在 $x^*\in S(X^*)$，使

$$\sup x^*(C)\geqslant\alpha>\sup\{C\setminus \overline{B}_\varepsilon(x_1, \cdots, x_n)\},$$

于是 $$S(x^*, \sup x^*(C)-\alpha, C)\subset \overline{B}_\varepsilon(x_1, \cdots, x_n),$$

i. e $S(x^*, \sup x^*(C)-\alpha, C)$ 具有有限 ε 网. 这表明，此时 ② 也不成立. □

③⇒① 证明是容易的. □

注：这个定理的许多结果在下面有关 RNP 定理的证明中将反复应用.

§3 Radon-Nikodym 性质 (RNP)

(一) RNP 的定义.

定义 6.3.1 一个 Banach 空间 X 称为关于 (Ω, Σ, μ) 具有 Radon-Nikodym 性质，其中 (Ω, Σ, μ) 是有限完备非负的测度空间，如果对每个有界变差、μ 连续的向量测度 $m: \Sigma\to X$，存在 $f\in L_1(\mu, X)$，使得对一切 $E\in\Sigma$，有

$$m(E)=\int_E f d\mu.$$

一个 Banach 空间 X 称为具有 Radon-Nikodym 性质的空间 (RNP)，如果 X 关于每个有限完备非负测度空间 (Ω, Σ, μ) 具 Radon-Nikodym 性质.

我们看到，这是纯量测度的 Radon-Nikodym 定理的一种推广.

有关 RNP 的研究早在 1933 年就开始了. 当时，Bochner 引入了 Bochner 积分. 并且，考虑将实变函数（或抽象测度论）中 Radon-Nikodym 定理推广到向量测度情况. 但是 Bochner

发现,这并不总是可以的,例如对 $L_\infty[0, 1]$ 空间,相应的 Radon-Nikodym 定理就不成立. 那么,对什么样的 Banach 空间,Radon-Nikodym 定理仍然成立呢? 1935 年 Birkhoff 证明了,Hilbert 空间具 RNP. 1936 年 J. Clarkson 从 Banach 空间单位球的几何结构着手,研究这个问题,他引入了一致凸空间的概念,并且证明了,一致凸空间具有 RNP. 这就是最早建立的 Banach 空间的几何性质和分析性质的联系. 1936 年,M. Dunford 和 M. Morse 证明了,具有有界完备基的 Banach 空间具 RNP. 随后,在 1938 年苏联数学家 Гельфунд 又证明了,自反空间具 RNP.

在这以后,一方面,一部分数学家,例如,Grothendieck,对算子理论进行研究,得到许多与 RNP 有关的算子表示方面的深入结果. Grothendiek 引入了一些算子类,研究了有限秩算子逼近问题 (AP 等) 以及利用某些算子类来刻划 Banach 空间的结构,取得了卓越的成果.

另一方面,另一部分数学家,讨论了 Banach 空间的各种凸性、光滑性及范数的可微性,他们从单位球的几何形状出发来讨论 Banach 空间的性质.

一直到 1966 年,M. A. Rieffel 发现,上述两部分数学家所考虑的问题之间有内在联系. 他引入了可凹集的概念,重新建立了 Banach 空间几何理论与 RNP 之间的联系,将 Banach 空间理论的研究推到了一个新的阶段,取得了大量的成果.

目前,RNP 研究基本上有三个方面: RNP 的分析方向研究; RNP 的算子方向研究; RNP 的几何方向研究. 我们将主要讨论第三个方面的问题. 如下三个问题是我们所关心的:

(1) RNP 的充要条件.

(2) 哪些 Banach 空间具有 RNP.

(3) 具 RNP 的 Banach 空间有一些什么性质.

(二)RNP 研究的一些主要结果.

首先,我们列举一些主要结果, 在 §4 中将证明其中的一部分.

(I) X 具 RNP 的充要条件:

(1) X 的每个闭线性子空间具 RNP(定理 6.4.6).

(2) X 的每个可分闭子空间具 RNP(定理 6.4.6).

(3) X 的每个有界集是可凹的(定理 6.4.1).

(4) X 的每个有界闭凸子集是可凹的(定理 6.4.5).

(5) X 的每个有界子集是 σ 可凹的(定理 6.4.1).

(6) 对 X 上的每个等价范数 $|||\cdot|||$, 单位球 $U(X, |||\cdot|||)$ 是可凹的(定理 6.4.5).

(7) X 的每个非空有界闭凸集是它强暴露点的范数闭凸包(定理 6.4.9).

(8) X 的每个非空有界闭凸集有一个强暴露点 (推论 6.4.13).

(9) 对 X 的每个非空有界闭凸集 K, X^* 中强暴露 K 的某个点的元在 X^* 中是范稠的(定理 6.4.9).

(10) 对 X 的每个非空有界闭凸集 K, K 有直径充分小的切片(定理 6.2.2(13) 和定理 6.4.1).

(11) 对 X 的每个非空有界闭凸集 K, 存在 $x^*\in X^*\setminus\{0\}$, 和 $x_0\in K$, 使

$$x^*(x_0)=\sup x^*(K)$$

(定理 6.4.14).

(12) 对 X 的每个非空有界闭凸集 K, 集

$\{x^*; x^*\in X^*$, 存在 $x_0\in K$, 使 $x^*(x_0)=\sup x^*(K)\}$ 在 X^* 中稠(定理 6.4.14).

(13) X 的每个非空有界闭子集包含它的闭凸包的一个端点(定理 6.4.14).

(14) X 的每个非空有界闭集包含它的凸包的一个端点(定理 6.4.14).

注：这一性质叫做强 Krien-Milman 性质(SKMP).

(15) 对 $[0, 1)$ 的 Borel 集组成的 σ 代数上 Lebesgue 测度 μ, X 具 RNP (推论 6.4.2).

(16) X 不含加权树 (定义见下面定义 6.3.2, 证明见 A. Ho, *Israel J. Math*. vol. 32 *no*. 1(1979)59–66).

(17) X 具 BPP (定义 3.1.5, 证明见 J. Bourgain, *Israel J. Math*. vol. 28 *no*. 4(1977)265–271).

(18) X^* 是 w^* Asplund 空间(定义 7.2.3, 证明见 Pacific, *J. Math*. vol. 64*no*. 1(1976)103–106).

(19) X 是 Гельфунд 空间(定义见下面定义 6.3.4, 证明见参考书 [5]107 页).

(20) 每个有界变差函数 $f: [0, 1] \to X$ 是 a. e Fréchet 可微的(证明见参考书 [5]p. 107).

定义 6.3.2 Banach 空间 X 的一个子集 T 称为一个无限树, 如果下列成立:

(T. 1) $T=\{x_n^i;\ 1\leqslant i\leqslant 2^{n-1},\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$, 其中

$$x_n^i=\frac{1}{2}(x_{n+1}^{2i-1}+x_{n+1}^{2i}).$$

若 T 同时满足:

(T. 2) $\|x_n^i\|\leqslant K$, $1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$, $n=1,\ 2,\ \cdots$, 则称 T 为有界无限树. 又 T 还满足:

(T. 3) 存在分离常数 $\varepsilon=2\delta$, 即 $\|x_{n+1}^{2i-1}-x_{n+1}^{2i}\|>\varepsilon=2\delta$, 则 T 称为有界无限 δ 树.

Banach 空间 X 的一个子集 T 称为加权树, 如果

$$T=\{x_n^i;\ 1\leqslant i\leqslant 2^{n-1},\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$$

满足下列条件: 存在一个序列 $\{t_n^i; 1\leqslant i\leqslant 2^{n-1},\ i=1,\ 2,\ \cdots\}$, 其中 $0\leqslant t_n^i\leqslant\frac{1}{2}$,

(T. 2) $\|x_n^i\|\leqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$, $n=1,\ 2,\ \cdots$,

(wT. 1) $x^i=(1-t_n^i)x_{n+1}^{2i-1}+t_n^i x_{n+1}^{2i}$, $1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$, $n=1, 2, \cdots$,

(T. 3) 存在分离常数 $\varepsilon>0$, 即 $\|x_{n+1}^{2i-1}-x_{n+1}^{2i}\|>\varepsilon$, $1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$, $n=1, 2, \cdots$,

并且,如果 $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\{t_n^i\}$ 的一个子集, 使相应的点构成一个最终左转枝, 则 $\sum\limits_{n=1}^\infty t_n=+\infty$, 其中树的一个枝定义为一个序列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, 使得每个 u_n 是某个 x_m^i, 且若 $u_n=x_m^i$, 则 $u_{n+1}=x_{m+1}^{2i-1}$ 或 x_{m+1}^{2i}, 树的一个最终左转枝指的是一个枝 $\{u_n\}$, 对它,存在一个正整数 K, 使得当 $n\geqslant K$ 时,若 x_n^i 在这个枝中, 即 $x_n^i=u_m$, 对某个 m, 则 $u_{m+1}=x_{n+1}^{2i-1}$.

定义 6.3.3 一个函数 f: $[0, 1]\to X$ 称为绝对连续的,如果对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\{(a_n, b_n)\}$ 是 $[0, 1]$ 中不相交区间序列, 且 $\sum\limits_n(b_n-a_n)<\delta$ 时,有

$$\sum_n\|f(a_n)-f(b_n)\|<\varepsilon.$$

(我们看到,这与实变函数中的绝对连续函数定义是类似的. 容易理解 $[0, 1]\to X$ 的有界变差函数定义,可用类似方法给出.)

定义 6.3.4 Banach 空间 X 称为 Гельфунд 空间,如果每个绝对连续函数 f: $[0, 1]\to X$ 是 a. e Fréchet 可微的.

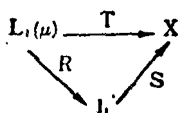
下面叙述 RNP 与算子有关的充要条件.

(21) 对一切有限完备非负测度空间(Ω, Σ, μ), 每个有界线性算子 T: $L_1(\mu)\to X$ 是可表示的. 即, 存在本性有界的可积函数 g: $\Omega\to X$, 使对一切 $f\in L_1(\mu)$, 有

$$T(f)=\int_\Omega fg\,d\mu,$$

(证明见参考书 [5]63 页).

(22) 对一切有限完备非负测度空间 (Ω, Σ, μ), 每个有界线性算子 T: $L_1(\mu)\to X$ 可以因子分解通过 l_1 空间, 即 $T=S\circ R$,



其中 R、S 是适当的有界线性算子(证明见参考书 [5] 66 页).

(23) 从 $C[0, 1]$ 到 X 的绝对可和算子类、可积算子类与核算子类重合(证明见参考书 [1] p. 174).

定义 6.3.5 一个有界线性算子 T: $X \to Y$ 称为绝对可和算子, 如果对 X 中任一无条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$ 是绝对收敛的.

定义 6.3.6 一个有界线性算子 T: $X \to Y$ 称为可积算子(Pietsch 意义下), 如果存在定义在紧 Hausdorff 空间 $(U(X^*), \mathrm{w}^*) \times (U(Y^{**}), \mathrm{w}^*)$ 上的正则 Borel 测度 μ, 使对一切 $y^* \in Y^*$, $x \in X$, 有

$$y^*(Tx) = \int_{U(X^*)\times U(Y^{**})} x^*(y) y^{**}(T^* y^*) d\mu(x^*, y^{**}).$$

定义 6.3.7 一个有界线性算子 T: $X \to Y$ 称为核算子, 如果存在 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$, 满足条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \cdot \|y_n\| < +\infty,$$

使对一切 $x \in X$,

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) y_n.$$

下面叙述 RNP 与向量值的鞅有关的充要条件.

定义 6.3.8 若 (Ω, Σ, μ) 是有限完备非负测度空间, Σ_1 是 Σ 的 σ 子代数, $x(\omega) \in L_1(\mu, X)$, $x(\omega)$ 关于 Σ_1 的条件期望是一个函数 $y \in L_1(\mu, X)$, 使得 y 是 Σ_1 可测的, 并且对任何 $E \in \Sigma_1$, 有

$$\int_E y\, d\mu = \int_E x\, d\mu,$$

此时记 $y=E(x, \Sigma_1)$.

定义 6.3.9 若 $\{\Sigma_\alpha, \alpha\in D\}$ 是 Σ 的一个单调增加的 σ 子代数的定向列, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是 $L_1(\mu, X)$ 的元的一个定向列, 如果当 $\alpha<\beta$ 时, $E(x_\beta, \Sigma_\alpha)=x_\alpha$, 则 $\{x_\alpha, \Sigma_\alpha\}$ 称为一个 X 值的鞅.

一个 X 值的鞅 $\{x_\alpha, \Sigma_\alpha\}$ 称为一致有界的, 如果存在 $K>0$, 使对一切 α, $\omega\in\Omega$, 有

$$\|x_\alpha(\omega)\|\leqslant K.$$

如果存在一个 $K>0$, 使

$$\|x_\alpha(\omega)\|_{L_1(\mu, X)}\leqslant K,$$

则称 $\{x_\alpha, \Sigma_\alpha\}$ 为有界鞅.

如果有
$$\lim_{\mu(E)\to 0}\int_E\|x_\alpha(\omega)\|d\mu=0,$$
对 α 一致地成立, 则 $\{x_\alpha, \Sigma_\alpha\}$ 称为一致可积鞅.

(24) 每个一致有界 X 值鞅 $\{x_\alpha, \Sigma_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是在 $L_1(\mu, X)$ 范数下收敛的(参考书 [1]p. 272).

(25) 每个一致有界 X 值鞅 $\{x_n, \Sigma_n\}_{n\in N}$ (N 是自然数集) 是在 $L_1(\mu, X)$ 范数下收敛的(证明见参考书 [1]p. 272).

(26) 每个一致可积、有界 X 值鞅 $\{x_\alpha, \Sigma_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是在 $L_1(\mu, X)$ 范数下收敛的(证明见参考书[1]p. 272).

(II) X^* 见 RNP 的充要条件.

(1) X^* 具 KMP(定理 6.4.22).

(2) X 的每个可分子空间有可分的共轭(定理 6.4.22).

(3) X^* 的每个可分子空间线性同胚于可分共轭空间的子空间(推论 6.4.27).

(4) X^* 不含有界无限 δ 树(证明见参考书 [5]p. 195).

(5) X 是 Asplund 空间(定义见定义 7.2.1, 定理 7.2.7).

(6) 对某个 p, $1<p<+\infty$, $L_p(\mu, X^*)$ 具 RNP (证明见参考书[5], p. 198).

(7) 对每个 p, $1<p<+\infty$, $L_p(\mu, X^*)$ 具 RNP(证明见参

考书[5], p. 198).

(III) 下列空间具 RNP.

(1) Hilbert 空间(定理 6.4.32).

(2) 自反空间(定理 6.4.32).

(3) 亚自反空间(见参考书 [5] p. 219).

(4) 具有界完备基的 Banach 空间(定理 6.4.33).

(5) 对任何 Γ, $l_1(\Gamma)$(定理 6.4.34).

(6) 当 X_α 具 RNP 时, $(\Sigma \oplus X_\alpha)_p$, $1<p<+\infty$ (见参考书 [5] p. 218).

(7) 当 X 具 RNP 时, $L_p(\mu, X)$, $1<p<+\infty$ (见参考书 [5] p. 218).

(IV) 下列共轭空间具 RNP.

(1) X^* 是可分共空间(则 X^* 具 RNP)(定理 6.4.22).

(2) X^* 是 WCG 空间 (则 X^* 具 RNP) (见参考书 [5] p. 219).

(3) X 是非常光滑的(则 X^* 具 RNP)(定理 6.4.35).

(4) Y 是 WCG 共轭空间的子空间, 则 Y 具 RNP(参考书 [5] p. 219).

(V) 下列空间不具 RNP.

(1) c_0, c, l_∞, $L_\infty[0, 1]$(定理 6.4.36).

(2) $L_1[0, 1]$(定理 6.4.36).

(3) $C[0, 1]$(定理 6.4.36).

(4) $C(\Omega)$, 其中 Ω 是紧 Hausaorff 空间(见参考书 [5] p. 219).

(5) $L_1(\mu)$, μ 不含原子(见参考书 [5] p. 219).

(6) X 含有界无限 δ 树(参考书 [5], p. 127).

(VI) RNP 空间所具有的性质.

(1) RNP 在线性同胚之下是不变的(定理 6.4.7).

(2) 若 X 是 w 序列完备的, 且 X^* 具 RNP, 则 X 是自反

的(推论 6.4.29).

(3) 若 X^* 具 RNP, 则 X 的每个有界序列含 w Cauchy 子序列(推论 6.4.28).

(4) 若 X^* 具 RNP, Y 是 X 的商空间, 则 Y^* 具 RNP (推论 6.4.30).

(5) 若 Y 是 X 的闭子空间, 且 Y^*, $(X/Y)^*$ 具 RNP, 则 X^* 具 RNP(见参考书 [5] p. 210).

(6) 若 Y 是 X 的闭子空间, 且 X/Y, Y 具 RNP, 则 X 具 RNP (见参考书 [5] p. 211).

(7) 若 X 是严格凸 Banach 空间, 则 X 具 RNP, 当且仅当 $L_1[0, 1]$ 到 X 的全体有界线性算子组成的 Banach 空间 $B(L_1[0, 1], X)$ (以算子范数为范数) 中达到范数算子在 $B(L_1[0, 1], X)$ 中范稠 (见 J. J. Uhl. Jr., *Pacific J. Math*. vol. 63. *no*. 1. (1976) 292–300).

(8) 若 X 是可分的 Banach 空间, 则

X^* 具 RNP $\Leftrightarrow$ X^* 是可分的 (定理 7.2.5).

(9) 若 X^* 具 RNP, 则 X 不含子空间线性同胚于 l_1 (见参考书 [5] p. 215).

(10) RNP $\Rightarrow$ KMP(定理 6.4.8).

(三) 一些新进展.

(1) 已知, 若 X 具 RNP, 则 X 不含有界无限 δ 树.

J. Bourgain & H. P. Rosenthal 举出反例说明其逆不真 (J. Bourgain & H. P. Rosenthal, Israel J. Math. **37** (1980) 54–75).

(2) J. Hager 举例说明 Schur 空间 $\not\Rightarrow$ RNP 空间 (J. Hager, *Studia Math*. 60(1977) *no*. **3**, 289–308).

(3) J. J. Uhl 和 J. Diestel 问: 已知

X^* 具 RNP $\Leftrightarrow$ X 的每个可分子空间有可分共轭,

那么 X 具 RNP, 并且 X 是可分的 $\not\Rightarrow$ X 线性同胚于某个可分

共轭空间的子空间. P. W. Wecarthey & R. C. Obrien 举出反例，予以否定回答(P. W. Wecarthey & R. C. Obrien, *Proc. A. M. S.* 78(1980)40–42).

(4) J. Bourgain 证明 X 具 RNP $\Leftrightarrow$ X 的每个 w 闭有界集含有它的凸包的端点 (J. Bourgain, *Compositio Math.* 36 (1978)*no.* 1, 3–6).

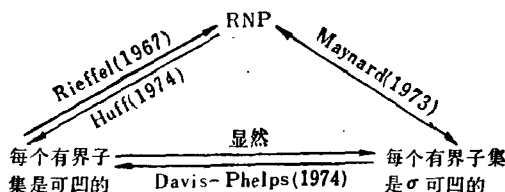
(5) 已知 X^*WCG $\Rightarrow$ X^* 具 RNP. 但 G. A. Edgar 给出例子表明 X^{**} 具 RNP $\nRightarrow$ X^{**} 是 WCG. 并且 G. A. Edgar 在同一文章中指出 X^* 具 RNP $\nRightarrow$ X^* 中存在等价共轭范数是 w LUC 的(*Lecture Notes* 794# (1980) *Springer-Verlag* 31–37).

(6) J. Bourgain 证明 X 具 RNP $\Leftrightarrow$ X 的每个具有限维 Schauder 分解的子空间具 RNP(J. Bourgain, *Studia Math. T. LXVII* (1980) 135–147). 但 X 具 RNP 是否当且仅当 X 的每个具基的子空间具 RNP 的问题仍是尚未解决的一个问题.

R. C. James 认为目前有关 RNP 的一个重要的尚未解决的问题是 X 具 KNP $\Rightarrow$ X 具 RNP.

(四)RNP 讨论中的一些方法.

(1) 三个等价条件的证明.



Riffel, Huff, Maynard 利用向量测度关于测度 μ 在 $E\in\Sigma$ 上的平均值概念来证明.

Davis-Phelps 利用凸集的拓扑性质进行证明.

(2) RNP 的一个古典结果是 Dunford-Pettis 定理: X^* 可分 $\Rightarrow$ X^* 具 RNP. 现在, 利用当 X^* 可分时, X^* 中 w* 紧凸集

的性质给予证明.

(3) Lindenstrauss 将自己关于 l_1 具 KMP 的证明方法证明 RNP $\Rightarrow$ KMP.

(4) Huff-Morise-Stegall 利用 Haar 组方法证明:

$$X^* \text{ 具 RNP} \Leftrightarrow X^* \text{ 具 KMP}.$$

(5) Phelps-Namiko 利用切片方法讨论 RNP 与集合的强暴露点之间关系，也讨论了 RNP 与 Asplund 空间的关系.

(6) Chatterji 和 Metivier 用鞅来讨论 RNP 的特征.

§4 RNP 的若干定理的证明

定理 6.4.1 对 Banach 空间 X，下列条件是等价的:

(1) X 具 RNP.

(2) X 的每个有界子集是可凹的.

(3) X 的每个有界子集是 σ 可凹的.

证明: (1)$\Rightarrow$(2) 假设 X 有一个有界子集 A，使 A 是不可凹的. 由可凹集定义知，存在 $\varepsilon>0$，对一切 $x\in A$，有

$$x\in\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_\varepsilon(x)).$$

令 $\Omega=[0, 1)$，Σ 是 $[0, 1)$ 的一切 Borel 子集组成的 σ 代数，μ 表示 Σ 上通常 Lebesgue 测度.

下面将构造一个有界变差、μ 连续的向量测度 $m: \Sigma\to X$，使 m 关于 μ 设有 RN 导数.

首先，归纳定义 $[0, 1)$ 的一个分割的序列 $\{\pi_n=\{I_1^n, \cdots, I_{p_n}^n\}$; 其中 I_i^n 为两两不相交的半开区间，使得

$$[0, 1)=\bigcup_{i=1}^{p_n}\{I_i^n\}_{n=1}^{\infty}.$$

定义一个简单函数序列 $\{f_n: \Omega\to A;\ n=1, 2, \cdots\}$如下:

$$f_n(t)=\sum_{i=1}^{p_n}x_i^n\chi_{I_i^n}(t),$$

其中 $$x_i^n\in A,\ 1\leqslant i\leqslant p_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$
使得 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足:

① π_{n+1} 是 π_n 的加细, $n=1, 2, \cdots$.

② Σ 是包含 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\pi_n$ 的最小 σ 代数.

③ $\|f_n(t)-f_{n+1}(t)\|\geqslant\varepsilon,\ n=1, 2, \cdots,\ t\in[0, 1)$.

④ $\left\|\int_{I_i^n}(f_n-f_{n+1})d\mu\right\|<\frac{1}{2^n}\mu(I_i^n),\ n,\ k=0, 1, 2, \cdots,$ $i=1, 2, \cdots, p_n$.

⑤ $m(E)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu$ 存在,对每个 $E\in\Sigma$.

我们先假设这样的序列存在,导致矛盾!然后说明这样的序列在 A 不是可凹集情况下确实是可以构造的.

设 $M=\sup\{\|x\|;\ x\in A\}$, 我们有

$$\|m(E)\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\int_E f_n(t)dt\right\|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E\|f_n(t)\|dt\leqslant M\mu(E),$$

所以,

$$|m|(E)=\sup_{\pi}\sum_{E_i\in\pi}\|mE_i\|\leqslant M\sup_{\pi}\sum_{E_i\in\pi}\mu(E_i)=M\mu(E),$$

其中 π 是 E 的任何分割. 从而 m 是有界变差的,且若 $\mu(E)=0$, 则 $m(E)=0$, 故 m 还是 μ 连续的.

由于 $m_{f_n}(E)=\int_E f_n d\mu,\ \forall E\in\Sigma$, 定义了一个向量测度, 因此, 根据 Dunford & Schwatz, Linear operator I 第 IV 章 § 10 定理 6 知, $m(E)=\lim\limits_{n}\int_E f_n d\mu,\ \forall E\in\Sigma$, 也定义了一个向量测度. 这就是说 m 是有界变差、μ 连续的向量测度, 由于 X 具 RNP, 根据 RNP 定义知, 存在 $f\in L_1(\mu, X)$, 使对一切 $E\in\Sigma$, 有

$$m(E)=\int_E f\,d\mu.$$

对每个 n, 令

$$g_n(t)=\sum_{i=1}^{p_n}\left(\frac{1}{\mu(I_i^n)}\int_{I_i^n} f\,d\mu\right)\chi_{I_i^n}=\sum_{i=1}^{p_n}\frac{m(I_i^n)}{\mu(I_i^n)}\chi_{I_i^n},$$

则 $g_n(t)\in L_1(\mu, X)$，且 g_n 是简单函数.

我们有

$$\int_\Omega\|g_n(t)-f(t)\|d\mu=\|g_n-f\|_{L_1(\mu,X)}\to 0. \tag{6.7}$$

事实上，令 U_{π_n}: $L_1(\mu, X)\to L_1(\mu, X)$，

$$U_{\pi_n}h=h_{\pi_n}\equiv\sum_{E\in\pi_n}\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E h\,d\mu\right)\chi_E,\quad \forall h\in L_1(\mu, X),$$

则

$$\|U_{\pi_n}h\|_1=\int_\Omega\|h_{\pi_n}\|d\mu=\sum_{E\in\pi_n}\left\|\int_E h\,d\mu\right\|$$

$$\leqslant\sum_{E\in\pi_n}\int_E\|h\|\,d\mu=\int_\Omega\|h\|\,d\mu=\|h\|_{L_1(\mu,X)}.$$

因此，$\|U_{\pi_n}\|\leqslant 1$，且 $U_{\pi_n}f=g_n$.

由于 Σ 是包含 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\pi_n$ 的最小 σ 代数，故形如下式的简单函数：

$$h=\sum_{i=1}^{k}b_i\chi_{E_i},\quad E_i\in\bigcup_{n=0}^{\infty}\pi_n,\quad b_i\in X,$$

在 $L_1(\mu, X)$ 中是范稠的.

对任何 $\varepsilon>0$，选 h 如上形式，使 $\|h-f\|_{L_1(\mu,X)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 不妨设 $h=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\chi_{E_i}$，其中 $E_i\in\pi_{n_0}$，则当 $n>n_0$ 时，有 $U_{\pi_n}=h$，因此（记 $\|\cdot\|_{L_1(\mu,X)}$ 为 $\|\cdot\|_1$），

$$\|f-g_n\|_1\leqslant\|f-h\|_1+\|h-g_n\|_1$$

$$=\|f-h\|_1+\|U_{\pi_n}h-U_{\pi_n}f\|_1$$

$$\leqslant 2\|f-h\|_1<\varepsilon.$$

从而 $\|f-g_n\|_1\to 0$，即(6.7)式成立.

由于 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L_1(\mu, X)$ 中的一个 Cauchy 列，又

$$\|f_n-g_n\|=\int_\Omega\|f_n-g_n\|\,d\mu=\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^{p_n}x_i^n\chi_{I_i^n}-\sum_{i=1}^{p_n}\frac{m(I_i^n)}{\mu(I_i^n)}\chi_{I_i^n}\right\|d\mu$$

$$=\sum_{i=1}^{p_n}\int_{I_i^n}\left\|x_i^n-\frac{m(I_i^n)}{\mu(I_i^n)}\right\|d\mu=\sum_{i=1}^{p_n}\|x_i^n\mu(I_i^n)-m(I_i^n)\|$$

$$\xlongequal{\text{由(5)}}\sum_{i=1}^{p_n}\left\|x_i^n\mu(I_i^n)-\lim_{k\to\infty}\int_{I_i^n}f_{n+k}(t)\,d\mu\right\|$$

$$=\sum_{i=1}^{p_n}\left\|\int_{I_i^n}f_n(t)\,d\mu-\lim_{k\to\infty}\int_{I_i^n}f_{n+k}(t)\,d\mu\right\|$$

$$=\sum_{i=1}^{p_n}\lim_{k\to\infty}\left\|\int_{I_i^n}(f_n(t)-f_{n+k}(t))\,d\mu\right\|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{p_n}\frac{1}{2^n}\mu(I_i^n)=\frac{1}{2^n}.$$

故

$$\|f_n-f_{n+k}\|_1\leqslant\|f_n-g_n\|_1+\|g_n-g_{n+k}\|_1+\|g_{n+k}-f_{n+k}\|_1$$

$$\leqslant\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+k}}+\|g_n-g_{n+k}\|.$$

由此，即知 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 也是 $L_1(\mu,X)$ 中的 Cauchy 列.

但由(3)知，对一切 n,

$$\|f_n-f_{n+1}\|_1=\int_\Omega\|f_n(t)-f_{n+1}(t)\|\,d\mu\geqslant\varepsilon\mu(\Omega)=\varepsilon,$$

这是一个矛盾!

下面我们说明 $\{\pi_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在 A 不是可凹集情况下是可以具体构造出来的.

令 $\pi_0=\{[0,1)\}$, 选 $x_0^0\in A$. 令 $f_0(t)=x_0^0\chi_{[0,1)}(t)$.

因为 A 不是可凹集，由可凹集定义知，存在 $\varepsilon>0$, 使得当 $x\in A$ 时，有

$$x\in\overline{\mathrm{co}}(A\setminus B_\varepsilon(x)). \tag{6.8}$$

特别地，$x_0^0\in\overline{\mathrm{co}}(A\setminus B_\varepsilon(x_0^0))$ 故存在 $y_1=\sum_{j=1}^{p_1}\alpha_j^1x_j^1$, 使

$$\left\|x_0^0-\sum_{j=1}^{p_1}\alpha_j^1x_j^1\right\|<\frac{1}{2}.$$

其中 $x_j^1\in A$, 且 $\|x_j^1-v_0^0\|\geqslant\varepsilon$, $\alpha_j^1\geqslant 0$, $j=1, \cdots, p_1$, $\sum\limits_{j=1}^{p_1}\alpha_j^1=1$. 由于 y_1 的表达式中并不要求 x_j^1 各不相同, 故可假设 $\alpha_j^1<\frac{1}{2}(1\leqslant i\leqslant p_1)$.

令 $\pi_1=\{I_1^1, I_2^1, \cdots, I_{p_1}^1, \}$, 其中 I_j^1 为半开区间, 且 $\mu(I_j^1)=\alpha_j^1$, $j=1, \cdots, p_1$.

令
$$f_1(t)=\sum_{j=1}^{p_1}x_j^1\chi_{I_j^1}(t).$$

以下归纳地定义, 假设 $\pi_n=\{I_1^n, \cdots, I_{p_n}^n\}$ 和

$$f_n(t)=\sum_{i=1}^{p_n}x_i^n\chi_{I_i^n}(t)$$

已经定义好了. 再利用 (6.8) 式 (即 A 的非可凹性), 知道存在 $x_1^{(i,n)}, \cdots, x_{q_i}^{(i,n)}\in A$, $\alpha_1^{(i,n)}, \cdots, \alpha_{q_i}^{(\alpha,n)}\geqslant 0$ $\sum\limits_{j=1}^{q_i}\alpha_j^{(i,n)}=1$, $i=1, \cdots, p_n$, 使

$$\|x_j^{(i,n)}-x_i^n\|\geqslant\varepsilon,\ j=1\cdots, q_i,\ i=1, \cdots, p_n,$$

且对 $i=1, \cdots, p_n$, 有

$$\left\|x_i^n-\sum_{j=1}^{q_i}\alpha_j^{(i,n)}x_j^{(i,n)}\right\|<\frac{1}{2^{n+1}}.$$

同样, 可以假设 $\alpha_j^{(i,n)}<\frac{1}{n+1}$, $j=1, \cdots, q_i$, $i=1, \cdots, p_n$.

将 $I_i^n(i=1, \cdots, p_n)$ 分割成半开区间 $I_1^{(i,n)}, \cdots, I_{q_i}^{(i,n)}$, 使 $\mu(I_j^{(i,n)})=\alpha_j^{(i,n)}\mu(I_i^n)$, $j=1, \cdots, q_i$, $i=1, \cdots, p_n$. 令

$$\pi_{n+1}=\{I_j^{(i,n)};\ 1\leqslant i\leqslant p_n,\ 1\leqslant j\leqslant q_i\}$$

且
$$f_{n+1}(t)=\sum_{i=1}^{p_n}\sum_{j=1}^{q_i}x_j^{(i,n)}\chi_{I_j^{(i,n)}}(t).$$

这样就得到 $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, 下面验证它们满足所要求的五条性质.

① 从作法容易看到 π_{n+1} 是 π_n 的加细.

② 假设 Σ' 是由 $\bigcup_{n=0}^{\infty}\pi_n$ 所生成的 σ 代数.

由测度论基本知识，我们知道 Σ 是由 $\boldsymbol{P}=\{[a, b), 0\leqslant a<b<1\}$ 生成的 σ 代数. 因此，显然，$\Sigma'\subset\Sigma$.

又任取 $[a, b)\in\boldsymbol{P}$，根据 $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的作法知道，存在某个分割 π_N，使 $a\in I_{i_1}^N$，$b\in I_{i_2}^N$，$I_{i_1}^N\cap I_{i_2}^N=\emptyset$，故

$$[a, b)\subset\bigcup_{j=i_1}^{i_2}I_j^N\equiv[a_N, b_N),$$

且 $$0\leqslant a-a_N\leqslant\mu(I_{i_1}^N)<\frac{1}{N},\quad 0\leqslant b-b_N\leqslant\mu(I_{i_2}^N)<\frac{1}{N}.$$

对 π_{N+1}，有 $[a, b)\subset\bigcup_{j=i_1}^{i_2}I_j^{N+1}\equiv[a_{N+1}, b_{N+1})$，其中 $a\in I_{i_1}^{N+1}$，$b\in I_{i_2}^{N+1}$，且

$$0\leqslant a-a_N<\frac{1}{N+1},\quad 0\leqslant b-b_N<\frac{1}{N+1}.$$

显然，$[a_{N+1}, b_{N+1})\subset[a_N, b_N)$，用同样方式继续下去，得到一列 $\{[a_{N+k}, b_{N+k})\}_{k=1}^{\infty}$，具如下性质：

(A) $[a_{N+k+1}, b_{N+k+1})\subset[a_{N+k}, b_{N+k})$，$k=0, 1, 2, \cdots$.

(B) $[a, b)\subset[a_{N+k}, b_{N+k})$，$k=0, 1, 2, \cdots$.

(C) $0\leqslant a-a_{N+k}<\dfrac{1}{N+k+1}$，$0\leqslant b-b_{N+k}<\dfrac{1}{N+k+1}$，$k=0, 1, 2, \cdots$.

由此，得到 $[a, b)=\bigcap_{k=0}^{\infty}[a_{N+k}, b_{N+k})\in\Sigma'$，所以 $\boldsymbol{P}\subset\Sigma'$，从而 $\Sigma\subset\Sigma'$，故 $\Sigma=\Sigma'$. 因此②成立.

③ 我们有，对任何 $t\in[0, 1)$，

$$\|f_n(t)-f_{n+1}(t)\|=\left\|\sum_{i=1}^{p_n}x_i^n\chi_{I_i^n}(t)-\sum_{i=1}^{p_n}\sum_{j=1}^{q_i}x_j^{(i,n)}\chi_{I_j^{(i,n)}}(t)\right\|$$
$$\geqslant\inf_{i,j}\|x_i^{(n)}-x_j^{(i,n)}\|\geqslant\varepsilon.$$

④ 因为，对任何 n 及 $i=1, \cdots, p_n$，有

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_{I_i^n}(f_n(t)-f_{n+1}(t))d\mu\right\|=\left\|\int_{I_i^n}\Big(\sum_{j=1}^{p_n}x_j^n\chi_{I_j^n}(t)\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{j=1}^{p_n}\sum_{k=1}^{q_j}x_k^{(j,n)}\chi_{I_k^{(j,n)}}(t)\Big)d\mu\right\|\\
&=\left\|x_i^n\mu(I_i^n)-\int_{I_i^n}\sum_{j=1}^{q_i}x_j^{(i,n)}\chi_{I_j^{(i,n)}}(t)dt\right\|\\
&=\left\|x_i^n\mu(I_i^n)-\sum_{j=1}^{q_i}x_j^{(i,n)}\mu(I_j^{(i,n)})\right\|\\
&=\left\|x_i^n\mu(I_i^n)-\sum_{j=1}^{q_i}x_j^{(i,n)}\alpha_j^{(i,n)}\mu(I_i^n)\right\|\\
&=\mu(I_i^n)\left\|x_i^n-\sum_{j=1}^{q_i}\alpha_j^{(i,n)}x_j^{(n,i)}\right\|<\frac{1}{2^{n+1}}\mu(I_i^n).
\end{aligned}
$$

并且,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_{I_i^n}(f_{n+1}(t)-f_{n+2}(t))d\mu\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{q_i}\int_{I_j^{(i,n)}}(f_{n+1}(t)-f_{n+2}(t))d\mu\right\|\\
&\leqslant\sum_{j=1}^{q_i}\left\|\int_{I_j^{(i,n)}}(f_{n+1}(t)-f_{n+2}(t))d\mu\right\|\\
&\leqslant\sum_{j=1}^{q_i}\frac{1}{2^{n+2}}\mu(I_j^{(i,n)})<\frac{1}{2^{n+2}}\mu(I_i^n)
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_{I_i^n}(f_n(t)-f_{(n+k)}(t))d\mu\right\|\leqslant\sum_{m=0}^{k-1}\left\|\int_{I_i^n}(f_{n+m}(t)-f_{n+m+1}(t))d\mu\right\|\\
&<\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+k}}\right)\mu(I_i^{(n)})<\frac{1}{2^n}\mu(I_i^n).
\end{aligned}
$$

即 ④ 成立.

⑤ 为了证明 ⑤ 我们下面分四步进行.

(A) 设 Σ_1 是由 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\pi_n$ 生成的代数,则对一切 $E\in\Sigma_1$,有

$$
\lim_n\int_E f_n(t)d\mu\text{ 存在.}
$$

事实上,对任意 $E\in\Sigma_1$, 存在一个固定的分割 $\pi_{n(E)}$, 使

$$
E=\bigcup_{i\in L}I_i^{n(E)},
$$

其中 $L\subset\{1,\cdots,p_{n(E)}\}$, $I_i^{n(E)}\in\pi_{n(E)}$. 故当 $n>n(E)$ 时,

$$\left\|\int_E (f_n(t)-f_{n+k}(t))d\mu\right\| \leqslant \sum_{i\in L}\left\|\int_{I_i^{n(E)}} (f_n(t)-f_{n+k}(t))d\mu\right\|$$

$$\leqslant \sum_{i\in L}\frac{1}{2^n}\mu(I_i^{n(E)}) = \frac{1}{2^n}\mu(E),\ \forall k.$$

从而 $\int_E f_n(t)d\mu$ 是 X 中 Cauchy 列。因此，对每个 $E\in\Sigma_1$，$\lim\limits_n \int_E f_n(t)d\mu$ 存在.

(B) 设 $m_n(E)=\int_E f_n d\mu,\ \forall E\in\Sigma$. 则 m_n 是 Σ 上的向量测度. 下面证明 m_n 是一致可数可加的. 即若 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 Σ 中两两不相交的集列，则

$$\lim_{k\to\infty}\left(m_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)-\sum_{i=1}^{k}m_n(E_i)\right)=0$$

对 n 一致地成立.

事实上，令 $M=\sup\{\|x\|;\ x\in A\}$，对一切 $E\in\Sigma$，

$$\left\|\int_E f_n(t)d\mu\right\| \leqslant \int_E \|f_n(t)\| d\mu \leqslant M\cdot\mu(E). \tag{6.8}$$

又因为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)=\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\right)<+\infty$，故当 $k\to\infty$ 时，$\sum\limits_{i=k+1}^{\infty}\mu(E_i)\to 0$，因此，对任何 $\varepsilon>0$，存在 K，当 $k>K$ 时，有 $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty}\mu(E_i)<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

于是对一切 n，当 $k\geqslant K$ 时，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}m_n(E_i)-m_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right\|=\left\|\sum_{i=k+1}^{\infty}m_n(E_i)\right\|$$

$$\leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty}\|m_n(E_i)\| \overset{(6.8)}{\leqslant} \sum_{i=k+1}^{\infty}M\mu(E_i)\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

这表明 m_n 是一致可数可加的.

(C) 设 Σ_1 生成的 σ 代数为 $\tilde{\Sigma}$，由于 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\pi_n\subset\Sigma_1$，故 $\Sigma\subset\tilde{\Sigma}$. 另一方面，显然，$\Sigma_1\subset\Sigma$，故 $\tilde{\Sigma}\subset\Sigma$. 因此 Σ_1 生成的 σ 代数

就是 Σ.

(D) 根据向量测度的定理(见 Dunford & Schwatz, Linear operator I 第IV章引理 8.8)知道,对一切 $E\in\Sigma$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(t)dt$ 存在. 这表明 ⑤ 成立.

这样就完成了 (1)⇒(2) 的证明. □

(2)⇒(3)是显然的.

(3)⇒(1) 令 (Ω, Σ, μ) 是有限非负测度空间, $m: \Sigma\to X$ 是有界变差、μ 连续的向量测度.

下面分四步进行.

① 由于 $|m|(\Omega)$ 是有限的,故存在一个不相交的序列 $\{A_n\}\subset\Sigma$,使 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\Omega$, 且对固定的 n, 当 $A\in\Sigma$, $A\subset A_n$ 时, 有 $\dfrac{|m|(A)}{\mu(A)}$ 是有界的. (事实上, 由纯量 Radon-Nikodym 定理知, 存在 $|m|$ 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数 $\varphi\in L_1(\mu)$, 令 $A_n=\{\omega;\ n-1\leqslant\varphi(\omega)<n\}$, $n=1, 2, \cdots$. 故由 $\varphi\in L_1(\mu)$ 及 $|m|(\Omega)<+\infty$ 知,对 $N\equiv\{\omega; \varphi(\omega)=\infty\}$, $\mu(N)=0$. 且 $\Omega=\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup N$. 当 $A\subset A_n$ 时,

$$(n-1)\mu(A)\leqslant|m|(A)=\int_A\varphi\, d\mu\leqslant n\mu(A),$$

故 $n-1\leqslant\dfrac{|m|(A)}{\mu(A)}\leqslant n$(我们总考虑 $\mu(A)\neq0$ 情况).

② 下面证明,对每个 $\varepsilon>0$, $A\in\Sigma$, $\mu(A)>0$, 存在 $B\subset A$, $B\in\Sigma$, $\mu(B)>0$, 使 $\operatorname{diam}A_B(m)\leqslant\varepsilon$, 其中

$$A_B(m)=\left\{\frac{m(E)}{\mu(E)};\ E\subset B,\ \mu(A)>0\right\}.$$

事实上,由于 $\mu(A)>0$, 且 $\Omega=\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup N$, 故存在 n, 使 $\mu(A\cap A_n)>0$, 根据 A_n 的性质(见 ① 证明)知, $A_{A'}(m)$ 是有界

的，其中 $A'=A_n\cap A$. 由条件(3)知，$A_{A'}(m)$ 是 σ 可凹的. 因此由 σ 可凹的定义知，存在 $C\subset A'$, $\mu(C)>0$, 使得当 $E_n\subset C$, $\alpha_n\geqslant 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=1$, $n=1, 2, \cdots$, 且

$$\frac{m(C)}{\mu(C)}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\frac{m(E_n)}{\mu(E_n)}$$

时，至少有一个 n_0, 使得

$$\left\|\frac{m(E_{n_0})}{\mu(E_{n_0})}-\frac{m(C)}{\mu(C)}\right\|\leqslant\varepsilon.$$

此时，若 $\sup\left\{\left\|\frac{m(E)}{\mu(E)}-\frac{m(C)}{\mu(C)}\right\|;\ E\subset C\right\}\leqslant\varepsilon$, 则 $\operatorname{diam}A_C(m)\leqslant 2\varepsilon$, 即 C 就是所求的集 B. 否则令 j_1 是大于等于 2, 且在下述意义下最小的整数：存在 $C_1\subset C$, $\mu(C_1)\geqslant\frac{1}{j_1}$, 且

$$\left\|\frac{m(C_1)}{\mu(C_1)}-\frac{m(C)}{\mu(C)}\right\|>\varepsilon.$$

注意到，

$$\frac{m(C)}{\mu(C)}=\frac{m(C_1)}{\mu(C_1)}\cdot\frac{\mu(C_1)}{\mu(C)}+\frac{m(C\backslash C_1)}{\mu(C\backslash C_1)}\cdot\frac{\mu(C\backslash C_1)}{\mu(C)}$$
$$\in\operatorname{co}(A_{A'}(m)),$$

我们看到，若此时有

$$\sup\left\{\left\|\frac{m(E)}{\mu(E)}-\frac{m(C)}{\mu(C)}\right\|;\ E\subset C\backslash C_1\right\}\leqslant\varepsilon,$$

则 $\operatorname{diam}A_{C\backslash C_1}(m)\leqslant 2\varepsilon$, 这表明 $C\backslash C_1$ 就是所求的 B.

否则，令 j_2 是大于等于 j_1 的整数，且 j_2 是在下述意义下最小的整数：存在 $C_2\subset C\backslash C_1$, $\mu(C_2)\geqslant\frac{1}{j_2}$, 且

$$\left\|\frac{m(C_2)}{\mu(C_2)}-\frac{m(C)}{\mu(C)}\right\|>\varepsilon,$$

又注意到，

$$\frac{m(C)}{\mu(C)}=\frac{m(C_1)}{\mu(C_1)}\cdot\frac{\mu(C_1)}{\mu(C)}+\frac{m(C_2)}{\mu(C_2)}\cdot\frac{\mu(C_2)}{\mu(C)}$$
$$+\frac{m(C\setminus C_1\setminus C_2)}{\mu(C\setminus C_1\setminus C_2)}\cdot\frac{\mu(C\setminus C_1\setminus C_2)}{\mu(C)}$$
$$\in \mathrm{co}(A_{A'}(m)).$$

依上面方法继续下去，若对某个整数 k，有

$$\sup\left\{\left\|\frac{m(E)}{\mu(E)}-\frac{m(C)}{\mu(C)}\right\|;\ E\subset C\setminus C_1\setminus\cdots\setminus C_k\right\}\leqslant\varepsilon,$$

则令 $B=C\setminus C_1\setminus\cdots\setminus C_k$，$B$ 即所求的.

否则，得到 C 中两两不相交的子集的序列 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\mu(C_n)>0$，$\forall n$，和一个非减的正整数序列 $\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$，使

(A) $\left\|\frac{m(C_n)}{\mu(C_n)}-\frac{m(C)}{\mu(C)}\right\|>\varepsilon$，$\forall n$.

(B) 若 $E\subset C\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{l}C_n$，$E\in\Sigma$，且 $\left\|\frac{m(E)}{\mu(E)}-\frac{m(C)}{\mu(C)}\right\|>\varepsilon$，则 $\mu(E)<\frac{1}{j_l-1}$.

(C)
$$\frac{m(C)}{\mu(C)}=\sum_{n=1}^{l}\frac{m(C_n)}{\mu(C_n)}\cdot\frac{\mu(C_n)}{\mu(C)}$$
$$+\frac{m\left(C\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{l}C_n\right)}{\mu\left(C\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{l}C_n\right)}\cdot\frac{\mu\left(C\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{l}C_n\right)}{\mu(C)},\ \forall l.$$

由于 $\left\{\frac{m\left(C\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{l}C_n\right)}{\mu\left(C\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{l}C_n\right)};\ l=1,2,\cdots\right\}$ 是有界的，故

$$\lim_{l}\mu\left(C\setminus\bigcup_{n=1}^{l}C_n\right)=\mu\left(C\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n\right)\neq 0.$$

(事实上，否则

$$\frac{m(C)}{\mu(C)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(C_n)}{\mu(C_n)}\cdot\frac{\mu(C_n)}{\mu(C)},$$

又 $C_n\subset C$，且 $\left\|\frac{m(C_n)}{\mu(C_n)}-\frac{m(C)}{\mu(C)}\right\|>\varepsilon$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(C_n)}{\mu(C)}=1$，这与

$A_{A'}(m)$ 是 σ 可凹集矛盾!)

令 $B=C\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$, 则 $\mu(B)>0$, 且对一切 $E\subset B$, $\mu(E)>0$, 有

$$\left\|\frac{m(E)}{\mu(E)}-\frac{m(C)}{\mu(C)}\right\|\leqslant\varepsilon,$$

这表明 $\operatorname{diam}A_B(m)\leqslant\varepsilon$. (事实上, 若有 $E\subset B$, $\mu(E)>0$, $\left\|\frac{m(E)}{\mu(E)}-\frac{m(C)}{\mu(C)}\right\|>\varepsilon$, 则 $E\subset B=C\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n\subset C\setminus\bigcup_{n=1}^{l}C_n$, $\forall l$, 由(B)有对一切 l, $\mu(E)<\frac{1}{j_l-1}$. 但是, $\mu(C_l)>\frac{1}{j_l}$, 且 C_l 是两两不相交的, 所以, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{j_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(C_n)<+\infty$, 所以 $\lim_l\frac{1}{j_l-1}=0$, 因此, $\mu(E)\leqslant\lim_l\frac{1}{j_l-1}=0$, 矛盾!)

③ 我们将证明, 对固定 $\varepsilon>0$, 存在两两不相交的序列 $\{E_n(\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}\subset\Sigma$; $\mu(E_n(\varepsilon))>0, \forall n$; $\mu\left(\Omega\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n(\varepsilon)\right)=0$, 且对每个 n, $\operatorname{diam}A_{E_n(\varepsilon)}(m)<\varepsilon$.

事实上, 由 ②, 对固定 $\varepsilon>0$, 考虑集 Ω, 则存在一个在下述意义下最小的正整数 k_1, 使得存在 $E_1\in\Sigma$, $\mu(E_1)>\frac{1}{k_1}$, 且 $\operatorname{diam}A_{E_1}(m)\leqslant\varepsilon$.

考虑 $\Omega\setminus E_1$, 再应用 ②, 存在一个在下述意义下最小正整数 $k_2\geqslant k_1$, 使得存在 $E_2\in\Sigma$, $E_2\subset\Omega\setminus E_1$, $\mu(E_2)>\frac{1}{k_2}$, 且 $\operatorname{diam}A_{E_2}(m)\leqslant\Sigma$.

以这种方式继续下去, 得到一个非减正整数序列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, 和 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Sigma$, 使对每个 n, $E_n\subset\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}E_i$, $\mu(E_n)>\frac{1}{k_n}$, $\operatorname{diam}A_{E_n}(m)\leqslant\varepsilon$.

(若做到有限步时, 有 $\mu\left(\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}E_i\right)=0$, 就中止, 即得

所要的结论 ③.)

令 $B=\Omega\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 若 $\mu(B)>0$, 再应用 ②, 有 $E\subset B$, $E\in\Sigma$, $\mu(E)>0$, 使 $\operatorname{diam}A_E(m)\leqslant\varepsilon$. 但是,另一方面, $E\subset B\subset\Omega\setminus\bigcup_{n=1}^{l}E_n$, $\forall l$, 故 $\mu(E)<\dfrac{1}{k_l-1}$, $\forall l$. 但 $\mu(E_l)>\dfrac{1}{k_l}$, $\forall l$, 且 $\{E_l\}$ 是两两不相交的,故 $\sum_{l=1}^{\infty}\dfrac{1}{k_l}\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}\mu(E_l)<+\infty$, 从而

$$\mu(E)\leqslant\lim_{l}\frac{1}{k_l-1}=0,$$

这个矛盾表明 $\mu(B)=\mu\left(\Omega\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0$. 所以, $\{E_n(\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$ 即为 ③ 中所求的.

④ 对任何 $\varepsilon>0$, 定义

$$f_\varepsilon(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(E_n(\varepsilon))}{\mu(E_n(\varepsilon))}\chi_{E_n(\varepsilon)}(\omega),$$

则 $f_\varepsilon(\omega)\in L_1(\mu,X)$, 令

$$m_\varepsilon(E)=\int_E f_\varepsilon(\omega)d\mu,\ \forall E\in\Sigma.$$

对 Ω 的任一分割 π,

$$\begin{aligned}\sum_{E\in\pi}\|m(E)-m_\varepsilon(E)\|&=\sum_{E\in\pi}\left\|m(E)-\int_E f_\varepsilon d\mu\right\|\\&\leqslant\sum_{E\in\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|m(E\cap E_n(\varepsilon))-\int_{E\cap E_n(\varepsilon)}f_\varepsilon d\mu\right\|\\&\leqslant\sum_{E\in\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{m(E\cap E_n(\varepsilon))}{\mu(E\cap E_n(\varepsilon))}-\frac{m(E_n(\varepsilon))}{\mu(E_n(\varepsilon))}\right\|\mu(E\cap E_n(\varepsilon))\\&\quad\left(\text{约定}\ \frac{0}{0}=0\right)\\&\leqslant\sum_{E\in\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\mu(E\cap E_n(\varepsilon))\leqslant\varepsilon\mu(\Omega).\end{aligned}\tag{6.9}$$

因此, $\lim_{\varepsilon\to0}|m-m_\varepsilon|(\Omega)=0$, 故

$$\lim_{\delta,\varepsilon\to 0}|m_\varepsilon - m_\delta|(\Omega)=0.$$

于是，
$$\lim_{\delta,\varepsilon\to 0}\int_\Omega \|f_\varepsilon - f_\delta\| d\mu = 0.$$

选 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，则 $\{f_{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^\infty$ 是 $L_1(\mu, X)$ 中 Cauchy 列. 故存在 $f\in L_1(\mu, X)$，使对一切 $E\in\Sigma$，有

$$\lim_n \int_E \|f_{\frac{1}{n}} - f\| d\mu = 0. \tag{6.10}$$

这就得到 $m(E)=\int_E f\,d\mu$, $\forall E\in\Sigma$，事实上，因对一切 $E\in\Sigma$，由(6.9)有

$$\|m(E)-m_{\frac{1}{n}}(E)\|\leqslant \frac{1}{n}\mu(\Omega).$$

故 $m_{\frac{1}{n}}(E)\xrightarrow{\|\cdot\|} m(E)$，又

$$\left\|m_{\frac{1}{n}}(E)-\int_E f\,d\mu\right\| = \left\|\int_E f_{\frac{1}{n}}d\mu - \int_E f\,d\mu\right\|$$
$$\leqslant \int_E \|f_{\frac{1}{n}} - f\| d\mu \to 0 \ (\text{由}(6.10)).$$

从而 $m_{\frac{1}{n}}(E)\xrightarrow{\|\cdot\|}\int_E f\,d\mu$，因此 $m(E)=\int_E f\,d\mu$

这表明 m 关于 μ 具 Radon-Nikodym 导数. 由于 (Ω, Σ, μ) 及 m 的任意性知道，X 具 RNP. □

推论 6.4.2 若 X 是 Banach 空间，则

X 具 RNP $\Leftrightarrow$ X 关于 $([0, 1), \Sigma, \mu)$ 具 RNP，其中 Σ 是 $[0, 1)$ 中的 Borel 集的 σ 代数，μ 是 Σ 上的 Lebesgue 测度.

这从定理 6.4.1 的证明中就可看出.

定理 6.4.3 若 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，则

$(X, \|\cdot\|)$ 具 RNP $\Leftrightarrow$ 对任一等价范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$，$(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ 具 RNP $\Leftrightarrow$ 对某个等价范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$，$(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ 具 RNP.

证明：设 $A\subset(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ 是新的等价范数的有界子集，则 A

也是原来范数 $\|\cdot\|$ 的有界集，由于$(X, \|\cdot\|)$具 RNP，故对任何 $\varepsilon>0$，存在 $x_\varepsilon\in A$，使

$$x_\varepsilon\notin\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_{\|\cdot\|}(x_\varepsilon, \varepsilon)).$$

设对某个 $\alpha>0$，$B_{\|\cdot\|}(x_\varepsilon, \varepsilon)\subset B_{|||\cdot|||}(x_\varepsilon, \alpha\varepsilon)$，则

$$x_\varepsilon\notin\overline{\mathrm{co}}(A\backslash B_{|||\cdot|||}(x_\varepsilon, \alpha\varepsilon)),$$

从而 A 是$(X, |||\cdot|||)$中的可凹集，由定理 6.4.1 知，$(X, |||\cdot|||)$具 RNP. □

注；从定理 6.4.3 证明中看到，有界集的可凹性是在等价范数下不变的.

引理 6.4.4 如果 X 包含一个有界非空不可凹集 A，则 X 包含一个有界闭凸均衡集 B，使 $\mathrm{int}\,B\neq\emptyset$，且 B 是不可凹的. 特别地，$\mathrm{int}\,B$ 不是 σ 可凹的. 这时，X 能再赋范，使新范数下的单位球是不可凹的，且新范数下单位开球不是 σ 可凹的.

证明：由定理 6.2.2(6) 知，$A_1=A\cup(-A)$ 是不可凹的. 由定理 6.2.2(5) 知，$A_2=\overline{\mathrm{co}}(A_1)$ 不是可凹的. 再由定理 6.2.2(3) 知，$A_3=A_2+U(X)$ 不是可凹的. 令 $B=\overline{A}_3$，则 $0\in\mathrm{int}\,B$，且 B 是不可凹的有界非空闭凸均衡集，故由 B 所决定的 Minkowski 泛函是 X 上的一个等价范数. 由定理 6.4.3，B 在新范数下也是不可凹的. 又由定理 6.2.2(12) 知，$\mathrm{int}\,B$ 不是 σ 可凹的. □

定理 6.4.5 若 X 是 Banach 空间，则

X 具 RNP $\Leftrightarrow$ X 的每个有界闭凸集是可凹的.

$\Leftrightarrow$ 每个等价范数 $|||\cdot|||$ 的(闭)单位球是可凹的.

$\Leftrightarrow$ 每个有界开凸集的范数闭包是可凹的.

证明：由引理 6.4.4 知，若 X 的每个有界闭凸集是可凹的，则 X 的每个有界子集是可凹的. 又由引理 6.4.4 知，若 X 的每个等价范数单位球是可凹的，则 X 的每个有界子集是可凹的. 再由引理 6.4.4 知，若 X 的每个有界开凸集的范闭包是可

凹的，则 X 的每个有界子集是可凹的．再根据定理 6.4.1 即得所要的结论． □

注：若仅知一个等价范数的单位球是可凹的，并不能得到 X 具 RNP．事实上，M. Edelstein 证明 c_0 具有一个等价范数，使新的等价范数的单位球是可凹的，且新单位球没有端点(见 M. Edelstein, *Pacific J. Math.* 46(1973)111-114)．

定理 6.4.6 若 X 是 Banach 空间，则下列条件等价：

(1) X 具 RNP.

(2) X 的每个闭线性子空间具 RNP.

(3) X 的每个可分闭线性子空间具 RNP.

证明：(1)⇒(2) 令 M 是 X 的闭线性子空间，任取 M 中的有界集 A，显然，A 是 X 中有界集，由定理 6.4.1 知，A 是 X 中可凹集，故对每个 $\varepsilon>0$，存在 $x\in A$，使

$$x\notin\overline{\text{co}}(A\setminus B_X(x,\ \varepsilon)),$$

但 $\overline{\text{co}}(A\setminus B_X(x,\ \varepsilon))=\overline{\text{co}}(A\setminus B_M(x,\ \varepsilon))\subset M$，故 A 是 M 中的可凹集，再由定理 6.4.1 知，M 具 RNP． □

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(1) 任取 X 的有界子集 A.

任取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$，令 $X_0=\overline{\text{span}}\{x_n\}$，则 X_0 是 X 的可分闭子空间，且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X_0 中有界集．由条件(3)知，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X_0 的可凹集，故 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的可凹集(由 (1)⇒(2) 的证明知)．再由定理 6.2.2(4) 知，A 是可凹集(可凹集的可分决定性)．因此，X 具 RNP． □

定理 6.4.7 若 X 具 RNP，又 Y 是 Banach 空间，且存在 $T: X\to Y$ 是一个线性同胚，则 Y 具 RNP.

证明：对任何有限非负测度空间 $(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$，令 $m: \Sigma\to Y$ 是一个有界变差、μ 连续 Y 值的向量测度，则 $T^{-1}m: \Sigma\to X$ 是一个有界变差、μ 连续 X 值的向量测度，由于 X 具 RNP，故存在 $f\in L_1(\mu,\ X)$，使对每个 $E\in\Sigma$，有

$$(T^{-1}m)(E)=\int_E f(\omega)d\mu.$$

根据 Bochner 积分的性质(见 Hille & Phillips «泛函分析与半群», 吴智泉等译, p.103), $Tf\in L^1(\mu, Y)$, 且对每个 $E\in\Sigma$, 有

$$m(E)=T((T^{-1}m)(E))=T\int_E f(\omega)d\mu=\int_E Tf(\omega)d\mu,$$

这表明 Y 也具 RNP. □

定理6.4.8(Lindenstrauss) 若 X 是 Banach 空间, 则

$$X\text{ 具 RNP}\Rightarrow X\text{ 具 KMP}.$$

证明: 令 B 是 X 的一个非空有界闭凸子集, 由于 X 具 RNP, 根据定理 6.4.1 知, B 是可凹的.

对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $x_1\in B$, 使

$$x_1\notin\overline{\text{co}}\left(B\backslash B\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

令$C_1=\overline{\text{co}}\left(B\backslash B\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$, 由 Bishop Phelps 定理, 存在 $x_1^*\in X^*$, 使对某个 $b_0\in B$, 有

$$\sup x_1^*(C_1)<\sup x_1^*(B)=x_1^*(b_0).$$

令 $B_1=\{b\in B;\ x_1^*(b)=x_1^*(b_0)\}$, 则 B_1 是 B 的有界非空闭凸端子集, 再根据 X 具 RNP 知, B_1 是可凹的, 故存在 $x_2\in B_1$, 使

$$x_2\notin\overline{\text{co}}\left(B_1\backslash B\left(x_2, \frac{\varepsilon}{2^2}\right)\right),$$

令 $C_2=\overline{\text{co}}\left(B_1\backslash B\left(x_2, \frac{\varepsilon}{2^2}\right)\right)$. 同上面方法, 利用 Bishop-Phelps 定理, 有 $x_2^*\in X^*$, 使得对某个 $b_1\in B_1$, 有

$$\sup x_2^*(C_2)<\sup x_2^*(B_1)=x_2^*(b_1).$$

令
$$B_2=\{b\in B_1;\ x_2^*(b)=x_2^*(b_1)\}.$$

继续这个过程, 得到一列非空有闭凸集 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足下列条件:

$$B \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots,$$

B_{n+1} 是 B_n 的闭凸端子集，且 $\operatorname{diam} B_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$.（事实上，任取 $b \in B_n$，则 $b \in B_{n-1}$，从而

$$x_n^*(b) = x_n^*(b_{n-1}) > \sup x_n^*(C_n),$$

故 $b \notin C_n = \overline{\text{co}}\left(B_{n-1} \setminus B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right) \supset B_{n-1} \setminus B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$.

故 $b \in B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$，因此，$B_n \subset B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$，从而 $\operatorname{diam} B_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$）.

由于空间 X 是完备的，故存在 $x \in X$，使

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x\}.$$

因此，$x \in \operatorname{ext} B$.（事实上，若 $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$，其中 $y, z \in B$，则对每个 n，$x_n^*(x) = \frac{1}{2}x_n^*(y) + \frac{1}{2}x_n^*(z)$，由于 B_{n+1} 是 B_n 端子集，故 $y, z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$，从而 $y = z = x$，这表明 $x \in \operatorname{ext} B$.）由定理 3.2.3 知，这时每个有界闭凸集 A 是它的端点 $\operatorname{ext} A$ 的闭凸包，即

$$A = \overline{\text{co}}(\operatorname{ext} A)$$

这表明 X 具 KMP. □

注：Lindenstrauss 首先证明 l_1 具 KMP，然后用类似想法证明了上述定理.

下面介绍切片方法来讨论 RNP 与强暴露点之间关系.

定理 6.4.9(Phelps) 若 X 是 Banach 空间，则

X 具 RNP $\Leftrightarrow$ 对 X 的每个非空有界闭凸集 C，有

$$C = \overline{\text{co}}(\text{strong } \exp C)$$

(其中 strong $\exp C$ 表示 C 的全体强暴露点).

为了证明这个命题，首先需要几个有关切片的引理.

引理 6.4.10 令 C 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，假设

对每个切片 $S(x^*, \alpha, C)$ 和每个 $\varepsilon>0$，存在一个切片 $S(y^*, \beta, C)$，使得

(1) $S(y^*, \beta, C)\subset S(x^*, \alpha, C)$.

(2) $\operatorname{diam} S(y^*, \beta, C)<\varepsilon$.

(3) $\| x^*-y^*\|<\varepsilon$.

则 C 的每个切片包含 C 的一个强暴露点，并且

$$C=\overline{\text{co}}(\text{strong}\exp C).$$

证明：不妨设 $C\subset U(X)$.

令 $y_0^*=x^*$, $\beta_0=\alpha$, 利用条件 (1)、(2)、(3) 可构造 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X^*)$ 和正实数列 $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$、使

① $\|y_{n+1}^*-y_n^*\|<\beta_n\cdot 2^{-n}$.

② $\beta_{n+1}<\dfrac{\beta_n}{2}$.

③ $\operatorname{diam}S(y_{n+1}^*, \beta_{n+1}, C)\leqslant\beta_n\cdot 2^{-n}$.

④ $S(y_{n+1}^*, \beta_{n+1}, C)\subset S(y_n^*, \beta_n, C)$.

由条件 ①、② 知，$\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Canchy 列，故存在 $y^*\in S(X^*)$，使

$$y_n^*\longrightarrow y^*.$$

由条件 ③、④ 知，存在 $x_0\in C$，使

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}S(y_{n+1}^*, \beta_{n+1}, C)=\{x_0\}.$$

下面证明 x_0 是 C 的强暴露点，并且相应的强暴露泛函是 y^*.

由条件 ①，

$$\|y^*-y_n^*\|=\lim_{k\to\infty}\|y_k^*-y_n^*\|\leqslant\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\|y_{n+i}^*-y_{n+i-1}^*\|$$

$$\leqslant\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\beta_{n+i}\cdot 2^{-(n+i)}\leqslant\beta_n\cdot 2^{-n+1}.$$

由于 $C\subset U(X)$，故当 $x\in C$ 时，有

$$|y^*(x)-y_n^*(x)|\leqslant\beta_n\cdot 2^{-n+1}.$$

特别地，当 $n\geqslant 3$, $x\in C$ 时，有

$$|y^*(x)-y_n^*(x)|\leqslant\frac{\beta_n}{4}.$$

因此，当 $n\geqslant 3$ 时

$$\sup y_n^*(C)-\frac{\beta_n}{4}\leqslant\sup y^*(C),$$

从而，当 $n\geqslant 3$ 时，

$$S\left(y^*,\ \frac{\beta_n}{4},\ C\right)\subset S(y_n^*,\ \beta_n,\ C).$$

$\Bigg($事实上，当 $x\in S\left(y^*,\ \frac{\beta_n}{4},\ C\right)$ 时

$$\sup y_n^*(C)-\beta_n\leqslant\sup y^*(C)-\frac{\beta_n}{2}$$

$$\leqslant\sup y^*(C)-\frac{\beta_n}{4}\leqslant y_n^*(x),$$

故 $x\in S(y_n^*,\ \beta_n,\ C)$, 即 $S\left(y^*,\ \frac{\beta_n}{4},\ C\right)\subset S(y_n^*,\ \beta_n,\ C).\Bigg)$从而 $\operatorname{diam}S\left(y^*,\ \frac{\beta_n}{4},\ C\right)\to 0$, 故

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}S\left(y^*,\ \frac{\beta_n}{4},\ C\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}S(y_n^*,\ \beta_n,\ C)=\{x_0\}.$$

因此，x_0 是 C 的强暴露点，且相应的强暴露泛函是 y^*.

现在证明 $C=\overline{\mathrm{co}}\,(\text{strong}\ \exp C)$, 假设

$$C\neq\overline{\mathrm{co}}(\text{strong}\ \exp C),$$

则存在 C 的切片 $S(x^*,\ \alpha,\ C)$ 使

$$S(x^*,\ \alpha,\ C)\cap\overline{\mathrm{co}}(\text{strong}\ \exp C)=\emptyset.$$

由上述证明知，$S(x^*,\ \alpha,\ C)$ 含有 C 的一个强暴露点，矛盾！这表明 $C=\overline{\mathrm{co}}(\text{strong}\ \exp C)$. □

注：这个引理也提供了求 C 的强暴露点的一个有力方法. 并且，也知道若 C 的每个切片含有 C 的一个强暴露点，那么 C 就一定是它的强暴露点的闭凸包.

引理 6.4.11 假设 Banach 空间 X 具 RNP, 令 K 是 X

的一个有界闭凸集，令 $x^*\in S(X^*)$，设

$$K\subset\{x\in X;\ x^*(x)\geqslant 0\},$$

且 $K\cap\{x\in X;\ x^*(x)>0\}\neq\emptyset$，则任给 ε，$0<\varepsilon<1$，存在 K 的切片 $S(y^*, \beta, K)$，使

(1) $\operatorname{diam} S(y^*, \beta, K)<\varepsilon$.

(2) $S(y^*, \beta, K)\subset\{x\in X;\ x^*(x)>0\}$.

(3) $\|x^*-y^*\|<\varepsilon$.

证明：令 $N=\{x\in X;\ x^*(x)=0\}$.

下面分两步进行. 并且为了叙述清楚起见，每一步又分若干小段.

① (A) 若 $K\cap N=\emptyset$，由于 K 是可凹的，故存在 x，使

$$x\in K\setminus\overline{\text{co}}\left(K\setminus B\left(x,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

由 Hahn-Banach 定理和 Bishop-Phelps 定理知，存在 $y^*\in S(X^*)$，$b\in K$，使

$$\sup y^*\left(\overline{\text{co}}\left(K\setminus B\left(x,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right)<\sup y^*(K)=y^*(b).$$

取 $\beta>0$，使

$$\sup y^*\left(\overline{\text{co}}\left(K\setminus B\left(x,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right)<y^*(b)-\beta<y^*(b)$$
$$=\sup y^*(K).$$

于是 $S(y^*, \beta, K)$ 满足定理结论中条件 (1)、(2) $\left(\text{因为 } T(y^*, \beta, K)\subset B\left(x,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.

(B) 若 $K\cap N\neq\emptyset$. 取定 $z\in K\cap\{x;\ x^*(x)>0\}$.

对每个 $x\in K\cap\{x\in X;\ x^*(x)=0\}$，定义有界线性算子 T_x: $X\to X$,

$$T_x(y)=y-2\frac{x^*(y)}{x^*(z)}(z-x),\ \forall\, y\in X.$$

显然，T_x 满足以下条件：

(a) $x=\dfrac{z+T_x z}{2}$.

(b) $T_x^2=I$, 即 $T_x^{-1}=T_x$, 其中 I 为恒等算子.

(c) $T_x|_N=I|_N$

(d) $\|T_x\|\leqslant 1+\dfrac{4}{x^*(z)}\sup x^*(K)$,

令 $M_0=1+\dfrac{4}{x^*(z)}\sup x^*(K)$.

令 $\mathscr{M}=\{K\}\cup\{T_xK;\ x\in K\cap N\}$. 再令 $K_1=\overline{\mathrm{co}}(\mathscr{M})$. 显然, K_1 是有界的 (事实上, K_1 以 $M_0\cdot\sup\{\|x\|;\ x\in K\}$ 为界), 且 $z\in K_1$,

$$\{T_xz;\ x\in K\cap N\}\subset K_1.$$

又
$$\|x-T_xz\|=2\|z-x\|\geqslant 2x^*(z)>0.$$

由条件(a)知, 每个 $x\in K\cap N$ 是长度至少为 $2x^*(z)$ 的线段 $[z, T_xz]$ 的中点.

由于 X 具 RNP, 故 K_1 是可凹的. 因此, 由定理6.2.2(B)知, 存在 K_1 的切片 $S(y^*, \alpha, K_1)$ 具充分小的直径. 例如, 可取 $\operatorname{diam} S(y^*, \alpha, K_1)<\min\left\{x^*(z), \dfrac{\varepsilon}{M_0}\right\}\equiv d$.

由于 $\sup y^*(K_1)=\sup y^*(\{K\}\cup\{T_xK;\ x\in K\cap N\})$, 故 $\{K\}$, $\{T_x;\ x\in K\cap N\}$ 中至少有一个集, 例如 K_0, 使得

$$\sup y^*(K_0)>\sup y^*(K_1)-\alpha.$$

令 $\beta=\sup y^*(K_0)-[\sup y^*(K_1)-\alpha]$, 则 $\alpha\geqslant\beta>0$, 且

$$S(y^*, \beta, K_0)\subset S(y^*, \alpha, K_1).$$

故 $\operatorname{diam} S(y^*, \beta, K_0)<d$.

此外, 还有

$$S(y^*, \beta, K_0)\cap K\cap N=\emptyset.$$

(事实上, 若存在 $x_0\in S(y^*, \beta, K_0)\cap K\cap N$, 则 x_0 是 $[z, T_{x_0}z]$ 的中点, 由于 $[z, T_{x_0}z]\subset K_1$, $x_0\in S(y^*, \alpha, K_1)$, 则 $[x_0, z]$、$[z, T_{x_0}z]$ 两者之中至少有一个包含在 $S(y^*, \alpha, K_1)$ 中. 但这两条

线段的长度都大于等于 $x^*(z)$，这与 $S(y^*, \alpha, K_1)$ 的直径小于 $x^*(z)$ 矛盾！这表明，$S(y^*, \beta, K_0)\cap K\cap N=\emptyset$.）

若 $K_0=K$，则 $S(y^*, \beta, K)$ 就是 K 的切片，且

$$\operatorname{diam} S(y^*, \beta, K)<\frac{\varepsilon}{M_0}<\varepsilon.$$

此外，由于 $S(y^*, \beta, K)\cap N=\emptyset$.，故

$$S(y^*, \beta, K)\subset\{x\in X, x^*(x)>0\}.$$

若 $K_0=T_xK$，对某个 $x\in K\cap N$. 则

$$\begin{aligned}T_x^{-1}S(y^*, \beta, K_0)&=T_x^{-1}S(y^*, \beta, T_xK)\\&=S(T_x^*y^*, \beta, K),\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\|T_x^{-1}y_1-T_x^{-1}y_2\|&\leqslant\|T_x^{-1}\|\cdot\operatorname{diam} S(y^*, \beta, T_xK)\\&\leqslant\|T_x\|\cdot d\leqslant M_0\cdot d\leqslant\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 $y_1, y_2\in S(y^*, \beta, T_xK)$. 故

$$\operatorname{diam}(T_x^*y^*, \beta, K)\leqslant\varepsilon.$$

并且 $S(T_x^*y^*, \beta, K)\cap N=\emptyset$.（事实上，若有 u，使 $u\in S(T_x^*y^*, \beta, K)\cap N$，则

$$T_xu\in S(y^*, \beta, K_0)\cap K\cap N=\emptyset,$$

矛盾！）

总之，我们得到切片满足定理结论中条件(1)、(2).

② 下面将进一步选择 y^*，使切片满足定理结论中条件(3).

令 $C=\overline{\mathrm{co}}(K\cup\{x\in X; \|x\|\leqslant\lambda, x^*(x)=0\})$，其中

$$\lambda=\frac{4}{\varepsilon}\sup\{\|x\|; x\in K\}.$$

显然，
$$C\subset\{x; x^*(x)\geqslant 0\},$$

且 C 是非空有界闭凸集，$C\cap\{x; x^*(x)>0\}\neq\emptyset$. 由 (A) 的结果知，存在 C 的切片 $S(y^*, \beta, C)$，使 $\operatorname{diam} S(y^*, \beta, C)\leqslant\varepsilon$，且

$$S(y^*, \beta, C)\subset\{x\in X; x^*(x)>0\}.$$

由于 $S(y^*, \beta, C)\cap C\cap N=\emptyset$，故

$$\sup y^*(K)=\sup y^*(C),$$

且 $S(y^*, \beta, K)\subset S(y^*, \beta, C)$. (事实上,若 $x\in S(y^*, \beta, K)$, 则 $x\in K\subset C$, 且

$$y^*(x)\geqslant \sup y^*(K)-\beta=\sup y^*(C)-\beta,$$

故 $x\in S(y^*, \beta, C)$, 于是 $S(y^*, \beta, K)\subset S(y^*, \beta, C)$.)所以, $\operatorname{diam} S(y^*, \beta, K)<\varepsilon$, 且

$$S(y^*, \beta, K)\cap K\cap N=\emptyset.$$

这表明切片 $S(y^*, \beta, K)$ 满足定理结论中条件 (1)、(2), 下面将证明 $\|x^*-y^*\|<\varepsilon$.

任取 $u\in S(y^*, \beta, K)$, 由于 $S(y^*, \beta, K)\cap C\cap N=\emptyset$, 所以

$$y^*(u)+\beta\geqslant \sup y^*(C)=\sup y^*(K)\geqslant y^*(h)+\beta,$$

其中 $h\in\{x\in X;\ \|x\|\leqslant\lambda,\ x^*(x)=0\}$. 因此,

$$y^*(u)\geqslant \sup y^*(h),$$

其中 $h\in\{x\in X;\ \|x\|\leqslant\lambda,\ x^*(x)=0\}$. 从而 $y^*(u)\geqslant\lambda\|y^*|_N\|$, 即 $\|y^*|_N\|\leqslant\dfrac{y^*(u)}{\lambda}$. 由引理 3.1.6 知, 或者 $\|x^*+y^*\|\leqslant\dfrac{2y^*(u)}{\lambda}$, 或者 $\|x^*-y^*\|\leqslant\dfrac{2y^*(u)}{\lambda}$. 但是 $\|x^*+y^*\|\leqslant\dfrac{2y^*(u)}{\lambda}$ 是不可能的. 事实上,因为 $x^*(u)>0$, 令 $M=\sup\{\|x\|;\ x\in K\}$, 则

$$\frac{y^*(u)}{M}\leqslant\frac{y^*(u)}{\|u\|}\leqslant\frac{(x^*+y^*)(u)}{\|u\|}\leqslant\|x^*+y^*\|<\frac{2y^*(u)}{\lambda}$$

故 $2M>\lambda=4M\varepsilon^{-1}>4M>0$, 矛盾! 故

$$\|x^*-y^*\|\leqslant\frac{2y^*(u)}{\lambda}\leqslant\frac{2M}{\lambda}<\varepsilon.\quad (\|y^*\|=1)$$

这表明 $S(y^*, \beta, K)$ 即为所求的. □

定理6.4.12 令 X 是具 RNP 的 Banach 空间, 则对每个有界闭凸集 C, 有

$$C=\overline{\mathrm{co}}(\text{strong}\exp C).$$

证明: 令 $S(x^*, \alpha, C)$ 是 C 的任何切片.

通过平移可假设 $\sup x^*(C)=\alpha$. 事实上,取 $y\in X$, 使

$$x^*(y)=\sup x^*(C)-\alpha, \text{（不失一般性）}$$

则 $$\sup x^*(C-y)=\sup x^*(C)-x^*(y)=\alpha.$$

令

$$K=S(x^*, \alpha, C-y)=\{x; x\in C-y, x^*(x)\geqslant 0\}$$
$$=S(x^*, \alpha, C)-y.$$

由于 $\alpha>0$，故我们有

$$K\cap\{x\in X; x^*(x)>0\}\neq\emptyset.$$

令 $0<\varepsilon<1$，由引理6.4.11知，存在 K 的切片 $S(y^*, \beta, K)$，使

(1) $\operatorname{diam} S(y^*, \beta, K)<\varepsilon$.

(2) $S(y^*, \beta, K)\subset\{x\in C-y; x^*(x)>0\}$.

(3) $\|x^*-y^*\|<\varepsilon$.

我们有 $S(y^*, \beta, C-y)\subset S(y^*, \beta, K)$. 事实上，若 $x\in(C-y)\setminus S(y^*, \beta, K)$:

① 若 $x\in K$，则 $x\in C-y$，且

$$y^*(x)<\sup y^*(K)-\beta\leqslant\sup y^*(C-y)-\beta,$$

故 $x\notin S(y^*, \beta, C-y)$.

② 若 $x\notin K$，则 $x^*(x)<0$，任取 $z\in S(y^*, \beta, K)$，则 $x^*(z)>0$，从而存在 $u\in[x, z]\subset C-y$，使 $x^*(u)=0$，从而 $u\in K$，由条件(2)，$u\notin S(y^*, \beta, K)$，因此，

$$y^*(u)<\sup y^*(K)-\beta\leqslant y^*(z),$$

故，由 $u\in[x, z]$ 知，

$$y^*(x)<\sup y^*(K)-\beta\leqslant\sup y^*(C-y)-\beta,$$

于是 $x\notin S(y^*, \beta, C-y)$.

总之，有 $x\notin S(y^*, \beta, C-y)$，这表明 $S(y^*, \beta, C-y)\subset S(y^*, \beta, K)$.

由条件(1)知，

$$\operatorname{diam} S(y^*, \beta, C-y)<\varepsilon.$$

但是，$S(y^*, \beta, C-y)=S(y^*, \beta, C)-y$. 故

$$\operatorname{diam} S(y^*, \beta, C) < \varepsilon.$$

并且,

$$\begin{aligned} S(y^*, \beta, C-y) &= S(y^*, \beta, C) - y \\ &\subset S(y^*, \beta, K) \subset \{x \in C-y;\ x^*(x) > 0\} \\ &\subset K = S(x^*, \alpha, C) - y, \end{aligned}$$

故
$$S(y^*, \beta, C) \subset S(x^*, \alpha, C).$$

又由(3)知,

$$\|x^* - y^*\| < \varepsilon.$$

根据引理 6.4.10

$$C = \overline{\mathrm{co}}(\text{strong} \exp C). \quad \square$$

下面,我们回到定理 6.4.9 的证明.

定理 6.4.9 的证明 "⇒" 即定理 6.4.12.

"⇐" 由定理 6.2.2(8) 知, 若 C 是有界闭凸集, 且 C 有一个强暴露点, 则 C 是可凹集, 从而由定理 6.4.5 知, X 具 RNP. □

推论 6.4.13 若 X 是 Banach 空间,则下列等价:

(1) X 具 RNP.

(2) X 的每个非空有界闭凸集有一个强暴露点.

(3) X 的每个非空有界闭凸集有一个可凹点.

(4) X 的每个非空有界闭凸集是它可凹点的闭凸包.

证明: 由于有界闭凸集的强暴露点是可凹点 (定理 6.2.2(8)), 应用定理 6.4.9 即知. □

注: Lindenstrauss 定理可作为 Phelps 定理的推论. 因为显然有界闭凸集的强暴露点是端点.

定理 6.4.14 (Huff-Morris) Banach 空间 X 具 RNP 等价于下列条件之一:

(1) X 的每个有界闭子集包含它的闭凸包的一个端点.

(2) X 的每个有界闭子集包含它的凸包的一个端点 (SKMP).

(3) 对 X 的每个有界闭集 A，存在 $x^*\in X^*\backslash\{0\}$，和 $x_0\in A$，使

$$x^*(x_0)=\sup x^*(A).$$

(4) 对 X 的每个有界闭集 A，集

$$\{x^*\in X^*;\ \exists x_0\in A,\ 使\ x^*(x_0)=\sup x^*(A)\}$$

在 X^* 中范稠.

证明：① RNP $\Rightarrow$ (1)，设 A 为 X 的任一有界闭集.

令 $C=\overline{\mathrm{co}}(A)$，则 C 是有界闭凸集，由 Phelps 定理（定理 6.4.9)知，

$$C=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{strong\ exp}\,C).$$

但是，我们有 $\{\mathrm{strong\ exp}\,C\}\subset A$.（事实上，任取 $x_0\in\{\mathrm{strong\ exp}\,C\}$，则存在 $x^*\in S(X^*)$，使

$$x^*(x_0)>x^*(C\backslash\{x_0\}).$$

更有 $x^*(x_0)>x^*(A\backslash\{x_0\})$. 若 $x_0\notin A$，则 $x^*(x_0)>x^*(A)$. 又因为 $x_0\in C=\overline{\mathrm{co}}(A)$，故存在 $y_n=\sum\limits_{j=1}^{i_n}\alpha_j^n x_j^n$，使

$$x^*\left(\sum_{j=1}^{i_n}\alpha_j^n x_j^n\right)>x^*(x_0)-\frac{1}{n},$$

其中 $x_j^n\in A$，$\alpha_j^n\geqslant 0$，$\sum\limits_{j=1}^{i_n}\alpha_j^n=1$. 因此，至少存在某个 $x_{j_n}^n$，$1\leqslant j_n\leqslant i_n$，使

$$x^*(x_{j_n}^n)+\frac{1}{n}>x^*(x_0).$$

由于 x_0 是强暴露点，因此，$x_{j_n}^n\to x_0$，由于 A 是闭集，故 $x_0\in A$，矛盾！这表明 $x_0\in A$.）

另一方面，显然，

$$\{\mathrm{strong\ exp}\,C\}\subset\{\mathrm{ext}\,C\},$$

故 $A\cap(\mathrm{ext}\,C)\neq\emptyset$. 即 A 含有它的闭凸包的端点. □

② RNP $\Rightarrow$ (2)，设 A 为有界闭集.

令 $C=\overline{\mathrm{co}}(A)$，由 ① 的证明知，

$$\{\text{strong}\exp C\}\subset A\subset \text{co}(A),$$

故 $\text{co}(A)\cap(\text{ext}\,C)\neq\emptyset$. 又因 $\text{co}(A)\subset C$, 故存在 $x_0\in\text{ext}\,\text{co}(A)$, 显然,

$$\text{ext}\,\text{co}(A)\subset A,$$

因此, $x_0\in A$, 即存在 A 的点 x_0, 它是 A 的凸包的端点. □

③ RNP ⇒ (3), 由 ① 的证明知,

$$C=\overline{\text{co}}(\text{strong}\exp C),$$

且 $\{\text{strong}\exp C\}\subset A$, 故存在 $x_0\in A$, 使

$$x^*(x_0)=\sup x^*(C)=\sup x^*(A).$$

④ RNP ⇒ (4), 设 A 为有界闭凸集.

令 $C=\overline{\text{co}}(A)$, 任选 $\varepsilon>0$, 和 $x^*\in S(X^*)$, 作 C 的切片 $S(x^*,\alpha,C)$, 由定理 6.4.11 的证明及引理 6.4.10 的证明知, 存在 x_0, 使

$$x_0\in\{\text{strong}\exp C\}\cap S(x^*,\alpha,C),$$

x_0 由 y^* 强暴露, 且 $\|x^*-y^*\|<\varepsilon$.

由 ① 的证明知, $x_0\in A$, 故

$$y^*(x_0)=\sup y^*(C)=\sup y^*(A),$$

且 $\|y^*-x^*\|<\varepsilon$. 这表明结论(4)成立. □

⑤ 下面证明若 X 不具 RNP, 则可以构造一个有界闭子集 F, 使结论(1)、(2)、(3)、(4)均不成立.

若 X 不具 RNP, 由定理 6.4.6 知, 存在一个可分的闭子空间 M, 使 M 不具 RNP. 由定理 6.4.5 知, 我们可以给 M 赋以等价范数 $|||\cdot|||$, 使 $U(M,|||\cdot|||)=\{x\in M;\ |||x|||\leqslant 1\}$ 是不可凹的.

令 $A=\{y\in M;\ |||y|||<1\}$. 由于 M 是可分的, 我们选取可数集 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 A 中是稠的.

显然, A 是有界开凸子集, 且 $\overline{A}=U(M,|||\cdot|||)$. 由于 $U(M,|||\cdot|||)$ 是不可凹的, 故由定理 6.2.2(14) 知, 存在 $\varepsilon>0$, 使得对 $\overline{A}$ 中的每个有限子集 F, 有

$$\overline{A}=\overline{\mathrm{co}}(\overline{A}\setminus\overline{B}_\varepsilon(F)).$$

于是,对 A 的每个有限子集 F, 有

$$\overline{A}=\overline{\mathrm{co}}(\overline{A}\setminus\overline{B}_\varepsilon(F)).$$

我们还进一步可以证明,对 A 的每个有限子集 F, 有

$$A=\mathrm{co}(A\setminus\overline{B}_\varepsilon(F)). \tag{6.11}$$

事实上,令 $J=\overline{A}\setminus\overline{B}_\varepsilon(F)$, 则 $\mathrm{int}\,J=A\setminus\overline{B}_\varepsilon(F)$, 且

$$\overline{\mathrm{co}}(J)=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{int}\,J).$$

(任取 $y\in J$, 又任取 $z\in A$, 则 $[z,y)\subset A$, 由 y 属于 $\overline{B}_\varepsilon(F)$ 的余集 $\overline{B}_\varepsilon(F)^c$ (它是一个开集), 故当 $z_n\in[z,y)$ 且 $z_n\to y$ 时, 对充分大的 n, 有 $z_n\in\overline{B}_\varepsilon(F)^c$, 因此, $z_n\in\mathrm{int}\,J$, 所以, $y\in\overline{\mathrm{int}\,J}$, 这表明 $J\subset\overline{\mathrm{int}\,J}$, 从而

$$\mathrm{co}(J)\subset\mathrm{co}(\overline{\mathrm{int}\,J})\subset\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{int}\,J)\subset\overline{\mathrm{co}}(J),$$

所以 $\overline{\mathrm{co}}(J)=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{int}J)$.)

又 A 是 $\overline{A}=\overline{\mathrm{co}}(J)$ 的开核,即 $A=\mathrm{int}\,\overline{\mathrm{co}}(J)$, 故

$$\begin{aligned}A&=\mathrm{int}\,\overline{\mathrm{co}}(J)=\mathrm{int}\,\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{int}\,J)=\mathrm{int}\,\mathrm{co}(\mathrm{int}J)\\&=\mathrm{co}(\mathrm{int}\,J)=\mathrm{co}(A\setminus\overline{B}_\varepsilon(F)).\end{aligned}$$

这表明(6.11)式成立.

由(6.11)式知,任取 A 的有限子集 E_0、E_1, 则必存在 A 的有限子集 E_2, 使

$$E_2\cap B_\varepsilon(E_0)=\emptyset, \quad 且 \quad E_1\subset\mathrm{co}(E_2). \tag{6.12}$$

(事实上, $E_1=\{x_1,\cdots,x_l\}\subset\mathrm{co}(A\setminus B_\varepsilon(E_0))$, 故

$$x_i=\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_j^i x_j^i,$$

其中 $\sum\limits_{j=1}^{n_i}\alpha_j^i=1$, $\alpha_j^i\geqslant 0$, $x_j^i\in A\setminus B_\varepsilon(E_0)$, $j=1,\cdots,n_i$, $i=1,\cdots,l$.

令 $E_2=\{x_j^i;\ i=1,\cdots,l,\ j=1,\cdots,n_i\}$, 那么

$$E_2\cap B_\varepsilon(E_0)=\emptyset, \quad 且 \quad E_1\subset\mathrm{co}(E_2).$$

这表明(6.12)式成立.)

令 $F_1=\{y_1\}$, $E_1=F_1\cup\{y_1\}$, 由(6.12)式知, 存在 A 的有限子集 F_2, 使

$$F_2\cap B_\varepsilon(F_1)=\emptyset, \quad 且 \quad F_1\cup\{y_1\}\subset\mathrm{co}(F_2).$$

归纳地,如果 $F_1, F_2, \cdots, F_{n-1}$ 已选好,考虑 $E_{n-1}=F_{n-1}\cup\{y_n\}$,再应用(6.12)式,可选 A 的有限子集 F_n, 使

$$B_\varepsilon\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}F_i\right)\cap F_n=\emptyset, \quad 且 \quad F_{n-1}\cup\{y_n\}\subset\mathrm{co}(F_n).$$

这样,得到 A 的有限子集的序列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$.

令 $H=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, 则由于 F_n 是有限集, 且当 $n\neq m$ 时对 $x\in F_n$, $y\in F_m$, 有 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$, 故 H 是 A 的闭子集. 并且

$$\{y_n\}\subset\mathrm{co}(H)\subset A,$$

从而,由 $\{y_n\}$ 在 A 中稠,知,

$$H\subset A\subset\overline{\mathrm{co}}(H)\subset\overline{A}, \tag{6.13}$$

且 $$A=\mathrm{int}\,A\subset\mathrm{int}\,\overline{\mathrm{co}}(H)\subset\mathrm{int}\,\overline{A}=A.$$

因此,由(6.13)知, 有界闭集 H 不包含它的闭凸包 $\overline{A}$ 的端点, 这表明结论(1)不成立. 并且有界闭集 H 也不含它凸包的端点(因 $x\in H$,则 $x\in F_{n_0}$,对某个 n_0, 则 $x\in\mathrm{co}(F_{n_0+1})$, 且 $F_2\cap B_\varepsilon(F_{n_0})=\emptyset$, 故 $x\notin\mathrm{ext}\ \mathrm{co}(H)$), 这表明结论(2)不成立. 又由于对任何 $x^*\in X^*\setminus\{0\}$, 有

$$\sup x^*(H)=\sup x^*(\overline{A}),$$

且 $H\subset A$, 故不存在 $x_0\subset H$, 使

$$x^*(x_0)=\sup x^*(H).$$

因此,结论(3)不成立. 于是结论(4)更不成立. □

下面讨论共轭空间中的 RNP.

定理6.4.15 若 X 是 Banach 空间, X^* 是可分的, 则 X^* 具 RNP.

为了证明这个重要的结果, 我们首先证明下列引理(Namioka 方法).

引理 6.4.16 令 Ω 是一个紧的 Hausdorff 拓扑空间，且 $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$，其中 Ω_n 是闭的，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\operatorname{int}\Omega_n$ 在 Ω 中是稠的.

证明：由于 Ω 是紧 Hausdorff 拓扑空间，则 Ω 是 Baire 空间(Baire 空间是那种拓扑空间,其中第一纲集的余集是稠集).

令 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}\partial\Omega_n$，($\partial\Omega_n$ 表示 Ω_n 的边界),由于

$$\partial\Omega_n=\overline{\Omega}_n\backslash\operatorname{int}\Omega_n=\overline{\Omega}_n\backslash\operatorname{int}\overline{\Omega}_n,$$

Ω_n 是闭集,故 $\partial\Omega_n$ 是闭疏集,因此,B 是第一纲集. 又由于 Ω 是 Baire 空间,故 $\Omega\backslash B$ 是稠集,但是,

$$\Omega\backslash B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\operatorname{int}\Omega_n,$$

故 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\operatorname{int}\Omega_n$ 是在 Ω 中稠的. □

引理 6.4.17 令 X 是 Banach 空间，X^* 是可分的，又 A 是 X^* 的 w^* 紧子集,则集

$Z=\{y^*\in A;$ 恒等算子 $I:(A,\ w^*)\to(A,\ \|\cdot\|)$ 在 y^* 点连续$\}$

是 A 中 w^* 稠 G_δ 集.

证明：对每个 $\varepsilon>0$，令

$A_\varepsilon=\cup\{K;\ K$ 是 A 的相对 w^* 开集,且 $\operatorname{diam}K\leqslant\varepsilon\}$，很清楚，$A_\varepsilon$ 是 A 的一个 w^* 开子集.

由于 X^* 是可分的,故存在 A 的范稠序列 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$,因此,

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap\left(x_n^*+\frac{\varepsilon}{2}U(X^*)\right).$$

由于,$x_n^*+\frac{\varepsilon}{2}U(X^*)$ 是 w^* 闭的,由引理 6.4.16 知,集

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}\operatorname{int}^{w^*}\left(A\cap\left(x_n^*+\frac{\varepsilon}{2}U(X^*)\right)\right)$$

在 A 中是 w^* 稠的(其中 int^{w^*} 表示 w^* 开核). 但是,因为

$$\operatorname{diam}\left(\operatorname{int}^{w^*}\left(A\cap\left(x^*+\frac{\varepsilon}{2}U(X^*)\right)\right)\right)<\operatorname{diam}\left(\frac{\varepsilon}{2}U(X^*)\right)\leqslant\varepsilon,$$

故 $B\subset A_\varepsilon\subset A$，因此，$A_\varepsilon$ 是 A 中 w^* 稠且 w^* 开的子集. 又另一方面，

$$Z=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{\frac{1}{n}}\subset A,$$

由于 A 是 Baire 空间，故 Z 是 w^* 稠 G_δ 集. □

引理 6.4.18 如果 X 是可分的 Banach 空间，K 是 X^* 的 w^* 紧凸集，则 $\operatorname{ext}K$ 是 K 的一个 w^*G_δ 集. 特别地，$(\operatorname{ext}K,\ \mathrm{w}^*)$ 是一个 Baire 空间，更是第二纲的.

证明：由于 X 是可分的，则 $(K,\ \mathrm{w}^*)$ 是（完备）紧可度量空间，设其度量为 d，令

$C_n=\left\{x^*\in K;\ 存在\ x_1^*,\ x_2^*\in K,\ 使\ x^*=\frac{1}{2}(x_1^*+x_2^*)\ 且\ d(x_1^*,\ x_2^*)\geqslant\frac{1}{n}\right\}$，则 C_n 是 K 的（关于度量 d）的闭子集. 又

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n=K\setminus\operatorname{ext}K,$$

故 $\operatorname{ext}K$ 是 K 的一个 w^*G_δ 子集. 由古典的 Александров 定理（完备度量空间的 G_δ 集同胚于某个完备度量空间，从而同胚于 Baire 空间）知，$\operatorname{ext}K$ 是一个（关于 w^* 拓扑）Baire 空间，更是第二纲的. □

引理 6.4.19 如果 X 是 Banach 空间，X^* 是可分的，A 是 X^* 的 w^* 紧凸子集，令

$Z=\{x^*\in A;\ 恒等算子\ I:(A,\ \mathrm{w}^*)\to(A,\ \|\cdot\|)\ 在\ x^*\ 点连续\}$，

则 $Z\cap\operatorname{ext}A$ 是 $\operatorname{ext}A$ 的一个 w^* 稠 G_δ 子集.

证明：对每个 $\varepsilon>0$，令

$B_\varepsilon=\{x^*\in\operatorname{ext}A;\ 存在\ x^*\ 的一个\ \mathrm{w}^*\ 邻域\ N,\ 使\ \operatorname{diam}(A\cap N)\leqslant\varepsilon\}$.

(1) 首先证明 B_ε 在 $\operatorname{ext}A$ 中 w^* 稠. 即证明对 X^* 中任何 w^* 开集 W，使 $(\operatorname{ext}A)\cap W\neq\emptyset$，有 $B_\varepsilon\cap W\neq\emptyset$.

事实上，令 $D=\overline{\operatorname{ext}A}^{\mathrm{w}^*}$（$\mathrm{w}^*$ 闭包），由于 $D\subset A$，且 D 是 w^* 闭的，故 D 也是 w^* 紧的，显然，$D\cap W\neq\emptyset$，由引理 6.4.17，集

$$H=\{y^*\in D;\ 恒等算子\ I:\ (D,\ w^*)\to(D,\ \|\cdot\|)在\ y^*\ 点连续\}$$
是 D 中 w^* 稠 G_δ 集. 因此, 存在 X^* 的 w^* 开集 V, 使

$$\emptyset\neq D\cap V\subset D\cap W,\quad 且\quad \operatorname{diam}(D\cap V)\leqslant\frac{\varepsilon}{4}.$$

(事实上, 因为存在 $x^*\in D\cap W$, 由恒等算子 I 的 w^*—$\|\cdot\|$ 连续性 (在 x^* 点) 知, 存在 x^* 的相对 w^* 邻域 $D\cap V'$, 使 $\operatorname{diam}(D\cap V')\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$, 其中 V' 是 x^* 的 w^* 邻域, 取 $V=V'\cap W$, 即可.)

令 $A_1=\overline{\operatorname{co}}^{w^*}(D\backslash V)$, $A_2=\overline{\operatorname{co}}^{w^*}(D\cap V)$, 由于

$$\operatorname{ext}A\subset D=(D\backslash V)\cup(D\cap V)\subset A_1\cup A_2,$$

由 Krein-Milman 定理, 因 A_1、A_2 是 w^* 紧的凸集, 有

$$A=\overline{\operatorname{co}}^{w^*}(A_1\cup A_2)=\operatorname{co}(A_1\cup A_2).$$

又由于 $D\cap V$ 含于某个半径为 $\frac{\varepsilon}{4}$ 的范闭球内, 且共轭空间的范闭球是 w^* 闭的, 故

$$\operatorname{diam}(A_2)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $\operatorname{ext}A_1\subset\overline{D\backslash V}^{w^*}=D\backslash V$, 而 $D\cap V\neq\emptyset$, 故 $A\neq A_1$. (否则 $\operatorname{ext}A=\operatorname{ext}A_1\subset(D\backslash V)=\overline{D\backslash V}^{w^*}$, 故 $D=\overline{\operatorname{ext}A}^{w^*}\subset\overline{D\backslash V}^{w^*}=D\backslash V$, 从而 $D\cap V=\emptyset$, 矛盾!)

令 $d=\operatorname{diam}A$, $r=\frac{\varepsilon}{4d}$.

令 $C=\{\lambda x_1^*+(1-\lambda)x_2^*;\ r\leqslant\lambda\leqslant1,\ x_1^*\in A_1,\ x_2^*\in A_2\}$,
我们有 C 是 A 的 w^* 紧凸子集. (事实上, 因为 C 是 $A_1\times A_2\times[r,\ 1]$ 的连续像, 其中映像 f 取为

$$f(x_1^*,\ x_2^*,\ t)=tx_1^*+(1-t)x_2^*;$$

从而 C 是 w^* 紧集. 关于 C 的凸性可验证如下: 设

$$z_1^*=\lambda_1x_1^*+(1-\lambda_1)y_1^*,$$
$$z_2^*=\lambda_2x_2^*+(1-\lambda_2)y_2^*,$$

则对任 $0<\alpha<1$,

$$
\begin{aligned}
u^* &= \alpha z_1^* + (1-\alpha) z_2^* \\
&= ((1-\alpha)\lambda_2 + \alpha\lambda_1)\Big(\frac{\alpha\lambda_1}{(1-\alpha)\lambda_2+\alpha\lambda_1} x_1^* \\
&\quad + \Big(1-\frac{\alpha\lambda_1}{(1-\alpha)\lambda_2+\alpha\lambda_1}\Big) x_2^*\Big) \\
&\quad + (1-[(1-\alpha)\lambda_2 + \alpha\lambda_1])\Big(\frac{\alpha\lambda_1}{1-(1-\alpha)\lambda_2-\alpha\lambda_1} y_1^* \\
&\quad + \Big(1-\frac{\alpha\lambda_1}{1-(1-\alpha)\lambda_2-\alpha\lambda_1}\Big) y_2^*\Big),
\end{aligned}
$$

故 $u^* \in C$.)

又由于 $(\operatorname{ext} A) \cap C \subset A_1 \subsetneq A$, 故

$$C \neq A.$$

(事实上，因 $C \subset A$, 且仅有 A_1 的点可能是 $\operatorname{ext} C$ 的点，若 $C = A$, 则 $\operatorname{ext} A = \operatorname{ext} C \subset A_1$, 因此,

$$A = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\operatorname{ext} A) \subset A_1,$$

这是一个矛盾!)

对任何 $y^* \in A \backslash C$, 我们有(因 $A = \mathrm{co}(A_1 \cup A_2)$),

$$y^* = \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*,$$

其中 $x_1^* \in A_1$, $x_2^* \in A_2$, $0 \leqslant \lambda < r$, 则

$$\|y^* - x_2^*\| = \lambda \|x_1^* - x_2^*\| \leqslant rd,$$

故，由于 $\operatorname{diam} A_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, 知

$$\operatorname{diam}(A \backslash C) \leqslant 2rd + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

又因为 $C \neq A$, 从而存在 $z^* \in (A \backslash C) \cap \operatorname{ext} A$. (事实上，否则 $\operatorname{ext} A \subset C$, 于是

$$(\operatorname{ext} A) \cap C = \operatorname{ext} A \subset A_1,$$

从而 $A \subset A_1$, 这是不可能的.)于是, $A \backslash C$ 是 z^* 在 A 中 w^* 邻域，由于 $\operatorname{diam}(A \backslash C) \leqslant \varepsilon$, 故 $z^* \in B_\varepsilon$.

又由于 $D \backslash V \subset A_1 \subset C$, 故 $z^* \in D \cap V \subset D \cap W$ (因为 $z^* \in \operatorname{ext} A$, 且 $z^* \notin C$, 故 $z^* \in V$). 从而 $z^* \in B_\varepsilon \cap W$, 即 $B_\varepsilon \cap W \neq \emptyset$.

这就证明了 B_ε 是 $\mathrm{ext}\,A$ 中的 w^* 稠集.

(2) 很清楚, B_ε 是 $\mathrm{ext}\,A$ 的 w^* 开子集.

事实上,任取 $x^*\in B_\varepsilon$,由 B_ε 的定义,存在 x^* 的一个 w^* 邻域 N, 使 $\mathrm{diam}(A\cap N)\leqslant\varepsilon$, 则对任何 $y^*\in N\cap\mathrm{ext}\,A$, 有 $y^*\in B_\varepsilon$.

(3) 对任何正整数 n, 作集合 $B_{1/n}$, 由于 $B_{1/n}$ 是 $\mathrm{ext}\,A$ 的 w^* 稠开子集. 由于 $\mathrm{ext}\,A$ 是 Baire 空间, 故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_{\frac{1}{n}}$ 是 w^* 稠 G_δ 集. 但

$$Z\cap\mathrm{ext}\,A=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_{\frac{1}{n}},$$

故 $Z\cap\mathrm{ext}\,A$ 是 $\mathrm{ext}\,A$ 的 w^* 稠 G_δ 集. □

引理 6.4.20 若 X 是 Banach 空间, X^* 是可分的, 且 B 是 X^* 的非空有界范闭凸子集,令 $\Omega=\overline{B}^{\mathrm{w}^*}$, 则

$$B\cap\mathrm{ext}\,\Omega$$

是 $\mathrm{ext}\,\Omega$ 中 w^* 稠集.

证明: 显然, Ω 是 w^* 紧凸集,令

$$Z=\{x^*\in\Omega;\ 恒等算子\ I:(\Omega,\ \mathrm{w}^*)\to(\Omega,\ \|\cdot\|)在\ x^*\ 点连续\}.$$

由引理 6.4.19 知, $Z\cap\mathrm{ext}\,\Omega$ 是 $\mathrm{ext}\,\Omega$ 中的 w^* 稠 G_δ 子集. 任取 $x^*\in Z$, 由于 B 在 Ω 中 w^* 稠,故存在 $\{x_\alpha^*\}\subset B$,使 $x_\alpha^*\xrightarrow{\mathrm{w}^*}x^*$,由 Z 的定义,及 $x^*\in Z$ 知, $x_\alpha^*\xrightarrow{\|\cdot\|}x^*$, 故由于 B 是范闭集, $x^*\in B$, 这表明 $Z\subset B$, 从而

$$(\mathrm{ext}\,\Omega)\cap Z\subset(\mathrm{ext}\,\Omega)\cap B,$$

因此,由于 $Z\cap\mathrm{ext}\,\Omega$ 在 $\mathrm{ext}\,\Omega$ 中 w^* 稠, $B\cap\mathrm{ext}\,\Omega$ 在 $\mathrm{ext}\,\Omega$ 中 w^* 稠. □

有了以上准备工作之后,我们着手证明定理 6.4.15.

定理 6.4.15 的证明: 由推论 6.4.13 知道, 只须证明 X^* 的每个非空范闭有界凸集有一个可凹点.

令 B 是 X^* 的非空范闭有界凸集. 令 $\Omega=\overline{B}^{\mathrm{w}^*}$, 由引理 6.4.20 知(同引理 6.4.20 记号),

$$\emptyset \neq (\text{ext}\,\Omega) \cap Z \subset (\text{ext}\,\Omega) \cap B \subset \text{ext}\,B.$$

取 $x^* \in (\text{ext}\,\Omega) \cap Z$, 由 Z 的定义知道, 存在 x^* 的 w* 开集 W, 使

$$x^* \in W \cap \Omega, \quad 且 \quad \text{diam}(W \cap \Omega) \leqslant \varepsilon.$$

由于 $\Omega \backslash W$ 是 w* 紧集, 故

$$x^* \notin \overline{\text{co}}^{w^*}(\Omega \backslash W).$$

(事实上, 若 $x^* \in \overline{\text{co}}^{w^*}(\Omega \backslash W)$, 由于又有 $x^* \in \text{ext}\,\Omega$, 故

$$x^* \in \text{ext}\,\overline{\text{co}}^{w^*}(\Omega \backslash W) \subset \Omega \backslash W.$$

这与 $x^* \in W \cap \Omega$ 矛盾!)

我们又有

$$\overline{\text{co}}(\Omega \backslash W) \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(\Omega \backslash W),$$

故 $x^* \notin \overline{\text{co}}(\Omega \backslash W)$, 但是,

$$B \backslash \bar{B}(x^*, \varepsilon) \subset \Omega \backslash W,$$

故 $\overline{\text{co}}(B \backslash \bar{B}(x^*, \varepsilon)) \subset \overline{\text{co}}(\Omega \backslash W)$, 所以

$$x^* \notin \overline{\text{co}}(B \backslash \bar{B}_\varepsilon(x^*)),$$

由 ε 的任意性知, x^* 是 B 的一个可凹点. □

推论 6.4.21 若 X 的每个闭可分子空间 M 线性同胚于某个可分共轭空间 Y^* 的子空间, 则 X 具 RNP.

证明: 由定理 6.4.15、定理 6.4.6 及定理 6.4.7 即知. □

注: 反之不然 (见前面关于 RNP 的一些进展), 但对共轭空间却有下面定理.

定理 6.4.22(Huff-Morris-Stegall) 对任何 Banach 空间 X, 下列条件是等价的:

(1) X^* 具 RNP.

(2) X^* 具 KMP.

(3) X 的每个可分闭子空间 M 有可分的共轭空间.

证明: (1) ⇒ (2) 由 Lindenstrauss 定理 (定理 6.4.8) 即知. □

(3)⇒(1) 任取 X^* 的(范)闭可分子空间 Y, 令 $\{x_m^*\}_{m=1}^\infty$ 是

Y 的一个可数稠集，选 $\{x_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}{}_{m=1}^{\infty}\subset X$，使 $\|x_{m,n}\|=1$，且对一切 m, n,

$$|x_m^*(x_{m,n})|\geqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)\|x_m^*\|.$$

令 $Z=\overline{\text{span}}\{x_{m,n};\ m,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$，显然，$Z$ 是 X 的可分闭子空间，由条件 (3) 知，Z^* 是可分的，由定理 **6.4.15**，Z^* 具 RNP.

定义线性算子 T: $Y\to Z^*$,

$$(Tx^*)(z)=x^*(z),\ \forall\, x^*\in Y,\ z\in Z^*,$$

则
$$|(Tx^*)(z)|\leqslant\|x^*\|\cdot\|z\|,$$

从而 $\|Tx^*\|\leqslant\|x^*\|$，$\forall\, x^*\in Y$. 又因为，对任何 m,

$$\|Tx_m^*\|\geqslant\sup_n|(Tx_m^*)(x_{m,n})|=\sup_n x_m^*(x_{m,n})\geqslant\|x_m^*\|,$$

故 $\|Tx_m^*\|=\|x_m^*\|$，又由于 $\{x_m^*\}_{m=1}^{\infty}$ 在 Y 中稠，故对一切 $x^*\in Y$，有 $\|Tx^*\|=\|x^*\|$，因此，T 是 Y 到 $TY\subset Z^*$ 的一个等距同构. 因此，TY 是 Z^* 的闭子空间，由定理 6.4.6 知，TY 具 RNP，再由定理 6.4.7 知，Y 具 RNP，根据定理 6.4.6，X^* 具 RNP. □

为了证明 (2)⇒(3)，我们需要下列引理.

引理 6.4.23 令 Z 是一个不可分的 Banach 空间，Ω 表示第一个不可数的序数，则任给 $\varepsilon>0$，存在

$$\{z_\alpha;\ \alpha<\Omega\}\subset Z,\quad \text{及}\quad \{z_\alpha^*;\ \alpha<\Omega\}\subset Z^*,$$

使得对一切序数 α、$\beta<\Omega$，有 $\|z_\alpha\|=1$，$\|z_\alpha^*\|<1+\varepsilon$，且

$$z_\beta^*(z_\alpha)=\begin{cases}0 & \text{当 } \alpha<\beta \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } \alpha=\beta \text{ 时}.\end{cases}$$

证明：选 $z_1\in S(Z)$，及 $z_1^*\in S(Z^*)$，使

$$z_1^*(z_1)=1,$$

假设 $\beta<\Omega$，且对一切 $\alpha<\beta$，z_α 及 z_α^* 均已选好满足定理所说的要求.

由于 $\overline{\text{span}}\{z_\alpha;\ \alpha<\beta\}$ 是不可分空间 Z 的可分闭子空间，由

Hahn-Banach 定理，存在 $z_\beta^* \in Z^*$，使 $\|z_\beta^*\| = 1+\frac{\varepsilon}{2}$，且对 $\alpha<\beta$，有

$$z_\beta^*(z_\alpha) = 0.$$

选 $z_\beta \in Z$，使 $\|z_\beta\| = 1 = z_\beta^*(z_\beta)$.

由超限归纳法，即得所要的结论. □

下面先引入几个定义.

定义 6.4.1 若 $A \subset X^*$，$x^* \in X^*$ 称为 A 的 w^* 凝聚点 (condensation point)，如果对 x^* 的每个 w^* 邻域 N，$A \cap N$ 是不可数集.

引理 5.4.24 如果 X 是一个可分的 Banach 空间，A 是 X^* 的有界非可数子集，则除了可数个点之外，A 的点都是 A 的 w^* 凝聚点.

证明：由于 X 是可分的，故 (A, w^*) 是可以度量化的，且满足第二可数公理，因此，(A, w^*) 是 Lindelöf 空间，由此得到，A 的点除可数多个点外，均是 A 的 w^* 凝聚点. □

定义 6.4.2 一个非空集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 pre-Haar 系，如果对任何 n.

$$A_{2n} \cup A_{2n+1} \subset A_n,$$

且 $A_{2^k}, \cdots, A_{2^{k+1}-1}$，两两不相交，$k=1, 2, \cdots$. 若此时，还有 $A_{2n} \cup A_{2n+1} = A_n$，则称 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Haar 系.

引理 6.4.25 (Stegall) 若 X 是可分的 Banach 空间，X^* 是不可分的，则对每个 $\varepsilon>0$，存在 pre-Haar 系 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，$A_n \subset S(X^*)$，$\forall n$，和 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，使

(1) $\|x_n\| < 1+\varepsilon$，$\forall n$.

(2) 若 $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$，则当 $x^* \in A_{2^k} \cup \cdots \cup A_{2^{k+1}-1}$，时，有

$$|x^*(x_n) - \chi_{A_n}(x^*)| < \varepsilon 2^{-k},$$

对 $k=0, 1, 2, \cdots$.

证明：令 $\varepsilon>0$，Ω 是第一个不可数的序数.

由引理 6.4.23 知道，存在集

$$A=\{x_\alpha^*;\ \alpha<\Omega\}\subset X^*,\ \{x_\alpha^{**};\ \alpha<\Omega\}\subset X^{**},$$

使得 $\|x_\alpha^*\|=1$, $\|x_\alpha^{**}\|<1+\varepsilon$, 且

$$x_\beta^{**}(x_\alpha^*)=\begin{cases}0 & \text{当 } \alpha<\beta \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } \alpha=\beta \text{ 时.}\end{cases}\quad(\alpha,\ \beta<\Omega)$$

对任何 $x^*\in X$, $x\in X$ 和 $\delta>0$, 记

$$W(x^*;\ x,\ \delta)=\{y^*\in X^*;\ |y^*(x)-x^*(x)|<\delta\}$$

为 x^* 的一个 w^* 邻域.

下面分几步进行.

第一步：由于 X^* 是不可分的，根据引理 6.4.24，可选 A 的 w^* 凝聚点 $x_{\alpha_1}^*$. 根据 Goldstine 定理，存在 $x_1\in X$, $\|x_1\|<1+\varepsilon$, 使 $x_{\alpha_1}^*(x_1)=1$.

很清楚 $A_1=W(x_{\alpha_1}^*;\ x_1,\ \varepsilon)\cap A$ 是不可数的，且若 $x^*\in A_1$, 则

$$|x^*(x_1)-\chi_{A_1}(x^*)|=|x^*(x_1)-1|$$
$$=|x^*(x_1)-x_{\alpha_1}^*(x_1)|<\varepsilon.$$

第二步：由于 A_1 是不可数的，再由引理 6.4.24 知，存在 A_1 的 w^* 凝聚点 $x_{\beta_1}^*$, $x_{\alpha_2}^*$, 其中 $\alpha_1<\beta_1<\alpha_2$. 由 $A_1\subset A$, 以及 $\{x_\alpha^*\}$ 的取法知道，

$$x_{\alpha_2}^{**}(x_{\beta_1}^*)=0,\ x_{\alpha_2}^{**}(x_{\alpha_1}^*)=1,\quad \text{且}\quad \|x_{\alpha_2}^{**}\|<1+\varepsilon.$$

应用 Helly 引理，得到 $x_2\in X$, $\|x_2\|<1+\varepsilon$, 使得

$$x_{\alpha_2}^{**}(x_{\beta_1}^*)=x_{\beta_1}^*(x_2)=0,\ x_{\alpha_2}^*(x_2)=x_{\alpha_2}^{**}(x_{\alpha_2}^*)=1.$$

因为 $x_{\beta_1}^*(x_2)=0$, 且 $x_{\beta_1}^*$ 是 A_1 的 w^* 凝聚点，再应用引理 6.2.24 知，存在 A_1 的 w^* 凝聚点 $x_{\alpha_3}^*$, 使 $\alpha_2<\alpha_3$, 并且 $|x_{\alpha_3}^*(x_2)|<\varepsilon 2^{-1}$.

根据 $A_1\subset A$ 及 $\{x_\alpha^*\}$ 的取法知道，

$$x_{\alpha_3}^{**}(x_{\alpha_2}^*)=0,\ x_{\alpha_3}^{**}(x_{\alpha_3}^*)=1,\ \text{且}\quad \|x_{\alpha_3}^{**}\|<1+\varepsilon.$$

再利用 Helly 引理，得到 $x_3\in X$, $\|x_3\|<1+\varepsilon$, 使得

$$x_{\alpha_2}^*(x_3)=0,\ x_{\alpha_3}^*(x_3)=1.$$

令 $$H=W\left(x^*_{\alpha_2};\ x_2,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)\cap W\left(0;\ x_3,\ \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

$$S=W\left((x^*_{\alpha_3};\ x_3,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)\cap W\left(0;\ x_2,\ \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

则 $H\cap S=\emptyset$.

令 $A_2=A_1\cap H$, $A_3=A_1\cap S$, 则

$$A_2\cap A_3=\emptyset,\ A_2\cup A_3\subset A_1,$$

并且 A_2、A_3 有不可数多个凝聚点,且当 $x^*\in A_2\cup A_3$ 时,有

$$|x^*(x_2)-\chi_{A_2}(x^*)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |x^*(x_3)-\chi_{A_3}(x^*)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

第三步:选 A_i 的 w* 凝聚点 $x^*_{\beta_i}$, $i=2, 3$, $\beta_2<\beta_3$(根据引理 6.4.24). 再根据引理 6.2.24, 选 $x^*_{\alpha_4}$ 是 A_2 的 w* 凝聚点. $\beta_3<\alpha_4$, 则

$$x^{**}_{\alpha_4}(x^*_{\beta_2})=x^{**}_{\alpha_4}(x^*_{\beta_3})=0,\ x^{**}_{\alpha_4}(x^*_{\alpha_4})=1,\quad 且\quad \|x^{**}_{\alpha_4}\|<1+\varepsilon.$$

应用 Helly 引理,可选 $x_4\in X$, 使

$$x^*_{\beta_2}(x_4)=x^*_{\beta_3}(x_4)=0,\ x^*_{\alpha_4}(x_4)=1,\quad 且\quad \|x_4\|<1+\varepsilon.$$

又由于 $x^*_{\beta_2}$ 是 A_2 的一个 w* 凝聚点, 且 $x^*_{\beta_2}(x_4)=0$, 故存在 A_2 的 w* 凝聚点 $x^*_{\alpha_5}$, $\alpha_4<\alpha_5$, 使 $|x^*_{\alpha_5}(x_4)|<2^{-2}\varepsilon$. 因此,

$$x^{**}_{\alpha_5}(x^*_{\beta_3})=x^{**}_{\alpha_5}(x^*_{\alpha_4})=0,\ x^{**}_{\alpha_5}(x^*_{\alpha_5})=1,\ \|x^*_{\alpha_5}\|<1+\varepsilon.$$

再应用 Helly 引理,可选 $x_5\in X$, 使

$$x^*_{\beta_3}(x_5)=x^*_{\alpha_4}(x_5)=0,\ x^*_{\alpha_5}(x_5)=1,\ \|x_5\|<1+\varepsilon.$$

根据 $x^*_{\beta_3}$ 是 A_3 的 w*凝聚点,且 $x^*_{\beta_3}(x_4)=x^*_{\beta_3}(x_5)=0$, 从而存在 A_3 的 w* 凝聚点 $x^*_{\alpha_6}$, $\alpha_5<\alpha_6$, 且 $|x^*_{\alpha_6}(x_4)|<2^{-2}\varepsilon$, $|x^*_{\alpha_6}(x_5)|<2^{-2}\varepsilon$.

由于 $x^{**}_{\alpha_6}(x^*_{\beta_3})=x^{**}_{\alpha_6}(x^*_{\alpha_4})=x^{**}_{\alpha_6}(x^*_{\alpha_5})=0$, $x^{**}_{\alpha_6}(x^*_{\alpha_6})=1$, $\|x^{**}_{\alpha_6}\|<1+\varepsilon$, 再应用 Helly 引理,存在 $x_6\in X$, 使

$$x^*_{\beta_3}(x_6)=x^*_{\alpha_4}(x_6)=x^*_{\alpha_5}(x_6)=0,\ x^*_{\alpha_6}(x_6)=1,\ \|x_6\|<1+\varepsilon.$$

又由于 $x^*_{\beta_3}(x_i)=0$, $i=4、5、6$, 且 $x^{**}_{\beta_3}$ 是 A_3 的 w* 凝聚点故存在 A_3 的 w* 凝聚点 $x^*_{\alpha_7}$, $\alpha_6<\alpha_7$, 使

$$|x^*_{\alpha_7}(x_i)|<2^{-2}\varepsilon,\ i=4、5、6.$$

又 $x_{\alpha_7}^{**}(x_{\alpha_i}^*)=0$, $i=4、5、6$, $x_{\alpha_7}^{**}(x_{\alpha_7}^*)=1$, 且$\|x_{\alpha_7}^{**}\|<1+\varepsilon$. 仍然根据 Helly 引理，存在 $x_7\in X$, 使

$$x_{\alpha_i}^*(x_7)=0,\ i=4、5、6,\ x_{\alpha_7}^*(x_7)=1,\ \|x_7\|<1+\varepsilon.$$

定义下面集合：

$$A_4=A_2\cap W\left(x_{\alpha_4}^*;\ x_4,\ \frac{\varepsilon}{4}\right)\cap\left(\bigcap_{i=5}^{7}W\left(0;\ x_i,\ \frac{\varepsilon}{4}\right)\right).$$

$$A_5=A_2\cap W\left(x_{\alpha_5}^*;\ x_5,\ \frac{\varepsilon}{4}\right)\cap\left(\bigcap_{i=4,6,7}W\left(0;\ x_i,\ \frac{\varepsilon}{4}\right)\right).$$

$$A_6=A_3\cap W\left(x_{\alpha_6}^*;\ x_6,\ \frac{\varepsilon}{4}\right)\cap\left(\bigcap_{i=4,5,7}W\left(0;\ x_i,\ \frac{\varepsilon}{4}\right)\right).$$

$$A_7=A_3\cap W\left(x_{\alpha_7}^*;\ x_7,\ \frac{\varepsilon}{4}\right)\cap\left(\bigcap_{i=4}^{6}W\left(0;\ x_i,\ \frac{\varepsilon}{4}\right)\right).$$

则

$$A_4\cap A_5=\emptyset,\ A_6\cap A_7=\emptyset;$$

$$A_4\cup A_5\subset A_2,\ \ A_6\cup A_7\subset A_3.$$

由于 $A_2\cap A_3=\emptyset$, 故 A_4, A_5, A_6, A_7 两两不相交，且

$$A_4\cup A_5\cup A_6\cup A_7\subset A_2\cup A_3\subset A_1,$$

而且，当 $x^*\in A_4\cup A_5\cup A_6\cup A_7$ 时，有

$$|x^*(x_n)-\chi_{A_n}(x^*)|\geqslant 2^{-2}\varepsilon,\ 2^2\leqslant n<2^3-1.$$

于是 A_4, A_5, A_6, A_7 即满足要求.

继续这个过程，就得到定理所求的 pre-Haar 系. □

引理 6.4.26 若 X 是可分的 Banach 空间，X^* 是不可分的，则对每个 $\varepsilon>0$, 存在 X^* 的非空 w* 紧子集 Δ, 和 Δ 的一个相对开闭子集组成的 Haar 系 $(C_n)_{n=1}^{\infty}$, 及 X 的一个元列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使 $\|x_n\|<1+\varepsilon$, $\forall n$, 且对 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$, 当 $x^*\in\Delta$ 时有，

$$|x^*(x_n)-\chi_{C_n}(x^*)|<\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

证明：设 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$, 由引理 6.4.25, 存在 $S(X^*)$ 的一个 pre-Haar 系 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$, 使

(1) $\|x_n\|<1+\varepsilon$, $\forall n$.

(2) 如果 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$, 当 $x^*\in A_{2^k}\cup\cdots\cup A_{2^{k+1}-1}$ 时，

$$|x^*(x_n)-\chi_{A_n}(x^*)|<\varepsilon 2^{-k}.$$

令 $B_n=\overline{A}_n^{w^*}$, $\forall n$. 以下分三步进行.

① 由于$\overline{A}_n^{w^*}\cup \overline{A}_{n+1}^{w^*}\subset\overline{A_n\cup A_{n+1}}^{w^*}$, 因此, 若证明对任何$k$, $2^k\leqslant m, n<2^{k+1}$, 有 $B_n\cap B_m=\emptyset$, 就知 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 构成 pre-Haar 系.

反证法. 若存在 $x^*\in B_n\cap B_m$, 则存在 $\{x_\sigma^*\}\subset A_n$, $\{y_\tau^*\}\subset A_m$, 使

$$x_\sigma^*\xrightarrow{w^*}x^*,\ y_\tau^*\xrightarrow{w^*}x^*.$$

从而,

$$|x^*(x_n)-1|=\lim_\sigma|x_\sigma^*(x_n)-1|=\lim_\sigma|x_\sigma^*(x_n)-\chi_{A_n}(x_\sigma^*)|$$
$$\leqslant\varepsilon<\frac{1}{2}.$$

但是,

$$|x^*(x_n)|=\lim_\tau|y_\tau^*(x_n)|=\lim_\tau|y_\tau^*(x_n)-\chi_{A_n}(y_\tau^*)|$$
$$\leqslant\varepsilon<\frac{1}{2}.$$

矛盾! 这表明 $B_n\cap B_m=\phi$. 从而 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 per-Haar 系

② 我们有, 若 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$, $x^*\in\bigcup_{m=2^k}^{2^{k+1}-1}B_m$, 则

$$|x^*(x_n)-\chi_{B_n}(x^*)|<\varepsilon 2^{-k}. \tag{6.14}$$

事实上, 若 $x^*\in B_n$, 则存在 $\{x_\sigma^*\}\subset A_n$, 使 $x_\sigma^*\xrightarrow{w^*}x^*$, 从而

$$|x^*(x_n)-\chi_{B_n}(x^*)|=|x^*(x_n)-1|=\lim_\sigma|x_\sigma^*(x_n)-1|$$
$$=\lim_\sigma|x_\sigma^*(x_n)-\chi_{A_n}(x_\sigma^*)|\leqslant\varepsilon 2^{-n}<\varepsilon 2^{-k}.$$

若 $x^*\in B_m$, $m\neq n$, $2^k\leqslant m<2^{k+1}-1$, 则存在 $\{y_\tau^*\}\subset A_m$, 使 $y_\tau^*\xrightarrow{w^*}x^*$, 从而

$$|x^*(x_n)-\chi_{B_n}(x^*)|=|x^*(x_n)|=\lim_\tau|y_\tau^*(x_n)|$$
$$=\lim_\tau|y_\tau^*(x_n)-\chi_{A_n}(y_\tau^*)|<\varepsilon 2^{-k}.$$

故总之(6.14)成立.

③ 令 $\Delta=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{m=2^k}^{2^{k+1}-1}B_m\right)$, 则 Δ 是 X^* 的 w* 紧非空子集.

对每个 n, 令 $C_n=B_n\cap\Delta$, 那么 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 组成一个 pre-Haar 系, 又

$$C_n\setminus(C_{2n}\cup C_{2n+1})=(B_n\setminus(B_{2n}\cup B_{2n+1}))\cap\Delta=\emptyset,$$

从而 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 组成一个 Haar 系.

每个分割 $\pi_k=\{C_{2^k},\ C_{2^k+1},\ \cdots,\ C_{2^{k+1}-1}\}$ 中的元是 Δ 的 w* 闭子集, 从而也是 w* 开子集, 且当 $x^*\in\Delta$, $2^k\leqslant n<2^{k+1}$ 时,

$$|x^*(x_n)-\chi_{C_n}(x^*)|<\varepsilon 2^{-k}.$$

(事实上, 因为 $x^*\in\Delta$, 则 $x^*\in\bigcup\limits_{m=2^k}^{2^{k+1}-1}B_n$, $\forall k$, 所以, 当 $2^k\leqslant n<2^{k+1}-1$ 时, $x\in B_n\Leftrightarrow x\in C_n$, 故

$$|x^*(x_n)-\chi_{C_n}(x^*)|=|x^*(x_n)-\chi_{B_n}(x^*)|<\varepsilon 2^k.)$$

于是 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 即为所求的 Haar 系. □

现在回到定理 6.4.22 的 (2)⇒(3) 证明.

(2)⇒(3), 若存在 X 的闭可分子空间 M, 使 M^* 是不可分的. 我们将证明, 存在 X^* 的非空有界闭凸集 K, 使得 $\operatorname{ext}K=\emptyset$. 得出矛盾!

由引理 6.4.26, 存在 M^* 的非空 w* 紧子集 Δ 和 Δ 的相对 w* 开闭子集组成的 Haar 系 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$, 和一个有界序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M$, 使

$\|x_n\|<\dfrac{9}{8}$, 且当 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$, $x^*\in\Delta$ 时, 有

$$|x^*(x_n)-\chi_{C_n}(x^*)<2^{-k-3}. \tag{6.15}$$

用 Σ 表示由 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 生成的 Δ 的子集的一个 σ 代数.

令 μ: $\Sigma\to[0,\ 1]$, 表示使 $\mu(C_n)=2^{-k}$, $2^k\leqslant n<2^{k+1}$ 的唯一测度.

定义映像 T: $M\to L_\infty(\mu)$, 其中 $L_\infty(\mu)=L_\infty(\Delta,\ \Sigma,\ \mu)$,

$$(Tx)(x^*)=x^*(x),\ \forall x^*\in\Delta,\ x\in M.$$

显然, $Tx\in C(\Delta)$, $\forall x\in M$, 且

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in M}} \|Tx\|_\infty = \sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in M}} \sup_{x^*\in \Delta} |(Tx)(x^*)|$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in M}} \sup_{x^*\in \Delta} \|x\|\cdot\|x^*\| \leqslant \sup_{x^*\in \Delta} \|x^*\|.$$

由于 $L_\infty(\mu)$ 是内射空间(injective space) (证明见参考书[4]p. 222), 并且, 由 Nachbin 定理知, X 是内射空间当且仅当 X 具 Hahn-Banach 延拓性质 (见关肇直《泛函分析讲义》1958年版 p. 104), 知存在 T 的连续线性延拓(仍然记作 T)T: $X\to L_\infty(\mu)$.

由(6.15)知,

$$\|Tx_n - \chi_{C_n}\|_\infty \leqslant \frac{\mu(C_n)}{8}.$$

$$\left(\text{事实上, } \|Tx_n - \chi_{C_n}\|_\infty = \max_{x^*\in\Delta} |(Tx_n)(x^*) - \chi_{C_n}(x^*)|\right.$$

$$= \max_{x^*\in\Delta} |x^*(x_n) - \chi_{C_n}(x^*)|$$

$$\left.\leqslant \frac{2^{-k}}{8} = \frac{\mu(C_n)}{8}.\right)$$

令 μ_n: $\Sigma\to[0, 1]$, $\mu_n(E) = \dfrac{\mu(E\cap C_n)}{\mu(C_n)}$, $\forall E\in\Sigma$.

令 $\lambda_n\in(L_\infty(\mu))^*$,

$$\lambda_n(f) = \int_\Delta f d\mu_n = \frac{1}{\mu(C_n)}\int_{C_n} f d\mu,\ \forall f\in L_\infty(\mu).$$

令 $x_n^* = T^*\lambda_n(\in X^*)$, 由于

$$\mu_n = \frac{\mu_{2n} + \mu_{2n+1}}{2}.$$

(事实上, 因 $C_n = C_{2n}\cup C_{2n+1}$, 故 $\mu(C_n) = \mu(C_{2n}) + \mu(C_{2n+1})$, 且 $\mu(C_{2n}) = \mu(C_{2n+1})$, 从而, $\forall E\in\Sigma$, 有

$$\mu_n(E) = \frac{\mu(E\cap C_n)}{\mu(C_n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu(E\cap C_{2n})}{\mu(C_{2n})} + \frac{\mu(E\cap C_{2n+1})}{\mu(C_{2n+1})}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\mu_{2n}(E) + \mu_{2n+1}(E)),$$

即 $\mu_n=\frac{\mu_{2n}+\mu_{2n+1}}{2}$.)

从而，

$$\begin{aligned}\lambda_n(f)&=\frac{1}{\mu(C_n)}\int_{C_n}fd\mu\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu(C_{2n})}\int_{C_{2n}}fd\mu+\frac{1}{\mu(C_{2n+1})}\int_{C_{2n+1}}fd\mu\right)\\&=\frac{1}{2}(\lambda_{2n}(f)+\lambda_{2n+1}(f)),\end{aligned}$$

即
$$\lambda_n=\frac{1}{2}(\lambda_{2n}+\lambda_{2n+1}).$$

因此，

$$\begin{aligned}x_n^*&=T^*(\lambda_n)=T^*\left(\frac{\lambda_{2n}+\lambda_{2n+1}}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}(T^*\lambda_{2n}+T^*\lambda_{2n+1})=\frac{1}{2}(x_{2n}^*+x_{2n+1}^*).\end{aligned}$$

令 $C=\overline{\text{co}}^{w^*}(\lambda_n)$，因为 $\|\lambda_n\|\leqslant 1$，故 C 是 $(L_\infty(\mu))^*$ 的 w* 紧凸集.

令 $D=\overline{\text{co}}^{w^*}(x_n^*)$，因为 $\|x_n^*\|\leqslant\|T^*\|=\|T\|$，所以，$D$ 是 X^* 的 w* 紧凸集，且 $T^*C=D$.

令 $K=\{x^*\in D;\ x^*(x_n)\to 0,\ 当\ n\to\infty\ 时\}$.

我们要证明 K 就是 X^* 的一个没有端点的非空有界闭凸集.

① $K\neq\emptyset$.

事实上，$x_n^*\in K$，因为

$$\begin{aligned}|x_n^*(x_m)|&=|T^*\lambda_n)(x_m)|=|\lambda_n(Tx_m)|=\left|\int_\Delta Tx_m\,d\mu_n\right|\\&\leqslant\left|\int_\Delta(Tx_m-\chi_{C_m})d\mu_n\right|+\left|\int_\Delta\chi_{C_m}d\mu_n\right|\\&\leqslant\frac{\mu(C_m)}{8}+\frac{\mu(C_m\cap C_n)}{\mu(C_n)}\to 0\quad(m\to\infty).\end{aligned}$$

故 $x_n^*\in K$，即 $K\neq\emptyset$.

② K 是范闭的.

事实上,若 $x^*\in\overline{K}$, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $y^*\in K$, 使 $\|x^*-y^*\|<\frac{\varepsilon}{2}\sup_n\|x_n\|$, 由于 $y^*\in K$, 故存在 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 有 $|y^*(x_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$, 因此,当 $n\geqslant N$ 时,有

$$|x^*(x_n)|\leqslant|x^*(x_n)-y^*(x_n)|+|y^*(x_n)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这表明, 当 $n\to\infty$ 时, $x^*(x_n)\to 0$, 于是 $x^*\in K$, 即 K 是范闭集.

③ K 是凸集.

事实上,因为 D 是凸集,且若 $x^*=\alpha x_1^*+(1-\alpha)x_2^*$, 其中 $0<\alpha<1$, x_1^*, $x_2^*\in K$, 则 $x^*\in D$, 且

$$(\alpha x_1^*+(1-\alpha)x_2^*)(x_n)=\alpha x_1^*(x_n)+(1-\alpha)x_2^*(x_n)\to 0,$$

故 $x^*\in K$.

④ $\operatorname{ext}K=\emptyset$. 下面分几步证明.

(A) $\operatorname{ext}K\subset\operatorname{ext}D$: 事实上, 只须证明 K 是 D 的端子集就可以了. 设 $tx^*+(1-t)y^*\in K$, 其中 x^*, $y^*\in D$, $0<t<1$, 则

$$\lim_m tx^*(x_m)+(1-t)y^*(x_m)=0,$$

但是,对任何 $x^*\in D$, 有

$$\lim x^*(x_m)\geqslant 0.$$

(这是由于, $\|Tx_m-\chi_{C_m}\|_\infty\leqslant\frac{\mu(C_m)}{8}$, 故

$$x_n^*(x_m)=\lambda_n(Tx_m)=\int Tx_m\,d\mu_n$$
$$=\int(Tx_m-\chi_{C_m})d\mu_n+\int\chi_{C_m}\,d\mu_n$$
$$\geqslant-\frac{\mu(C_m)}{8},$$

从而对任何 $x^*\in D$, 有 $\lim x^*(x_m)\geqslant 0$.)

所以，我们得到

$$\lim_m x^*(x_m)=0=\lim_m y^*(x_m).$$

于是 $x^*, y^*\in K$. 这就证明了 K 是 D 的端子集。

(B) $\operatorname{ext}K=(\operatorname{ext}D)\cap K=\emptyset$: 事实上，由(A)知，

$$\operatorname{ext}K=(\operatorname{ext}D)\cap K.$$

下面证明若 $e\in\operatorname{ext}D$, 则 $e\notin K$, 这表明 $\operatorname{ext}K=\emptyset$.

设 $e\in\operatorname{ext}D$, 由于 $T^*C=D$, 故 $C\cap((T^*)^{-1}(\{e\}))$ 是 C 的非空 w* 闭凸端子集。由 Krein-Milman 定理，存在

$$\beta\in\operatorname{ext}[((T^*)^{-1}(\{e\}))\cap C]\subset\operatorname{ext}C.$$

由于 $\lambda_n=\dfrac{\lambda_{2n}+\lambda_{2n+1}}{2}$, 故 $\beta\neq\lambda_n$, $\forall n$.

但是，$C=\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\{\lambda_n\})$, 再由 Krein-Milman 定理知，$\beta\in\overline{\{\lambda_n\}}^{w^*}$, 从而 $\beta\in\overline{\{\lambda_n\}}^{w^*}\setminus\{\lambda_n\}$. 又对任何 m,

$$\lambda_n(\chi_{C_m})=\frac{\mu(C_n\cap C_m)}{\mu(C_n)},$$

故当 $n>m$ 时，$\lambda_n(\chi_{C_m})$ 或是 0 或是 1.

因为对一切 n, $\lambda_n(\chi_\Delta)=1$, 故 $\beta(\chi_\Delta)=1$, 又由于

$$\lambda_n(\chi_\Delta)=\lambda_n\Big(\bigcup_{m=2^k}^{2^{k+1}-1}\chi_{C_m}\Big)=\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1}\lambda_n(\chi_{C_m}),$$

故

$$1=\beta(\chi_\Delta)=\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1}\beta(\chi_{C_m}).$$

因此，必有无限多个 m, 使 $\beta(\chi_{C_m})=1$. 设 m 使 $\beta(\chi_{C_m})=1$, 则

$$\begin{aligned}|e(x_m)-1|&=|e(x_m)-\beta(\chi_{C_m})|\\&=|(T^*\beta)(x_m)-\beta(\chi_{C_m})|=|\beta(Tx_m-\chi_{C_m})|\\&\leqslant\|\beta\|\cdot\|Tx_m-\chi_{C_m}\|_\infty\leqslant\frac{1}{8},\end{aligned}$$

故 $e(x_m)\geqslant\dfrac{7}{8}$, 由此得到，

$$e(x_m)\nrightarrow 0,$$

这表明 $e\notin K$. 亦即 $\operatorname{ext}K=\emptyset$.

总之，由于存在 X 的一个可分闭子空间 M，使 M^* 是不可分的，我们就得到 X^* 的一个非空有界闭凸集 K，使得 $\text{ext}\,K=\emptyset$，故 X^* 不具 KMP. □

推论 6.4.27 X^* 的每个闭可分子空间线性同胚于某个可分共轭空间的子空间的充要条件是 X^* 具 RNP.

证明："$\Rightarrow$" 由推论 6.4.21 即知.

"$\Leftarrow$" 设 X^* 具 RNP，任取 X^* 的闭可分子空间 Y，由定理 6.4.22 的 (3)$\Rightarrow$(1) 的证明知，存在 X 的可分子空间 M，使 $Y^*\subset M^*$. 由定理 6.4.22 知，M^* 是可分的，故 Y^* 是线性同胚（事实上还是等距同构）于某个可分共轭空间 M^* 的子空间. □

推论 6.4.28 若 X^* 具 RNP，则 X^* 的每个有界序列有 w Cauchy 子序列.

证明：令 $\{x_n\}$ 是 X 中有界序列，令 $M=\overline{\text{spam}\{x_n\}}$，则 M 是 X 的可分子空间，由定理 6.4.22 知，M^* 是可分的，从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 M 中有 w Cauchy 子序列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，显然，$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 也是 X 中 w Cauchy 子序列. □

推论 6.4.29 若 X^* 具 RNP，且 X 是 w 序列完备的，则 X 是自反的.

证明：由推论 6.4.28 及 X 是 w 序列完备的知，$U(X)$ 是 w 序列紧的. 从而 X 是自反的. □

推论 6.4.30 若 X^* 具 RNP，Y 是一个 Banach 空间，又存在 X 的一个闭线性子空间 H 及有界线性算子 $T: H\to Y$，使 $T(H)=Y$，则 Y^* 具 RNP.

证明：令 Z 是 H 的可分闭子空间. 显然，Z 也是 X 的闭可分子空间. 由于 X^* 具 RNP，根据定理 6.4.22，知 Z^* 是可分的，再根据定理 6.4.22 知，H^* 具 RNP，但是，

$$(H/T^{-1}(0))^*\cong(T^{-1}(0))^0\subset H^*,$$

故 $(H/T^{-1}(0))^*$ 具 RNP. 但另一方面，

$$(H/T^{-1}(0))\approx Y,$$

从而 $$(H/T^{-1}(0))^*\approx Y^*,$$
因此，由定理 6.4.7 知，Y^* 具 RNP. □

注：由这个推论知，特别地，当 X^* 具 RNP 时，对 X 的任何闭子空间 H 及 H 的闭子空间 M，则 $(H/M)^*$ 具 RNP. 由此，也得到，若 X^* 具 RNP，且 Y 是 X 的某个商空间，则 Y^* 具 RNP.

推论 6.4.31 若 X 是可分的 Banach 空间，则

$$X^* \text{可分} \Leftrightarrow X^* \text{具 RNP}.$$

证明：若 X^* 是可分的，由定理 6.4.15 知，X^* 具 RNP.

反之，若 X^* 具 RNP，由于 X 是可分的，根据定理 6.4.22 知，X^* 是可分的. □

下面讨论哪些空间具 RNP.

定理 6.4.22 若 X 是自反的 Banach 空间，则 X 具 RNP.

证明：若 X 是自反的 Banach 空间，则 $X^{**}\cong X$，又 X^{**} 是自反的，从而 X^{**} 具 KMP. 由定理 6.4.22 知，X^{**} 具 RNP. 所以 X 具 RNP. □

注：特别地，有限维空间，Hilbert 空间，一致凸空间，超自反空间，BSP 空间具 RNP.

定理 6.4.33 若 X 是具有界完备基的 Banach 空间，则 X 具 RNP.

证明：由定理 2.2.3 知，若 X 是具有界完备基的 Banach 空间，则 X 线性同胚于某个可分共轭空间. 由定理 6.4.15 及定理 6.4.7 即知 X 具 RNP. □

定理 6.4.34 对任何 Γ，$l_1(\Gamma)$ 具 RNP.

证明：$l_1(\Gamma)=\{(x_r;\ r\in\Gamma,\ \sum\limits_{r\in\Gamma}|x_r|<+\infty,$

$$\|(x_r)\|=\sum_{r\in\Gamma}|x_r|\}.$$

首先，若 Γ_0 的基数是可数的，即 $\overline{\overline{\Gamma}}_0=\aleph_0$，则 $l_1(\Gamma_0)$ 是一

个可分共轭空间，由定理 6.4.15 知，$l_1(\Gamma_0)$ 具 RNP.

一般地，对任何 Γ，取 S 是 $l_1(\Gamma)$ 的闭可分子空间，则必定存在一个至多可数集 $\Gamma_0\subset\Gamma$，使得对一切 $x\in S$，当 $r\notin\Gamma_0$ 时，有 $x(r)=0$，从而 S 是 $l_1(\Gamma_0)$ 的闭子空间．由刚才证明知，$l_1(\Gamma_0)$ 具 RNP，根据定理 6.4.6，S 具 RNP，再由定理 6.4.6 知，$l_1(\Gamma)$ 具 RNP. □

定理 6.4.35 若 X 是非常光滑空间，则 X^* 具 RNP.

证明：设 M 是 X 的一个可分闭子空间，由于 X 是非常光滑的，所以 M 也是非常光滑的．因此支撑函数

$$\sigma: S(M)\longrightarrow S(M^*)$$

是范 -w 连续的.

令 $D=\{x^*\in S(M)$；存在 $x\in S(M)$，使 $x^*(x)=1\}$，由 Bishop-Phelps 定理知，D 在 $S(M^*)$ 中是范稠的，从而更有 D 在 $S(M^*)$ 中是 w 稠的.

由于 M 是可分的，从而存在 $S(M)$ 中范稠序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$．显然 $\sigma(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$ 是 $S(M^*)$ 中的可数子集．且

$$\sigma(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})\subset D.$$

我们有，$\sigma(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$ 在 D 中是 w 稠的．事实上，任取 $x^*\in D$，则存在 $x_{x^*}\in S(M)$，使 $\sigma(x_{x^*})=x^*$．取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，使 $x_{n_i}\xrightarrow{\|\cdot\|}x_{x^*}$，由于 M 是非常光滑的，故 $\sigma(x_{n_i})\xrightarrow{\mathrm{w}}\sigma(x_{x^*})=x^*$．所以 $\sigma(\{x_n\})$ 在 D 中是 w 稠的．因此 $\sigma(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$ 在 $S(M^*)$ 中是 w 稠的．所以，M^* 是 w 可分的，于是 M^* 也是可分的．由定理 6.4.22 知，X^* 具 RNP. □

注：由凸性、光滑性和范数可微性的关系，根据这个推论得到许多具 RNP 的空间．例若 X^{**} 是光滑的，则 X^* 具 RNP；X^{***} 是严格凸的，则 X^* 具 RNP；X 是 F 可微的，则 X^* 具 RNP 等等.

定理 6.4.36 $L_\infty[0,1]$，$L_1[0,1]$，c_0，c，l_∞，$C[0,1]$ 都

不具 RNP.

证明：由本章 §2 例 1 知 $L_\infty[0, 1]$ 的单位球是 σ 可凹的，但不是可凹的. 由定理 6.4.1 知，$L_\infty[0, 1]$ 不具 RNP.

由于 $L_1[0, 1]$, c_0, c, l_∞, $C[0, 1]$ 都不具 KMP，从而它们都不是 RNP 空间. □

第七章　凸函数的微分

§1　凸函数及其微分

(一)凸函数及其连续性.

定义 7.1.1　设 $f: E\to \boldsymbol{R}^1$ 是函数，其中，E 为线性空间 X 的凸子集，则称

$$\text{epi}(f)=\{(x,\ t)\in X\times \boldsymbol{R}^1;\ t\geqslant f(x)\}$$

为 f 的上方图形.

定理 7.1.1　线性空间 X 的凸子集 E 上定义的函数 $f: E\to \boldsymbol{R}^1$ 是凸的当且仅当 $\text{epi}(f)$ 是 $X\times \boldsymbol{R}^1$ 的凸子集.

证明：从定义出发，直接证明即可. □

定义 7.1.2　若 E 是线性空间 X 的凸子集，记

$$\text{Conv}(E)=\{f;\ f: E\to \boldsymbol{R}^1 \text{ 是凸函数}\}$$

注：容易看到，Conv(E)是一个凸锥.

性质 7.1.2　若 $\{f_i;\ i\in I\}\subset \text{Conv}(E)$，其中 I 为任意指标集，则

$$f(x)\equiv \sup_{i\in I} f_i(x)\in \text{Conv}(E).$$

证明：事实上，容易证明

$$\text{epi}(f)=\bigcap_{i\in I}\text{epi}(f_i).$$

利用定理 7.1.1 及任意凸集之交仍为凸集这一性质，即得所要结论. □

注：由于我们仅限讨论取值于$(-\infty,\ +\infty)$的凸函数，故一般地总要求定理中的函数族 $\{f_i;\ i\in I\}$ 满足

$$\sup_{i\in I} f_i(x)<+\infty,\ \forall x\in E.$$

下面讨论(上)下半连续的凸函数.

定理 7.1.3 设 A 是 Banach 空间 X 的闭凸子集，且 $f\in \mathrm{Conv}(A)$，则

f 是下半连续的 $\Leftrightarrow \mathrm{epi}(f)$ 在 $A\times \boldsymbol{R}^1$ 中是闭的.

证明："$\Rightarrow$"设 $(x, t)\in \overline{\mathrm{epi}(f)}$，则存在 $\{(x_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset \mathrm{epi}(f)$，使 $(x_n, t_n)\to(x, t)$，由于对一切 n，$(x_n, t_n)\in \mathrm{epi}(f)$，故 $f(x_n)\leqslant t_n$，从而

$$f(x)\leqslant \varliminf f(x_n)\leqslant \lim_n t_n = t.$$

于是，$(x, t)\in \mathrm{epi}(f)$，从而 $\mathrm{epi}(f)$ 是 $A\times \boldsymbol{R}^1$ 中的闭集. □

"$\Leftarrow$"令 $S_\lambda=\{x\in A; f(x)\leqslant\lambda\}$，对任何固定 λ，我们有

$$S_\lambda\times\lambda=\mathrm{epi}(f)\cap\{(x, t)\in A\times\boldsymbol{R}^1,\ t=\lambda\}$$

是 $A\times\boldsymbol{R}^1$ 中闭集，故 S_λ 是闭集，因此 f 是下半连续的.（事实上，若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$，$x_n\to x_0\in A$，任取 $k<f(x_0)$，由于 S_k 是闭集，且 $x_0\notin S_k$，故存在 x_0 点邻域 V，使 $S_k\cap V=\emptyset$，当 n 充分大时，$x_n\in V$，从而

$$\varliminf_n f(x_n)\geqslant k,$$

由 k 是任意小于 $f(x_0)$ 的数，故

$$\varliminf_n f(x_n)\geqslant f(x_0),$$

即 f 是下半连续的.）□

推论 7.1.4 设 A 是 Banach 空间 X 的闭凸集，$f\in \mathrm{Conv}(A)$，则

f 是下半连续的 $\Leftrightarrow f$ 是 w 下半连续的.

证明：由 Mazur 定理，凸集 $\mathrm{epi}(f)$ 是闭的当且仅当它是 w 闭的，容易看到 f 是 w 下半连续的当且仅当 $\mathrm{epi}(f)$ 是 w 闭的. 应用定理 7.1.3 即得所要结论. □

定理 7.1.5 若 K 是 Banach 空间 X 的非空紧凸集，$f: K\to\boldsymbol{R}^1$ 是下半连续凹函数，则 f 在 $\mathrm{ext}\,K$ 达到 f 在 K 上的极小值.

证明：这是推论 3.2.3 的一个特殊情况. □

关于凸函数连续性有一个很好的结果:

定理 7.1.6 设 A 是 Banach 空间 X 的一个开凸子集, 又 $f\in \mathrm{Conv}(A)$, 且 f 在 A 的某点 p 的一个邻域 U_p 是有上界的, 则 f 在 A 处处连续.

特别地, 若 f 在 A 的某个点连续, 则 f 在 A 处处是连续的.

证明: 首先证明 f 在 A 的任何点 q 的某个邻域 U_q 有上界. 事实上, 由于 A 是开集, 容易看到, 存在 $t>1$, 使 $p+t(q-p)\in A$.

不妨设 $U_p=p+V$, 其中 V 是 0 点的均衡凸邻域(实际上, 此时可取 $V=\{x; x\in X, \|x\|<\varepsilon\}$, 对某个 $\varepsilon>0$).

令 $\alpha=\sup\{f(x), x\in p+V\}$.

令 $U_q=q+\left(1-\frac{1}{t}\right)V$, 则对任何 $z\in U_q$, 有

$$z=q+\left(1-\frac{1}{t}\right)v, \text{对某个 } v\in V.$$

故

$$\begin{aligned}f(z)&=f\left(q-\left(1-\frac{1}{t}\right)p+\left(1-\frac{1}{t}\right)(p+v)\right)\\&\leqslant\frac{1}{t}f(p+t(q-p))+\left(1-\frac{1}{t}\right)\cdot\alpha.\end{aligned}$$

因此, f 在 q 的邻域 U_q 有上界.

下面证明, 若 f 在 $p\in A$ 的某个邻域有上界, 则 f 在 p 点连续: 事实上, 取 α、V 如上所说, 令 $0<\varepsilon<1$, 当 $z\in p+\varepsilon V$ 时, 有

$$z=(1-\varepsilon)p+\varepsilon(p+v_0), \text{对某个 } v_0\in V.$$

从而

$$f(z)\leqslant(1-\varepsilon)f(p)+\alpha\varepsilon,$$

$$f(z)-f(p)\leqslant\varepsilon(\alpha-f(p)).$$

另一方面, 由于对任何 $v\in V$, 有

$$p=\frac{1}{1+\varepsilon}(p+\varepsilon v)+\left(1-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)(p-v),$$

故 $$f(p)\leqslant\frac{1}{1+\varepsilon}f(p+\varepsilon v_0)+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}f(p-v_0)$$
$$\leqslant\frac{1}{1+\varepsilon}f(z)+\frac{\alpha\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

故，当 $z\in p+\varepsilon V$ 时，有

$$|f(z)-f(p)|\leqslant\varepsilon(\alpha-f(p)),$$

从而 $f(x)$ 在 p 点连续.

注 1: 由定理证明知，若 f 是 Banach 空间 X 的开凸子集 A 上的凸函数，则 f 在 $p\in A$ 上半连续等价于 f 在 p 点连续.

注 2: 从定理证明中，我们看到对 X 是局部凸空间时，定理仍然成立.

注 3: Asplund (Asplund, *Acat. Math.* 121(1968)31～47) 讨论了 Banach 空间 X 上连续凸函数的性质与 Banach 空间 X 本身所具有的性质之间的联系. Asplund 在文章中引入如下定义.

定义 7.1.3 Banach 空间 X 上连续凸函数 f 是一个函数，满足如下 4 个条件:

(1) f 是定义在 X 上的(或是定义在 X 的开凸子集 E 上的).

(2) f 取值于 $(-\infty, +\infty]$ (关于 $+\infty$ 运算，按通常方法规定).

(3) f 是凸函数.

(4) f 至少在一个点 $x\in X$ (或者 $x\in E$) 取有限值，且连续.

称 $D(f)\equiv\mathrm{dom}(f)\equiv\{x;\ f(x)<+\infty\}$ 为 f 的有效性定义域，又称 $C(f)\equiv\{x;\ f(x)$ 在 x 点连续$\}$ 为 f 的连续性定义域.

由定理证明知，$\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))=C(f)$. 并且，一般地，我们不讨论集合 $\{x; f(x)=+\infty\}$. 事实上，可以在 $D(f)$ 的边界 $\partial(D(f))$ 上补充 f 的定义，使 f 成为下半连续函数. 所以，在下面讨论时，一般仅考虑 $f: X$ (或 E) $\to\boldsymbol{R}^1$ 是连续凸函数，约定它

是连续的；并且是凸的(见参考书[2]165页)。

定义 7.1.4 若 f 是定义在 Banach 空间 X 的某个子集 A 上取值于 $\boldsymbol{R}^1$ 的函数，若存在 $K>0$，使得对任何 $x, y\in A$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K\|x-y\|,$$

则称 f 为 A 上的 Lipschitz 函数。

定义 7.1.7 若 f 是定义在 Banach 空间 X 的某个开凸集 A 上取值在 $\boldsymbol{R}^1$ 的函数，若对每个 $x\in A$，存在 x 的一个邻域 U_x 和常数 $K_x>0$，使得当 $y, z\in U_x$ 时，有

$$|f(y)-f(z)|\leqslant K_x\|y-z\|,$$

则称 f 是 A 上的局部 Lipshitz 函数。

定理 7.1.7 若 $f(x)$ 是 Banach 空间 X 的开凸集 A 上定义的连续凸函数，则 $f(x)$ 是 A 上的局部 Lipshitz 函数。

证明：任取 $x_0\in A$，由于 $f(x)$ 在 x_0 点连续，且 A 是开集，故存在 $\delta>0$，使得当 $x\in x_0+\delta U(X)$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant 1.$$

令 $M=1+|f(x_0)|$，$V=\dfrac{\delta}{8}U(X)$，则对任何 $y,z\in x_0+V$，有 $\|y-z\|<\dfrac{\delta}{4}$，从而，$\dfrac{2}{\delta}\|y-z\|<\dfrac{1}{2}$，且

$$z\pm\frac{\delta(y-z)}{2\|y-z\|}\in x_0+\delta U(X).$$

又
$$y=\left(1-\frac{2}{\delta}\|y-z\|\right)z+\frac{2}{\delta}\|y-z\|\left(z-\frac{\delta(z-y)}{2\|y-z\|}\right),$$

故
$$f(y)\leqslant\left(1-\frac{2}{\delta}\|y-z\|\right)f(z)+\frac{2}{\delta}\|y-z\|f\left(z-\frac{\delta(z-y)}{2\|y-z\|}\right),$$

所以，
$$f(y)-f(z)\leqslant\frac{2}{\delta}\|y-z\|\left(f\left(z-\frac{\delta(z-y)}{2\|z-y\|}\right)-f(z)\right)\leqslant\frac{4M}{\delta}\|y-z\|.$$

由于 y, z 处于对称地位，故

$$|f(y)-f(z)|\leqslant\frac{4M}{\delta}\|y-z\|.$$

这表明 f 是局部 Lipshitz 函数. □

(二)凸函数的共轭函数.

在第五章§3,定义 5.3.4 中,我们引入了共轭函数的概念,并且简单讨论了它的性质. 这里,再进行若干讨论.

注：这一小段中,我们假设 $f: X\to(-\infty, +\infty]$.

定义 7.1.6 设 φ 是 X^*(或 X^* 的开凸子集 B)上定义(取值于$(-\infty, +\infty]$)的凸函数,若存在 $x\in X$, $t\in \boldsymbol{R}^1$, 使对一切 $x^*\in X^*$, 有 $\varphi(x^*)\geqslant x^*(x)+t$, 则称

$${}^*\varphi(x)=\sup\{\langle x, x^*\rangle-\varphi(x^*);\ x^*\in X^*\}$$

为 φ 的前共轭函数,或简称 φ 的共轭函数.

特别地,对 $f\in\mathrm{Conv}(X)$可定义 ${}^*(f^*)$, 即 f 的二次共轭函数.

性质 7.1.7 若 f 是定义在 Banach 空间 X(或 X 的开凸集 E)上且取值于 $\boldsymbol{R}^1$ 的凸函数, 即 $f\in\mathrm{Conv}(X)$(或 $f\in\mathrm{Conv}(E)$), 则 f^* 是 w* 下半连续的凸函数, 且 f^* 的有效性定义域 $D(f^*)$是 X^* 中凸集.

证明: 对于任何 $x^*, y^*\in X^*$, $\alpha, \beta\geqslant0$, $\alpha+\beta=1$, 我们有

$$\begin{aligned}
&f^*(\alpha x^*+\beta y^*)\\
&\quad=\sup\{\alpha(\langle x, x^*\rangle-f(x))+\beta(\langle x, y^*\rangle-f(x));\ x\in X\}\\
&\quad\leqslant\alpha\sup\{\langle x, x^*\rangle-f(x);\ x\in X\}\\
&\qquad+\beta\sup\{\langle x, y^*\rangle-f(x);\ x\in X\}\\
&\quad=\alpha f^*(x^*)+\beta f^*(y^*).
\end{aligned}$$

因此, f^* 是凸函数,且 $D(f^*)$是凸集.

又设 $x_\delta^*\xrightarrow{\mathrm{w}^*}x^*$. 对任 $\varepsilon>0$, 存在 $x_\varepsilon\in X$, 使

$$\begin{aligned}
f^*(x^*)&\leqslant\langle x_\varepsilon, x^*\rangle-f(x_\varepsilon)+\varepsilon\\
&=\lim_{\delta}\langle x_\varepsilon, x_\delta^*\rangle-f(x_\varepsilon)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

又令 $\{x_\delta^*\}$ 的子定向列 $\{x_\alpha^*\}$，使

$$\lim_\alpha \sup\{\langle x, x_\alpha^*\rangle - f(x),\ x\in X\}$$

$$\leqslant \underline{\lim}\ \sup\{\langle x, x_\delta^*\rangle - f(x);\ x\in X\} + \varepsilon.$$

于是，$\lim\limits_\alpha \langle x_\varepsilon, x_\alpha^*\rangle - f(x_\varepsilon) \leqslant \lim\limits_\alpha \sup\{\langle x, x_\alpha^*\rangle - f(x);\ x\in X\}$，

故 $\quad f^*(x^*) \leqslant \underline{\lim}\ \sup\{\langle x, x_\delta^*\rangle - f(x);\ x\in X\} + 2\varepsilon$，

由 ε 的任意性，知

$$f^*(x^*) \leqslant \underline{\lim}\ f^*(x_\delta^*).$$

故 f^* 是 w^* 下半连续的. □

同样证明可得

性质 7.1.8 若 $f\in \mathrm{Conv}(X)$（或 $f\in \mathrm{Conv}(E)$），则 $^*(f^*)$ 是凸的 w 下半连续函数. 且 $D(^*(f^*))$ 是凸集. 又若 φ: $X^*\to(-\infty, +\infty]$，则 $^*\varphi$ 是凸的 w 下半连续函数，且 $D(^*\varphi)$ 是凸集.

注：性质 7.1.8 中，若考虑 f: $X\to(-\infty, +\infty]$ 的凸函数，结论也成立.

性质 7.1.9 若 φ，ψ 是 $X^*\to(-\infty, +\infty]$ 的凸函数，且 $\varphi\leqslant\psi$，则 $^*\varphi\geqslant {}^*\psi$.

证明：从定义出发直接得到. □

性质 7.1.10 若 f: $X\to(-\infty, +\infty]$ 是凸函数，且 $f\not\equiv+\infty$，则

$^*(f^*)=f \Leftrightarrow f$ 是 w 下半连续的.

同样，若 φ: $X^*\to(-\infty, +\infty]$，且 $\varphi\not\equiv+\infty$，则

$(^*\varphi)^*=\varphi \Leftrightarrow \varphi$ 是 w^* 下半连续凸函数.

证明：由性质 7.1.8 注，$^*(f^*)$ 是 w 下半连续的，故必要性是显然的.

充分性：容易看到，$^*(f^*)\leqslant f$.

若存在 $x_0\in X$，使

$$^*(f^*)(x_0) < f(x_0),$$

则 $(x_0, {}^*(f^*)x_0)\notin \mathrm{epi}(f)$，由于 f 是 w 下半连续凸函数，由定理

7.1.3 知, epi(f)是闭凸集,根据分离定理,存在

$$(x_0^*, \alpha)\in(X\times\boldsymbol{R}^1)^*=(X^*\times\boldsymbol{R}^1),$$

使

$$\begin{aligned}&x_0^*(x_0)+\alpha({}^*(f^*))(x_0)\\&\quad>\sup\{\langle x, x_0^*\rangle+\alpha t;\ \forall(x, t)\in\mathrm{epi}(f)\}.\end{aligned}\tag{7.1}$$

因为当$(x, t)\in\mathrm{epi}(f)$时,有$(x, n+t)\in\mathrm{epi}(f)$,对一切自然数 n. 故 $\alpha\leqslant 0$.

我们有 $\alpha\neq 0$. 事实上,若 $\alpha=0$, 则

$$x_0^*(x_0)>\sup\{\langle x, x_0^*\rangle;\ x\in D(f)\}.$$

由假设 $D(f^*)\neq\emptyset$, 选 $y_0^*\in D(f^*)$, 令 $h>0$, 则

$$\begin{aligned}f^*(y_0^*+hx_0^*)&-\sup\{\langle x, y_0^*+hx_0^*\rangle-f(x);\ x\in D(f)\}\\&\leqslant h\cdot\sup\{\langle x, x_0^*\rangle;\ x\in D(f)\}\\&\quad+\sup\{\langle x, y_0^*\rangle-f(x);\ x\in D(f)\}\\&=h\cdot\sup\{\langle x, x_0^*\rangle;\ x\in D(f)\}+f^*(y_0^*),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}{}^*(f^*)(x_0)&\geqslant\langle x_0, y_0^*+hx_0^*\rangle-f^*(y_0^*+hx_0^*)\\&\geqslant\langle x_0, y_0^*\rangle-f^*(y_0^*)\\&\quad+h(\langle x_0, x_0^*\rangle-\sup\{\langle x, x_0^*\rangle;\ x\in D(f)\}).\end{aligned}$$

令 $h\to+\infty$, 则 ${}^*(f^*)(x_0)\to+\infty$,这与 ${}^*(f^*)(x_0)<f(x_0)$矛盾!故 $\alpha\neq 0$.

从而 $\alpha<0$, 用$(-\alpha)$除(7.1)式两边,得到

$$\begin{aligned}&\left\langle x_0, \left(-\frac{1}{\alpha}x_0^*\right)\right\rangle-{}^*(f^*)(x_0)\\&\quad>\sup\left\{\left\langle x, -\frac{1}{\alpha}x_0^*\right\rangle-t;\ (x, t)\in\mathrm{epi}(f)\right\}\\&\quad=\sup\left\{\left\langle x, -\frac{1}{\alpha}x_0^*\right\rangle-f(x);\ x\in D(f)\right\}\\&\quad=f^*\left(-\frac{1}{\alpha}x_0^*\right).\end{aligned}$$

从而,我们有

$$^*(f^*)(x_0)<\left\langle x_0,\ -\frac{1}{\alpha}x_0^*\right\rangle-f^*\left(-\frac{1}{\alpha}x_0^*\right),$$

这与 $^*(f^*)$的定义矛盾！故 $^*(f^*)=f$.

另一命题可用同样方法证明. □

(三)凸函数的方向导数、Gateaux 导数及 Fréchet 导数

定义 7.1.7 若 E 是 Banach 空间X的开子集，$f: E\to \boldsymbol{R}^1$. 我们说 f 在 $x_0\in E$ 是 Fréchet 可微的，如果存在一个元 $x^*\in X^*$，使得，对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\|x\|<\delta$ 时，有

$$|f(x_0+x)-f(x_0)-\langle x,\ x^*\rangle|\leqslant\varepsilon\|x\|,$$

即
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)-\langle x,\ x^*\rangle}{\|x\|}=0,$$

此时，称 x^* 为 $f(x)$在 x_0 点的 Fréchet 导数.

定义 7.1.8 若 E 是 Banach 空间 X 的开子集，一个函数 $f: E\to \boldsymbol{R}^1$ 称为在 $x_0\in E$ 是 Gateaux 可微的，如果存在 $x^*\in X^*$，使得对每个 $x\in X$，有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t}=\langle x,\ x^*\rangle.$$

此时，称 x^* 为 $f(x)$在 x_0 点的 Gateaux 导数.

注 定义 7.1.7 和定义 7.1.8 显然是范数的 F 可微性和 G 可微性的一种推广.

定义 7.1.9 令 E 是 Banach 空间 X 的开子集，一个函数 $f: E\to \boldsymbol{R}^1$ 称为在 $x_0\in E$ 沿 u 的方向导数存在，如果

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}$$

存在. 此时，记这个极限为 $f'(x_0)(u)$.

注 1：下面将看到，当 f 关于每个方向的方向导数存在时，$f'(x_0)(u)$是 u 的有界线性泛函，且 $f'(x_0)(\cdot)$就是 f 在 x_0 点的 G 导数.

注 2：也可定义右方向导数 $f'_+(x_0)(u)$,

$$f'_+(x_0)(u)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}.$$

及左方向导数 $f'_-(x_0)(u)$,

$$f'_-(x_0)(u)=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}.$$

性质 7.1.11 (1)若 f 在 x_0 点是 F 可微的,则 f 在 x_0 点是 G 可微的,且两个导数相等.

(2) 当 $X=\boldsymbol{R}^n$ 时,若 f 是 X 上凸函数, 则 $f(x)$ 在 x_0 点是 F 可微的当且仅当 $f(x)$ 在 x_0 点是 G 可微的.

注 1: 当 $X=\boldsymbol{R}^n$ 时, f 的 F 导数即全微分.

注 2: 当 X 是无限时,两者是不一致的. 例如 l_1 的范数在点$\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \cdots\right)$是 G 可微的,但不是 F 可微的.

证明: (1)是显然成立的.

(2) 设 $\{e_1,\ \cdots,\ e_n\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中范数为 1 的基. 由假设,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t}=\langle e_i,\ x^*\rangle$$

存在,其中 x^* 为 f 在 x_0 点的 G 导数.

令 $\varphi(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-\langle h,\ x^*\rangle$, 则 $\varphi(h)$ 是关于 h 的凸函数,且

$$\varphi(h)=\varphi\left(\sum_{i=1}^n h_ie_i\right)=\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h_i ne_i\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\varphi(h_ine_i)$$

由 G 导数的定义知,

$$\lim_{h_i\to 0}\frac{\varphi(h_ine_i)}{nh_i}$$

$$=\lim_{h_i\to 0}\frac{f(x_0+h_ine_i)-f(x_0)-nh_i\langle e_i,\ x^*\rangle}{nh_i}=0. \qquad (7.2)$$

另一方面,

$$\varphi(h)\leqslant\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\varphi(h_i ne_i)}{nh_i}$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|h_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varphi(h_i ne_i)}{nh_i}\right)^2\right)^{1/2}. \qquad (7.3)$$

由于对任何实数组$(a_1, \cdots, a_n)$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{1/2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|,$$

所以，由(7.3)有

$$\varphi(h)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|h_i|^2\right)^{1/2}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\varphi(h_i ne_i)}{nh_i}\right|$$
$$\leqslant K\|h\|\cdot\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\varphi(h_i ne_i)}{nh_i}\right|,$$

其中 K 为$(\boldsymbol{R}^n, \|\cdot\|)$与$(\boldsymbol{R}^n, \|\cdot\|_2)$的线性同胚常数.

从而，也有

$$\varphi(-h)\leqslant K\|h\|\cdot\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\varphi(-h_i ne_i)}{nh_i}\right|,$$

由于φ是凸函数，故

$$0=\varphi\left(\frac{h-h}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(\varphi(h)+\varphi(-h)).$$

于是，
$$-K\|h\|\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\varphi(-h_i ne_i)}{h_i n}\right|$$
$$\leqslant-\varphi(-h)\leqslant\varphi(h)\leqslant K\|h\|\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\varphi(h_i ne_i)}{h_i n}\right|,$$

所以，
$$\frac{|\varphi(h)|}{\|h\|}\leqslant K\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\varphi(h_i ne_i)}{h_i n}\right|,\ \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\varphi(-h_i ne_i)}{h_i n}\right|\right\},$$

结合(7.2)，就得到f在x_0点是F可微的. □

定理7.1.12 若f是Banach空间X的开凸子集E上定义的一个凸函数，则对任$x_0\in E$, $u\in X$, $f(x)$在x_0点关于u的左、右方向导数总是存在的，且

$$-f'_+(x_0)(-u)=f'_-(x_0)(u),$$

并且，$f'_+(x_0)(u)$是正齐性、次可加泛函(正齐性次可加泛函叫次线性泛函)。

证明：设 $0<s\leqslant t$，使 $x_0+tu\in E$，

$$f(x_0+su)=f\left(\frac{s}{t}(x_0+tu)+\frac{t-s}{t}x_0\right)$$
$$\leqslant\frac{s}{t}f(x_0+tu)+\frac{t-s}{t}f(x_0),$$

从而 $$\frac{f(x_0+su)-f(x_0)}{s}\leqslant\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}.$$

由于 E 是开集，存在 $t_0>0$，使 $x_0\pm t_0u\in E$，则当 $t_0>t>0$ 时，有

$$f(x_0)=f\left(\frac{t_0}{t+t_0}(x_0+tu)+\frac{t}{t+t_0}(x_0-t_0u)\right)$$
$$\leqslant\frac{t_0}{t+t_0}f(x_0+tu)+\frac{t}{t+t_0}f(x_0-t_0u).$$

所以，当 $t_0>t>0$ 时，有

$$\frac{1}{t_0}(f(x_0)-f(x_0-t_0u))\leqslant\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}.$$

由上面证明知道，$\dfrac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}$ 关于 $t(t>0)$ 是单调不减的，且当 $t\searrow 0$ 时，有下界，所以

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}=f'_+(x_0,u)\text{总存在。}$$

并且，还有

$$f'_-(x_0)(u)=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}$$
$$=-\lim_{t'\to 0^+}\frac{f(x_0+t'(-u))-f(x_0)}{t'}$$
$$=-f'_+(x_0)(-u),$$

$f'_+(x_0)(u)$ 的正齐性是显然的．又对一切充分小 $t>0$，

$$\frac{f(x_0+t(u+v))-f(x_0)}{t}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\frac{f(x_0+2tu)-f(x_0)}{2}+\frac{1}{2}\frac{f(x_0+2tv)-f(x_0)}{2}.$$

两边取极限得到，

$$f'_+(x_0)(u+v) \leqslant f'_+(x_0)(u) + f'_+(x_0)(v).$$

故 $f'_+(x_0)(\cdot)$ 是次可加的. □

推论 7.1.13 在定理的条件下,还有

(1) $-f'_+(x_0)(-x) \leqslant f'_+(x_0)(x)$, $\forall x \in X$.

(2) 若 $f'_+(x_0)(u)$ 是 u 的线性函数, 则 $f'(x_0)(u)$ 存在, 因此, 此时 $f(x)$ 在 x_0 点是 G 可微的, 且 f 在 x_0 点 G 导数就是 $f'(x_0)(\cdot)$, 并且,反之也成立.

证明: (1) 因为

$$f'_+(x_0)(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t\cdot 0) - f(x_0)}{t} = 0,$$

故 $$0 = f'_+(x_0)(0) \leqslant f'_+(x_0)(x) + f'_+(x_0)(-x).$$

故(1)成立. □

(2) 若 $f'_+(x_0)(u)$ 是线性泛函,则

$$f'_-(x_0)(u) = -f'_+(x_0)(-u) = f'_+(x_0)(u),$$

从而,下列极限存在,且

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tu) - f(x_0)}{t} = f'_+(x_0)(u).$$

又由定理 7.1.12 的证明知,对某个 $1 \geqslant t_0 > 0$, 使 $x_0 + t_0 u \in E$, 有

$$f'_+(x_0)(u) \leqslant \frac{f(x_0+t_0 u) - f(x_0)}{t_0}.$$

由于 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 故存在 x_0 的一个邻域 U_{x_0}, 使得当 $y \in U_{x_0}$ 时,有 $|f(y)| \leqslant M$, 从而当 $u + x_0 \in U_{x_0}$ 时

$$|f'_+(x_0)(u)| \leqslant 2Mt_0^{-1}.$$

于是, $f'_+(x_0) \in X^*$. 即 $f(x)$ 在 x_0 点 G 可微, 且 $f'_+(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点的 G 导数.

另一方面的结论是显然的. □

(四)凸函数的次梯度(次微分).

次梯度是研究凸函数的一种重要工具.

在本小段, 不作特别声明, 总假设 D 是 Banach 空间 X 的

开凸子集. $f: D\to \boldsymbol{R}^1$ 是连续的凸函数.

定义 7.1.10 令 f 是开凸子集 D 上的连续凸函数, 对于 $x_0\in D$, 如果存在 $x^*\in X^*$, 满足下列条件:

$$\langle y-x_0,\ x^*\rangle\leqslant f(y)-f(x_0),\ \forall y\in D,$$

则称 x^* 为 f 在 x_0 点的次梯度. 记

$\partial f(x_0)=\{x^*\in X^*;\ x^*$ 是 $f(x)$ 在 x_0 点次梯度$\}$.

注: 次梯度也叫次微分, 它是范数支撑映像的一种推广.

性质 7.1.14 (1) $\partial f(x)$ 是非空 w* 紧凸集, $\forall x\in D$.

(2) $\partial f(x)$ 是单点集当且仅当 $f(x)$ 在 x 点 G 可微.

(3) 若定义 $\partial f: D\to 2^{X^*}=\{B;\ B\subset X^*\}$, 则 ∂f 是局部有界的, 即对任何 $x_0\in D$, 存在 $M>0$ 和 x_0 点的邻域 U_{x_0}, 使得当 $x\in U_{x_0}$ 时, 对一切 $x^*\in\partial f(x)$, 有

$$\|x^*\|\leqslant M.$$

证明: (1) 由定理 7.1.12 及推论 7.1.13 知,

$$-f'_+(x_0)(-x)\leqslant f'_+(x_0)(x),$$

若对一切 x, 上式中等号成立, 则 $f'_+(x_0)\in\partial f(x_0)$. 这表明 $\partial f(x_0)\neq\emptyset$.

否则, 存在 $y\in X$, 使

$$-f'_+(x_0)(-y)<f'_+(x_0)(y).$$

选 $\alpha\in\boldsymbol{R}^1$, 使

$$-f_+(x_0)(-y)<\alpha<f'_+(x_0)(y).$$

令 $M=\operatorname{span}\{y\}$, 定义 $\psi\in M^*$, $\psi(ty)=t\alpha$, $\forall t$. 则对一切 $x\in M$, 有

$$\psi(x)\leqslant f'_+(x_0)(x).$$

由 Hahn-Banach 定理, 存在 ψ 的延拓 $\bar\psi$, 使 $\bar\psi$ 是 X 上线性泛函, 且满足 $\bar\psi\leqslant f'_+(x_0)$. 于是, 当 $u\in X$, $\|u\|$ 充分小时, 有

$$\bar\psi(u)\leqslant f'_+(x_0)(u)\leqslant f(x_0+u)-f(x_0).$$

由推论 7.1.13 的证明知, $\psi\in X^*$, 从而 $\bar\psi\in\partial f(x_0)$, 故此时也有 $\partial f(x_0)\neq\emptyset$.

显然，$\partial f(x_0)$是凸集．并且，容易看到$\partial f(x_0)$是 w* 闭的．

下面证明$\partial f(x_0)$是相对 w* 紧集．事实上，由于D是开凸集，$x_0\in D$，$f(x)$在x_0点连续，从而存在 0 点的邻域$B(0, \varepsilon)$，使$x_0+B(0, \varepsilon)\subset D$，并且当$y\in B(0, \varepsilon)$时，有

$$|f(x_0+y)-f(x_0)|<1.$$

我们有$\partial f(x_0)\subset\left(\bar{B}\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^0$．$\Big($事实上，当$y\in\bar{B}\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$时，有$f(x_0+y)-f(x_0)\leqslant 1$，故若$x^*\in\partial f(x_0)$，则

$$\langle y, x^*\rangle\leqslant f(y+x_0)-f(x_0)\leqslant 1,$$

且
$$-\langle y, x^*\rangle\leqslant f(-y+x_0)-f(x)\leqslant 1,$$

即$|\langle y, x^*\rangle|\leqslant 1$，这表明

$$\partial f(x_0)\subset\left(\bar{B}\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^0\Big).$$

由此得到$\partial f(x_0)$是 w* 紧凸集．□

(2) "$\Rightarrow$"若f在x_0点是 G 可微的，则$f'(x_0)$存在，且

$$f'(x_0)(x-x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t(x-x_0))-f(x_0)}{t}$$
$$\leqslant f(x)-f(x_0), \forall x\in D.$$

所以，
$$f'(x_0)\in\partial f(x_0).$$

又若$x^*\in\partial f(x_0)$，则对一切充分小的$t>0$，有

$$\langle (x_0+tu)-x_0, x^*\rangle\leqslant f(x_0+tu)-f(x_0).$$

故，对一切充分小的$t>0$，有

$$\langle u, x^*\rangle\leqslant\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}.$$

从而，$\langle u, x^*\rangle\leqslant f'(x_0)(u)$，$\forall u$．同样地，也有

$$\langle -u, x^*\rangle\leqslant f'(x_0)(-u),$$

故
$$\langle u, x^*\rangle=f'(x_0)(u), \forall u,$$

即$x^*=f'(x_0)$，于是$\partial f(x_0)=\{f'(x_0)\}$．□

"$\Leftarrow$"由(1)的证明知，若$\partial f(x_0)$是单点集，则对一切x，有$f'_-(x_0)(x)=f'_+(x_0)(x)$，这表明，$f'(x)(u)$存在，由推论 7.1.13

知，$f(x)$在 x_0 点是 G 可微的. □

(3) 由定理 7.1.6 知，f 在 D 上是局部 Lipschitz 函数. 即对任何 $x_0\in D$，存在 x_0 的邻域 U_{x_0}，和 K_{x_0}，使得当 $y, z\in U_{x_0}$ 时，有

$$|f(y)-f(z)|\leqslant K_{x_0}\|y-x\|.$$

对任何 $y\in U_{x_0}$，$y^*\in\partial f(y)$，取 V 使 $y+V\subset U_{x_0}$，于是对任何 $u\in V$，有

$$\langle u, y^*\rangle\leqslant f(y+u)-f(y)\leqslant K_{x_0}\|u\|,$$

由于 V 是 0 点邻域，故有 $\|y^*\|\leqslant M_{x_0}$. □

次梯度映像并不是"线性的"，但是却有下面的性质.

性质 7.1.15 若 f、g 是 Banach 空间 X 的开凸子集 A 上定义的连续凸函数，则对 $p\in A$ 和 $s, t\geqslant 0$，有

$$\partial(sf+tg)=s\partial f(p)+t\partial g(p).$$

证明：首先证明，

$$f'_+(p)(x)=\max\{x^*(x);\ x^*\in\partial f(p)\},\tag{7.4}$$

且

$$-f'_+(p)(-x)=f'_-(p)(x)=\min\{x^*(x);\ x^*\in\partial f(p)\}.\tag{7.5}$$

事实上，由性质 7.1.14(1) 知，$\partial f(p)$是非空 w* 紧凸集，故 (7.4)、(7.5) 右边都能达到. 又由性质 7.1.14 (2)的证明知道，

$$\max\{x^*(x);\ x^*\in\partial f(p)\}\leqslant f'_+(p)(x),$$

也有
$$\max\{x^*(-x);\ x^*\in\partial f(p)\}\leqslant f'_+(p)(-x)$$

所以，
$$\begin{aligned}f'_-(p)(x)&=-f'_+(p)(-x)\\&\leqslant\min\{x^*(x);\ x^*\in\partial f(p)\}\\&\leqslant\max\{x^*(x);\ x^*\in\partial f(p)\}\leqslant f'_+(p)(x)\ .\end{aligned}$$

固定 x，若 $\max\{x^*(x);\ x^*\in\partial f(p)\}<f'_+(p)(x)$，令 $M=\operatorname{span}\{x\}$，及 $\psi\in M^*$，使 $\psi(tx)=t\alpha$，$\forall t\in\boldsymbol{R}^1$，其中 $\max\{x^*(x);\ x^*\in\partial f(p)\}<\alpha<f'_+(p)(x)$. 于是在 M 上有 $\psi\leqslant f'_+(p)$，同定理7.1.14(2)的证明，得到 ψ 的延拓 $\bar\psi\in\partial f(p)$，但这时，有

$$\max\{x^*(x);\ x^*\in\partial f(p)\}<\alpha=\overline{\psi}(x),$$

矛盾！这表明对一切 $x\in X$，有

$$\max\{x^*(x);\ x^*\in\partial f(p)\}=f'_+(p)(x),$$

即(7.4)成立．从而

$$f'_-(p)(x)=-f'_+(p)(-x)=\min\{x^*(x);\ x^*\in\partial f(p)\}.$$

于是(7.5)成立．

现在令 $h=sf+tg$，则

$$\begin{aligned}
&\max\{\psi(x);\ \psi\in\partial h(p)\}\\
&\quad=h'_+(p)(x)=sf'_+(p)(x)+tg'_+(p)(x)\\
&\quad=s\cdot\max\{\psi(x);\ \psi\in\partial f(p)\}+t\cdot\max\{\psi(x);\ \psi\in\partial g(x)\}\\
&\quad=\max\{\psi(x);\ \psi\in s\cdot\partial f(p)+t\cdot\partial g(p)\}.
\end{aligned}$$

又由于 $s\cdot\partial f(p)+t\cdot\partial g(p)\subset\partial h(p)$，且 $s\cdot\partial f(p)+t\cdot\partial g(p)$ 与 $\partial h(p)$ 都是 w^* 紧凸集，故

$$\partial(sf+tg)(p)=s\cdot\partial f(p)+t\cdot\partial g(p).\ \square$$

下面的定理进一步说明次梯度的几何意义．

定理 7.1.16 若 f 是 X 的开凸集 A 上定义的连续凸函数，则

(1) 若 $x^*\in X^*$，则

$$x^*\in\partial f(x_0)\Leftrightarrow h(x)=f(x_0)+x^*(x-x_0)$$

是 $\mathrm{epi}(f)$ 在点 $(x_0,\ f(x_0))$ 的支撑超平面（即 h 的图 $(x,\ h(x))$ 是 $\mathrm{epi}(f)$ 的支撑超平面）．

(2) 反之，若 $(x^*,\ s)\in X^*\times\boldsymbol{R}^1$，且 $H=\{(x,\ t)\in X^*\times\boldsymbol{R}^1;\ x^*(x)+st=\alpha\}$ 是 $\mathrm{epi}(f)$ 在 $(x_0,\ f(x_0))$ 点的支撑超平面．令

$$\alpha=\inf(x^*,\ s)(\mathrm{epi}(f)),$$

则当 $s\neq 0$ 时，有 $s>0$，且 $-\dfrac{x^*}{s}$ 是 f 在 x_0 点的次梯度．

证明：(1) 由次梯度的定义知，$x^*\in\partial f(x_0)\Leftrightarrow h|_A\leqslant f$．

定义 $\Phi\in X^*\times\boldsymbol{R}^1$，$\Phi(x,\ t)\equiv-x^*(x)+t$．令 $\alpha=f(x_0)-x^*(x_0)$，则

$$h|_A \leqslant f \Leftrightarrow \inf \Phi(\mathrm{epi}(f)) = \Phi(x_0, f(x_0) = \alpha.$$

因此，超平面 $\{(x,t); \Phi(x,t)=\alpha\}$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 点支撑 $\mathrm{epi}(f)$，很清楚，$h(x)$ 的图 $(x, h(x))$ 就是超平面 $\{(x, t); \Phi(x, t)=\alpha\}$。
□

(2) 由条件知，$\alpha = x^*(x_0)+sf(x_0) \leqslant x^*(x)+st$，$\forall x \in A$，及 $t \geqslant f(x_0)$. 故 $\geqslant s0$. 若 $s \neq 0$，则

$$\frac{1}{s} x^*(x_0) + f(x_0) \leqslant \frac{1}{s} x^*(x) + t,$$

$$\forall t \in A,\ t \geqslant f(x).$$

从而，对一切 $x \in A$,

$$\left(-\frac{1}{s} x^*\right)(x - x_0) \leqslant f(x) - f(x_0),$$

所以，$-\frac{1}{s} x^* \in \partial f(x_0)$. □

由于次梯度映像一般是集值映像，在讨论它的"连续性"时，我们引入下面的定义：

定义 7.1.11 令 E、F 是拓扑空间，集值映像 $\varphi: E \to 2^F = \{B;\ B \subset F\}$ 称为在 $x \in E$ 点上半连续. 如果对任何含 $\varphi(x)$ 的邻域 W，存在 x 的一个邻域 V，使得当 $y \in V$ 时，有 $\varphi(y) \subset W$；φ 称为在 $x \in E$ 点下半连续. 如果对任何满足 $W \cap \varphi(x) \neq \emptyset$ 的开集 W，总存在 x 的邻域 V，使得当 $y \in V$ 时，有

$$\varphi(y) \cap W \neq \emptyset.$$

注：当 φ 为单值映像时，φ 在 x 点上半连续 $\Leftrightarrow \varphi$ 在 x 点（按通常定义）连续.

下面讨论次梯度映像的连续性.

定理 7.1.17 若 f 是 X 的开凸集 A 上定义的连续凸函数，则次梯度映像 $\partial f: X \to 2^{X^*} = \{B;\ B \subset X^*\}$ 是范-w* 上半连续的.

特别地，当 f 是 G 可微时，次梯度映像是范-w* 连续的.

证明：令 $x \in A$，任取 X^* 的 w* 开集 W，使 $\partial f(x) \subset W$.

首先，我们看到，如果 $x_n \to x$，及 $x_n^* \in \partial f(x_n)$，则存在 $\{x_n^*\}$ 的

子定向列$\{x_\alpha^*\}$，使$x_\alpha^* \xrightarrow{\text{w}^*} x^*\in\partial f(x)$．事实上，由于$\partial f(x)$是局部有界的，故存在$x$的邻域$U_x$及$M>0$，使得当$y\in U_x$时，有$\|\partial f(y)\|\leqslant M$．所以，当$n>N$(对某个充分大的$N$)时，有$\|x_n^*\|\leqslant M$，由 Banach-Alaoglu 定理，存在$\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$的子定向列$\{x_\alpha^*\}$，使$x_\alpha^* \xrightarrow{\text{w}^*} x^*\in X^*$，则对一切$y\in A$，有

$$\langle y-x,\ x_\alpha^*\rangle - M\|x-x_\alpha\| \leqslant \langle y-x_\alpha,\ x_\alpha^*\rangle \leqslant f(y)-f(x_\alpha),$$

又由于$x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$，$x_\alpha^* \xrightarrow{\text{w}^*} x^*$，故对一切$y\in A$，有

$$\langle y-x,\ x^*\rangle \leqslant f(y)-f(x),$$

所以，$x^*\in\partial f(x)$，于是$x_\alpha^* \xrightarrow{\text{w}^*} x^*\in\partial f(x)$．

由于次梯度映像是局部有界的，取x的邻域U_x和$M>0$，使得当$y\in U_x$，$y^*\in\partial f(y)$，有$\|y^*\|\leqslant M$．于是，必存在x的邻域V_x，使$V_x\subset U_x$，且当$y\in V_x$时，有$\partial f(y)\subset W$．事实上，否则存在$\{x_n^*\}_{n=1}^\infty\subset X$，使$x_n\to x$，但是，$\partial f(x_n)\not\subset W$，选$x_n^*\in\partial f(x_n)\setminus W$，由上面证明知，存在$\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$的子定向列$\{x_\alpha^*\}$，使$x_\alpha^* \xrightarrow{\text{w}^*} x^*\in\partial f(x)$．由于$\partial f(x)\subset W$，故$W$是含$x^*$的$\text{w}^*$邻域．因此，存在$\alpha_0$，当$\alpha>\alpha_0$时，有$x_\alpha^*\in W$，这与$x_\alpha^*$的选取矛盾！于是，我们得到次梯度映像是范-$\text{w}^*$上半连续的．□

引理 7.1.18 设f是X的开凸子集A上定义的连续凸函数，又f在x_0点的 F 导数$f'(x_0)$存在，且若$\{\beta_n\}_{n=1}^\infty\subset\boldsymbol{R}^1$，$\beta_n\to 0$，$U$是$X$的 0 点邻域，那么如果$\{x_n^*\}_{n=1}^\infty\subset X^*$满足，对一切$y\in U$，有

$$\langle y,\ x_n^*\rangle \leqslant f(x_0+y)-f(x_0)+\beta_n, \tag{7.6}$$

则

$$\|x_n^*-f'(x_0)\|\to 0.$$

证明：设$\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$满足(7.6)，但$\|x_n^*-f'(x_0)\|>2\varepsilon$，对某个$\varepsilon>0$，则存在$z_n\in S(X)$，使

$$\langle z_n,\ x_n^*-f'(x_0)\rangle>2\varepsilon.$$

由于$f(x)$在x_0点的 F 导数为$f'(x_0)$，故对这个$\varepsilon>0$，存在

$\delta>0$，使 $\overline{B}(0, \delta)\subset U$，且当$\|y\|\leqslant\delta$时，有

$$f(x_0+y)-f(x_0)-f'(x_0)(y)\leqslant\varepsilon\|y\|.$$

令 $y_n=\delta z_n$，则 $\|y_n\|=\delta$，从而

$$\begin{aligned}2\varepsilon\delta&<\langle y_n, x_n^*-f'(x_0)\rangle\\&=\langle y_n, x_n^*\rangle-\langle y_n, f'(x_0)\rangle\\&\leqslant f(x_0+y_n)-f(x_0)+\beta_n-\langle y_n, f'(x)\rangle\\&\leqslant\varepsilon\|y_n\|+\beta_n=\varepsilon\delta+\beta_n,\end{aligned}$$

由于 $\beta_n\to 0$，故 $2\varepsilon\delta\leqslant\varepsilon\delta$，矛盾！□

定理 7.1.19 若 f 是 X 的开凸集 A 上定义的连续凸函数，又 f 在 x_0 点 F 可微，则 ∂f 是范-范上半连续的.

特别地，若 f 在 A 的每个点是 F 可微的，则 ∂f 是范-范连续的.

证明：设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$，$x_n\to x_0\in A$.

任取 $x_n^*\in\partial f(x_n)$，令

$$\beta_n=\langle x_n-x_0, x_n^*\rangle-f(x_n)+f(x_0).$$

由于 $x_n\to x_0$，且 f 是连续的，于是 $\beta_n\to 0$，又由于 $x_n^*\in\partial f(x_n)$，故对充分小的 y（使 $x_0+y\in A$），有

$$\langle(x_0+y)-x_n, x_n^*\rangle\leqslant f(x_0+y)-f(x_n).$$

从而，对充分小的 y（使 $x_0+y\in A$），有

$$\begin{aligned}\langle y, x_n^*\rangle&\leqslant f(x_0+y)-f(x_0)+\langle x_n-x_0, x_n^*\rangle-f(x_n)+f(x_0)\\&=f(x_0+y)-f(x_0)+\beta_n.\end{aligned}$$

由引理 7.1.18 知，$\|x_n^*-f'(x_0)\|\to 0$. □

此外，对 Fréchet 导数还有下面定理. 但是关于 Gateaux 导数尚不知相应的定理是否成立.

定理 7.1.20 设 f 是 Banach 空间 X 的开凸子集 D 上的连续凸函数，则 $F(f, D)\equiv\{x\in D; f(x)$在 x 点是 F 可微的$\}$是一个 G_δ 集.

注：$F(f, D)$ 可能是空集. 例如，$F(\|\cdot\|_{l_1}, D)=\emptyset$.

证明：令 $U_n=\{x\in D$；存在 $B(x, \delta)\subset D$，且对任何 x_1，

$x_2\in B(x,\delta)$，有

$$\sup\{\|x_1^*-x_2^*\|;\ x_i^*\in\partial f(x_i),\ i=1,2\}<\frac{1}{n}\Big\}.$$

很清楚，U_n 是开集.

令 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$，则 $A=F(f,D)$. 事实上，若 $x_0\in F(f,D)$，则 $\partial f(x_0)=f'(x_0)$，由定理 7.1.19 知，$x_0\in A$，故 $F(f,D)\subset A$. 反之，若 $x_0\in A$，则特别地，有对一切 n，$\mathrm{diam}\,\partial f(x_0)<\frac{1}{n}$，因此，$\partial f(x_0)$ 是单点集. 所以，由性质 7.1.14 知，$f(x)$ 在 x_0 点是 G 可微的. 令 $\{x_0^*\}=\partial f(x_0)$. 固定 n，由于 $x_0\in A$，故存在 $B(x,\delta)$，使得当 $x_1,x_2\in B(x,\delta)$，有

$$\|x_1^*-x_2^*\|<\frac{1}{n},$$

其中 $x_i^*\in\partial f(x_i)$，$i=1,2$. 因而，当 $\|y\|<\delta$，$y^*\in\partial f(x_0+y)$ 时，有

$$\|y^*-x_0^*\|<\frac{1}{n},\ \text{又}$$

$$\langle -y,y^*\rangle=\langle x_0-(x_0+y),y^*\rangle\leqslant f(x_0)-f(x_0+y),$$

所以，当 $\|y\|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}f(x_0+y)-f(x_0)&\leqslant\langle y,y^*\rangle=\langle y,x_0^*\rangle+\langle y,y^*-x_0^*\rangle\\&\leqslant\langle y,x_0^*\rangle+\frac{1}{n}\|y\|.\end{aligned}$$

因此，$f(x)$ 在 x_0 点 F 可微，i. e，$x_0\in F(f,D)$. 因此 $A\subset F(f,D)$. 即 $A=F(f,D)$. 所以 $F(f,D)$ 是 G_δ 集. □

(五)连续规函数的 G 可微与 F 可微.

在第五章中，我们讨论了范数的 G 可微性及 F 可微性. 大家知道，范数是一种特殊的凸函数. 下面，我们讨论一种稍微广泛一点的一类凸函数——由 X 的具有非空内点的凸集 C 生成的连续规函数.

注：在第一部分第二章中，我们定义由均衡凸吸收集生成的 Minkowski 函数叫半范(或规函数). 在这里，**我们约定**，连

续规函数是非负正齐性次可加连续泛函，它是由具有非空内点的凸集 C(不要求均衡性)生成的.

性质 7.1.21 令 C 是 X 中凸集, $0\in \operatorname{int} C$, $p_C(x)$ 是 C 的(连续)规函数, C 的极 $C^0=\{x^*\in X^*;\ \langle x, x^*\rangle\leqslant 1,\ \forall x\in C\}$(由于此处讨论的是实 Banach 空间，故可规定 C 的极具有上述形式)，则

(1) $x^*\in C^0\Leftrightarrow\langle x, x^*\rangle\leqslant p_C(x),\ \forall x\in X$.

(2) $p_C(x)=\sup\{\langle x, x^*\rangle;\ x^*\in C^0\}$.

证明：(1) "$\Rightarrow$"若 $x^*\in C^0$,对任 $x\in X,\varepsilon>0,\dfrac{x}{p_C(x)+\varepsilon}\in C$;故

$$x^*\left(\frac{x}{p_C(x)+\varepsilon}\right)\leqslant 1,$$

从而 $\langle x, x^*\rangle\leqslant p_C(x)+\varepsilon$. 由 ε 是任意的，故对一切 $x\in X$, $\langle x, x^*\rangle\leqslant p_C(x)$.

"$\Leftarrow$"若 $x^*\in X^*$, 且对一切 $x\in X$, 有 $\langle x, x^*\rangle\leqslant p_C(x)$, 则当 $x\in C$ 时，有 $p_C(x)\leqslant 1$, 从而 $\langle x, x^*\rangle\leqslant 1$, 故 $x^*\in C^0$. □

(2) 由(1)的结果知，当 $x^*\in C^0$ 时，对一切 $x\in X$, 有$\langle x, x^*\rangle\leqslant p_C(x)$, 从而 $\sup\{\langle x, x^*\rangle;\ x^*\in C^0\}\leqslant p_C(x)$.

另一方面，又由于 $0\in\operatorname{int}C$, 且 $\dfrac{x}{p_C(x)}\in\partial C$($C$ 的边界),由支撑定理,存在 $x^*\in X^*$, 使

$$\left\langle\frac{x}{p_C(x)},\ x^*\right\rangle=\sup x^*(C)=\alpha>0.$$

令 $y^*=\dfrac{x^*}{\alpha}$, 则 $y^*\in C^0$, 且 $\langle x, y^*\rangle=p_C(x)$, 所以

$$p_C(x)=\sup\{\langle x, x^*\rangle;\ x^*\in C^0\}.\ \square$$

引理 7.1.22 令 C 是 Banach 空间 X 的凸集, $0\in\operatorname{int}C$, 记 $p=p_C$, 则

$x^*\in\partial p(x_0)\Leftrightarrow\langle x_0, x^*\rangle=p(x_0)$, 且 $x^*\in C^0$.

证明："$\Rightarrow$"若 $x^*\in\partial p(x_0)$，则对一切 $y\in C$，有

$$\langle y,\ x^*\rangle\leqslant p(y+x_0)-p(x_0)\leqslant p(y)+p(x_0)-p(x_0)$$
$$=p(y)\leqslant 1,$$

从而 $x^*\in C^0$，又

$$\langle x_0,\ x^*\rangle\leqslant p(2x_0)-p(x_0)=p(x_0),$$
$$\langle -x_0,\ x^*\rangle\leqslant p(0)-p(x_0)=-p(x_0),$$

故
$$\langle x_0,\ x^*\rangle=p(x_0).\ \square$$

"$\Leftarrow$"因对任 $y\in X$，有

$$\frac{y}{p(y)+\varepsilon}\in C,\ \forall\varepsilon>0.$$

所以，若 $x^*\in C^0$，则 $\langle y,\ x^*\rangle\leqslant p(y)$. 又因 $\langle x_0,\ x^*\rangle=p(x_0)$，故对一切 $y\in X$，有

$$\langle y-x_0,\ x^*\rangle\leqslant p(y)-p(x_0),$$

所以 $x^*\in\partial p(x_0)$. $\square$

注：我们看到，实际上，C 和 C^0 分别起着 X 和 X^* 的"单位球"的作用. 它们处于对偶地位.

定义 6.1.12 若 K 是 X^* 的有界子集. $x\in X$ 称在 $x^*(\in K)$ w^* 暴露 K，如果 $\langle x,\ x^*\rangle=M(x,\ K)>\langle x,\ y^*\rangle$，$\forall y^*\in K\setminus\{x^*\}$，其中 $M(x,\ K)=\sup\{\langle x,\ y^*\rangle;\ y^*\in K\}$. 此时，也称 x^* 为 K 的 w^* 暴露点. 若此外，还有当 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subset K$，$\langle x,\ x_n^*\rangle\to\langle x,\ x^*\rangle$ 时，有 $\|x_n^*-x^*\|\to 0$，则称 $x\in X$ 为在 $x^*(\in K)$ w^* 强暴露 K，x^* 叫 K 的 w^* 强暴露点.

定义 6.1.13 若 K 是 X^* 的有界子集，$\alpha>0$，$x\in X$，则

$$S(x,\ \alpha,\ K)\equiv\{x^*\in K,\ \langle x,\ x^*\rangle\geqslant M(x,\ K)-\alpha\}$$

称为 K 的一个 w^* 切片.

性质 7.1.23 若 K 是 X^* 的有界子集，则 x 在 $x^*(\in K)$ w^* 强暴露 $K\Leftrightarrow$ 当 $\alpha\to 0$ 时，$\mathrm{diam}S(x,\ \alpha,\ K)\to 0$.

证明：容易从定义出发直接证明.

注：从这个性质看到，强暴露具有某种一致性.

定理 7.1.24 设 p 是 X 上的连续规函数，令 $C=\{x; p(x)\leqslant 1\}$，则

(1) p 在 x 点具 G 导数 $x^*\Leftrightarrow x^*\in C^0$，且 x 在 x^* 点 w^* 暴露 C^0.

(2) p 在 x 点具F 导数 $x^*\Leftrightarrow x^*\in C^0$，且 x 在 x^* 点 w^* 强暴露 C^0.

证明：(1)由性质 7.1.14 及引理 7.1.22 知，

$$
\begin{aligned}
p\text{在}x\text{点具 G 导数 }x^* &\Leftrightarrow \partial p(x)=\{x^*\}\\
&\Leftrightarrow x^*\in C^0,\ \text{且}\ \langle x_0,\ x^*\rangle=p(x_0),\\
&\qquad \langle x_0,\ y^*\rangle<p(x_0),\ \forall y^*\in C^0,\\
&\Leftrightarrow x\ \text{在}\ x^*(\in C^0)\text{点}\ w^*\ \text{暴露}\ C^0.\ \square
\end{aligned}
$$

(2) "$\Rightarrow$"由于 x^* 是 p 在 x 点的 F 导数，更有 x^* 是 p 在 x 点的 G 导数，由(1)知，$x^*\in C^0$，且 x 在 x^* 点 w^* 暴露 C^0.

若 $x_n^*\in C^0$，且 $\langle x,\ x_n^*\rangle\to\langle x,\ x^*\rangle$.

令 $\beta_n=\langle x,\ x^*\rangle-\langle x,\ x_n^*\rangle$，则 $\beta_n\to 0$.

因为 $x^*\in C^0$，由性质 7.1.21 知，对任何 y，有

$$\langle x+y,\ x_n^*\rangle\leqslant p(y+x),$$

所以，

$$
\begin{aligned}
\langle y,\ x_n^*\rangle &\leqslant p(y+x)-\langle x,\ x_n^*\rangle\\
&=p(y+x)-p(x)+\beta_n.
\end{aligned}
$$

由引理 7.1.18 知，$\|x_n^*-x\|\to 0$. 所以 x 在 x^* 点 w^* 强暴露 C^0. $\square$

"$\Leftarrow$"由(1)知，x^* 是 p 在 x 点的 G 导数.

由于 p 是连续的，故存在 $K>0$，使 $p(y)\leqslant K\|y\|$.

又由于 x^* 是由 x点 w^* 强暴露的，根据性质 7.1.23 知，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $y^*\in C^0$，且$\langle x,\ y^*\rangle\geqslant p(x)-2K\delta$ 时，有 $\|y^*-x^*\|\leqslant\varepsilon$.

由性质 7.1.21(2)知，$p(x+y)=M(x+y,\ C^0)$，因为 C^0 是 w^* 紧集，故可选 $y_y^*\in C^0$，使 $\langle x+y, y_y^*\rangle=p(x+y)$，于是，我们有

$$\begin{aligned}\langle x,\ y_y^*\rangle &= p(x+y)-\langle y,\ y_y^*\rangle\\ &\geqslant p(x)-p(-y)-\langle y,\ y_y^*\rangle\\ &\geqslant p(x)-K\|y\|-p(y)\\ &\geqslant p(x)-2K\|y\|.\end{aligned}$$

所以，当 $\|y\|<\delta$ 时，有

$$\langle x,\ y_y^*\rangle \geqslant p(x)-2K\delta,$$

因此，$\|y_y^*-x^*\|\leqslant\varepsilon$. 因而，当 $\|y\|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}p(x+y) &= \langle x+y,\ y_y^*\rangle\leqslant p(x)+\langle y,\ y_y^*\rangle\\ &= p(x)+\langle y,\ x^*\rangle+\langle y,\ y_y^*-x^*\rangle\\ &\leqslant p(x)+\langle y,\ x^*\rangle+\|y_y^*-x^*\|\cdot\|y\|\\ &\leqslant p(x)+\langle y,\ x^*\rangle+\varepsilon\|y\|,\end{aligned}$$

即，当 $\|y\|<\delta$ 时，有

$$0\leqslant p(x+y)-p(x)-\langle y,\ x^*\rangle\leqslant\varepsilon\|y\|.$$

这表明 x^* 是 p 在 x 点的 F 导数. □

注：这里，我们看到 G 可微性与 F 可微性有相当对称的性质.

定理 7.1.25 若 X 是 Banach 空间，则有下列两组等价命题：

$G(1)$：X 上每个连续规函数在一个稠集上 G 可微.
$G(2)$：X^* 的每个 w^* 紧凸集是它的 w^* 暴露点的 w^* 闭凸包.

$F(1)$：X 上每个连续规函数在一个稠 G_δ 集上 G 可微.
$F(2)$：X 上每个连续规函数在一个稠集上 F 可微.
$F(3)$：X^* 的每个 w^* 紧凸集是它的 w^* 强暴露点的 w^* 闭凸包.

证明：$G(1)\Rightarrow G(2)$ 令 K 是 X^* 中 w^* 紧凸集，不妨设 $0\in K$.

定义 $p(x)=M(x,\ K)=\max\{\langle x,\ x^*\rangle;\ x^*\in K\}$，则 p 是连续、正齐性、次可加、非负泛函，即 p 是一个连续的规函数. 又令

$C=\{x;\ p(x)\leqslant 1\}$，则 $p=p_C$，且 $C^0=K$.（容易证明，$C={}^0K$，故 $C^0=({}^0K)^0=\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K\cup 0)=K$）.

令 $J=\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(w^*\exp K)$，其中 $w^*\exp K$ 表示 K 的 w^* 暴露点全体. 显然，$J\subset K$. 若 $J\neq K$，令

$$D=\{x\in X;\ M(x,\ J)<M(x,\ K)\},$$

则 D 是非空开子集.（事实上，若 $x\in D$，令

$$\delta=\frac{1}{2}(M(x,\ K)-M(x,\ J)),\ N=\sup\{\|x\|;\ x\in K\},$$

则当 $y\in B\left(x,\ \dfrac{\delta}{N}\right)$时，有

$$\begin{aligned}M(y,\ K)&\geqslant M(x,\ K)-\delta>M(x,\ J)-\delta\\&\geqslant M(y,\ J)+\delta-\delta=M(y,\ J),\end{aligned}$$

故 $y\in D$，即 $B\left(x,\ \dfrac{\delta}{N}\right)\subset D$，这表明 D 是开集.）

由假设 p 的 G 可微点是稠集，故存在 $x_0\in D$，使得 p 在 x_0 点具 G 导数 x^*，由定理 7.1.24 知，x^* 是 $K=C^0$ 的一个 w^* 暴露点，故 $x^*\in J$，且 $\langle x_0,\ x^*\rangle=M(x_0,\ K)>M(x_0,\ J)$ 矛盾. 所以 $J=K$. □

$F(2)\Rightarrow F(3)$ 的证明只须将上述 w^* 暴露点换成 w^* 强暴露点，G 导数换成 F 导数即可.

$G(2)\Rightarrow G(1)$ 由于 x^* 是 p 在 x_0 点 G 导数，所以 x^* 也是 αp 在 βx_0 点的 G 导数，其中 $\alpha>0$，$\beta>0$. 因此，不妨假设 $p(x)\leqslant\|x\|$，$\forall x$.

令 $C=\{z\in X;\ p(z)\leqslant 1\}$. 任意选定 $x\in S(X)$，由定理 7.1.24 知，只须存在 $y\in X$，使 $\|y-x\|\leqslant\varepsilon$，且 y 是 w^* 暴露 C^0 的一个点即可，其中 ε 是任意小的正数.

令 $N=\left\{x^*\in X^*;\ \langle x,\ x^*\rangle=0,\ \|x^*\|\leqslant\dfrac{2}{\varepsilon}\right\}$，则 N 是 w^* 紧凸集. 再令 $K=\mathrm{co}(C^0\cup N)$，则 K 是 w^* 紧凸集，由假设

$$K=\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(w^*\exp K).$$

容易看到,

$$M(x,\ K)=\sup\{\langle x,\ x^*\rangle;\ x^*\in K\}$$
$$=\sup\{\langle x,\ x^*\rangle;\ x^*\in C^0\}-p(x).$$

作 K 的 w^* 切片 $S(x,\ p(x)-\varepsilon,\ K)=\{x^*\in K;\ \langle x,\ x^*\rangle\geqslant M(x,\ K)-p(x)+\varepsilon\}=\{x^*\in K;\ \langle x,\ x^*\rangle\geqslant\varepsilon\}$.

$S(x,\ p(x)-\varepsilon,\ K)$是 K 的一个 w^* 闭凸子集, 从而, 它是 w^* 紧凸集. 由假设, $\{w^*\exp S(x,\ p(x)-\varepsilon,\ K)\}\neq\emptyset$, 于是存在 $y^*\in\{w^*\exp S(x,\ p(x)-\varepsilon,\ K)\}\cap C^0\equiv A$. (事实上,令

$$H=\{x^*\in K;\ \langle x,\ x^*\rangle=\varepsilon\},$$

则 H 是 w^* 紧凸集,若 $\{w^*\exp S(x,\ p(x)-\varepsilon,\ K)\subset H$,则

$$S(x,\ p(x)-\varepsilon,\ K)\subset H,$$

矛盾! 故存在 $y^*\in\{w^*\exp S(x,\ p(x)-\varepsilon,\ K)\}\cap\{x^*\in K;\ \langle x,\ x^*\rangle>\varepsilon\}$. 但是, $K=\mathrm{co}(C^0\cup N)$, 故 $y^*=\alpha x_1^*+(1-\alpha)x_2^*$, 其中 $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $x_1^*\in N$, $x_2^*\in C^0$, 且 $\langle x,\ y^*\rangle>\varepsilon$, 同时, 存在 $y\in S(X)$, 使

$$\langle y,\ y^*\rangle=M(y,\ S(x,\ p(x)-\varepsilon,\ K)).$$

所以,我们有

$$\langle x,\ (1-\alpha)x_2^*\rangle=\langle x,\ \alpha x_1^*+(1-\alpha)x_2^*\rangle=\langle x,\ y^*\rangle>\varepsilon.$$

选 δ, 使 $0<\delta<(1-\alpha)$, 且

$$\langle x,\ ((1-\alpha)-\delta)x_2^*\rangle>\varepsilon,$$

则 $(\alpha+\delta)x_1^*+((1-\alpha)-\delta)x_2^*\in S(x,\ p(x)-\varepsilon,\ K)$, 且

$$\begin{aligned}\langle y,\ &(\alpha+\delta)x_1^*+(1-\alpha-\delta)x_2^*\rangle\\ &=M(y,\ S(x,\ p(x)-\varepsilon,\ K))\\ &\quad+\delta(\langle y,\ x_1^*\rangle-\langle y,\ x_2^*\rangle)\\ &\leqslant M(y,\ S(x,\ p(x)-\varepsilon,\ K)),\end{aligned}$$

所以 $\langle y,\ x_1^*\rangle\leqslant\langle y,\ x_2^*\rangle$, 于是

$$\langle y,\ y^*\rangle=\langle y,\ \alpha x_1^*+(1-\alpha)x_2^*\rangle\leqslant\langle y,\ x_2^*\rangle,$$

但是, $\langle x,\ x_2^*\rangle\geqslant\langle x,\ (1-\alpha)x_2^*\rangle>\varepsilon$, 所以, $x_2^*\in S(x,\ p(x)-\varepsilon,\ K)$, 因此, $y^*=x_2^*$, 即 $y^*\in C^0$, 且 $\langle x,\ y^*\rangle>\varepsilon$).

此外，我们还可得到 y^* 是由 y w* 暴露的 K 的 w* 暴露点. 其中 y 是 $S(x, p(x)-\varepsilon, K)$ 在 y^* 点的 w* 暴露泛函. 事实上，否则，存在 $z^*\in K$，使 $\langle x, z^*\rangle<\varepsilon$，且 $\langle y, z^*\rangle\geqslant\langle y, y^*\rangle$，选 $0<\alpha<1$，使

$$\langle x, \alpha z^*+(1-\alpha)y^*\rangle=\varepsilon.$$

于是 $\alpha z^*+(1-\alpha)y^*\in S(x, p(x)-\varepsilon, K)$. 但是，

$$\langle y, \alpha z^*+(1-\alpha)y^*\rangle\geqslant\langle y, y^*\rangle,$$

这与 y^* 是 $S(x, p(x)-\varepsilon, K)$ 由 y 点w* 暴露的 w* 暴露点矛盾!

下面证明 $\|x-y\|<\varepsilon$. 事实上，这时，对一切 $x^*\in N$，有 $|\langle y, x^*\rangle|\leqslant 1$. (这是因为，由于对一切 $x^*\in K$，$\langle y, x^*\rangle<\langle y, y^*\rangle$. 又由于 $y\in S(x)$，且 $p(y)\leqslant\|y\|\leqslant 1$，故 $y\in C$，因为 $y^*\in C^0$，所以 $\langle y, y^*\rangle\leqslant 1$，从而更有对一切 $x^*\in N$，$\langle y, x^*\rangle\leqslant\langle y, y^*\rangle\leqslant 1$. 由于 N 是均衡的，故 $|\langle y, x^*\rangle|\leqslant 1$).

由引理 3.1.6 知，这时或者 $\|y-x\|\leqslant\varepsilon$，或者 $\|y+x\|\leqslant\varepsilon$，但是，后者是不可能的，因为 $\langle y, y^*\rangle>0$，及 $\|y^*\|\leqslant 1$，故

$$\|x+y\|\geqslant\langle x+y, y^*\rangle>\langle x, y^*\rangle>\varepsilon.$$

所以得到 $\|y-x\|<\varepsilon$.

这就证明了，y^* 是由 y 点 w* 暴露的 K 的 w* 暴露点，且 $\|x-y\|<\varepsilon$. □

$F(3)\Rightarrow F(2)$ 证明与上相仿，首先得到，

$$K=\overline{\text{co}}^{w^*}(\text{w}^*\text{strong exp } K).$$

完全同样证明存在 $y^*\in\{\text{w}^*\text{strong exp } S(x, p(x)-\varepsilon, K)\}\cap C^0$，且 $\langle x, y^*\rangle>\varepsilon$，$y^*$ 是由 $y\in S(X)$ w* 强暴露的 $S(x, p(x)-\varepsilon, K)$ 的 w* 强暴露点.

现在证明，y^* 也是 K 的由 y 点 w* 强暴露的 w* 强暴露点. 由上面证明知道，y^* 是 K 的 w* 暴露点. 若有 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subset K$，使 $\langle y, y_n^*\rangle\to\langle y, y^*\rangle$.

若 $y_n^*\in S(x, p(x)-\varepsilon, K)$，则有 $\|y_n^*-y^*\|\to 0$，否则，存在 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 的子定向列 $\{y_\alpha^*\}$，使 $\{y_\alpha^*\}\not\subset S(x, p(x)-\varepsilon, K)$，于是

$\langle x, y_\alpha^*\rangle < \varepsilon$. 由于 $\{y_\alpha^*\}$ 是有界的，故根据 Banach-Alaoglu 定理，有 $\{y_\alpha^*\}$ 的子定向列 $\{y_{\alpha_\delta}^*\}$，使 $y_{\alpha_\delta}^* \xrightarrow{w^*} y_0^* \in K$，于是

$$\langle y, y_0^*\rangle = \langle y, y^*\rangle.$$

由于 y^* 是 K 的 w* 暴露点，故 $y_0^* = y^*$，但 $\langle x, y_0^*\rangle \leqslant \varepsilon$，这与 $\langle x, y^*\rangle > \varepsilon$ 矛盾！所以 y^* 是 K 的 w* 强暴露点. □

$F(1) \Rightarrow F(2)$ 是显然的.

$F(2) \Rightarrow F(1)$ 由定理 7.1.19 知. □

定理 7.1.26 设 Banach 空间 X 上的每个连续规函数在一点 G(或 F) 可微，则 X^* 的每个 w* 紧凸集有一个 w* 暴露点（或 w* 强暴露点）.

证明：令 K 是 X^* 的一个 w* 紧凸集. 不妨设 $0 \in K$.

定义 $p(x) = M(x, K) = \max\{\langle x, x^*\rangle;\ x^* \in K\}$，则 p 是连续规函数. 令 $C = \{x;\ p(x) \leqslant 1\}$，则 $p = p_C$，且 $C^0 = K$，由假设 p 在 x_0 点 G 可微（或 F 可微），具 G 导数（或 F 导数）x^*，由定理 7.1.24 知，x^* 是 $K = C^0$ 的 w* 暴露点（或 w* 强暴露点）. □

定理 7.1.27 若 $X \times \boldsymbol{R}^1$ 中每个连续规函数在一个稠集上 G 可微，则 X 上每个连续凸函数在一个稠集上 G 可微.

证明：设 f 是 X 上的任何连续凸函数. 不妨设 $f(0) = -1$（否则令 $g(x) = f(x) - f(0) - 1$ 即可）.

令 $C = \{(x, r) \in X \times \boldsymbol{R}^1;\ f(x) \leqslant r\} = \mathrm{epi}(f) \subset X \times \boldsymbol{R}^1$.

由定理 7.1.1 及定理 7.1.3 知，C 是 $X \times \boldsymbol{R}^1$ 中的闭凸集，又由于 $f(0) = -1$ 及 $f(x)$ 是连续的，故存在 $\varepsilon > 0$，使得当 $\|x\| < \varepsilon$ 时，有

$$|f(x) + 1| < \frac{1}{2}.$$

因此，当 $(x, r) \in \{x;\ \|x\| < \varepsilon\} \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时，有

$$f(x) \leqslant -\frac{1}{2} \leqslant r,$$

即 $$(0,\ 0)\in\{x;\ \|x\|<\varepsilon\}\times\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\subset C,$$

从而 $0\in\text{int}\,C$，这表明 $\text{int}\,C\neq\emptyset$.

由此，p_C 定义了 $X\times\boldsymbol{R}^1$ 上的一个连续规函数. 任取 $x_0\in X$，则 $(x_0,\ f(x_0))\in\partial C$（$C$ 的边界），根据假设 p_C 在 $X\times\boldsymbol{R}^1$ 的一个稠集上 G 可微，故存在 $(x',\ r')$，使 $(x',\ r')$ 在 $(x_0,\ f(x_0))$ 的充分小邻域内，且 p_C 在 $(x',\ r')$ 点是 G 可微的.

我们看到，若 p_C 在 $X\times\boldsymbol{R}^1$ 的某点 h 是 G 可微的，则 p_C 在 $\dfrac{h}{p_C(h)}$ 点也是 G 可微的，并且 $p_C(h)\leqslant K\|h\|_{X\times\boldsymbol{R}^1}$，对某个常数 $K>0$. 所以，我们可选 $(x',\ r')\in\partial C$，使 p_C 在 $(x',\ r')$ 是 G 可微的. 设其 G 导数为 $(x_0^*,\ s_0)\in C^0$. 由于 $(x',\ r')\in\partial C$，故 $r'=f(x')$，又由于 $(x_0^*,\ s_0)\in C^0$，故 $s_0<0$，从而，$\langle(x',\ f(x')),\ (-x_0^*,\ -s_0)\rangle=-1$，并且对一切 $(y,\ t)\in\text{epi}(f)$，有

$$\langle(y,\ t),\ (-x_0^*,\ -s_0)\rangle\geqslant-1.$$

这表明由 $(-x_0^*,\ -s_0)$ 决定的超平面支撑 $\text{epi}(f)$，由定理 7.1.16 知，$-\dfrac{x_0^*}{s_0}$ 是 $f(x)$ 在 x' 点的唯一次梯度即 G 导数. 这表明 f 在一个稠集上 G 可微. □

§2 Asplund 空间

定义 7.2.1 一个 Banach 空间 X 称为 Asplund 空间，如果 X 的每个开凸子集 E 上定义的连续凸函数 f 在 E 的一个稠 G_δ 集上是 F 可微的.

注：由定理 7.1.20 知，实际上，对任何 Banach 空间 X，在 X 的开凸子集 E 上定义的连续凸函数 f，f 的 F 可微点全体总是 G_δ 集（或空集）.

定义 7.2.2 一个 Banach 空间 X 称为 w Asplund 空间，若 X 的每个开凸子集 E 上定义的连续凸函数 f 在 E 的一个稠

G_δ 集上是 G 可微的.

定义 7.2.3 若 X^* 是 Banach 空间 X 的共轭空间, X^* 称为 w* Asplund 空间, 如果 X^* 的每个 w* 下半连续凸函数在一个稠 G_δ 集上是 F 可微的.

定义 7.2.4 若 X^* 是 Banach 空间 X 的共轭空间, X^* 称为 DA 空间,若 X^* 的每个 w* 紧凸集是它 w* 强暴露点的 w* 闭凸包.

Banach 空间上连续凸函数的研究最早追溯到 1933 年 Mazur 的工作,他证明了每个可分 Banach 空间是 wAsplund 空间. 1968 年 E. Asplund (E. Asplund, *Act. Math*, (1968)31～47)进一步对连续凸函数进行了深入的讨论. 他研究了 Asplund 空间、w Asplund 空间以及再赋范问题. 一直到 1975 年 I. Namioka 和 R. Phelps 以及 1978 年 C. Stegall 和 F. Sullivan 证明了 X 是 Asplund 空间当且仅当 X^* 具 RNP 之后, Asplund 空间的研究得到了很大的进展. 1976 年 B. Collier 引入了 w* Asplund 空间, 并且证明了 X 具 RNP 当且仅当 X^* 是 w* Asplund 空间. 但是, 目前对 w Asplund 空间的性质知道得仍然很少, 有许多尚未解决的问题. 显然, Asplund 空间一定是 w Asplund 空间.

(一)Asplund 空间的若干结果.

(I) Asplund 空间的充要条件:

(1) X 上每个等价范数在稠 G_δ 集上是 F 可微的(定理 7.2.2).

(2) X 上每个连续规函数在稠 G_δ 集上是 F 可微的(定理 7.2.2).

(3) X^* 的每个非空 w* 紧凸集是它 w* 强暴露点的 w* 闭凸包(定理 7.2.2).

(4) X^* 的每个非空 w* 紧凸集有一个 w* 强暴露点(定理 7.2.4).

(5) X 的每个连续规函数在一个稠集上是F可微的(定理7.1.25).

(6) X 的每个连续规函数在一个点是F可微的(定理7.2.4).

(7) X^* 的每个非空 w* 紧凸集是 w* 可凹的(定理7.2.4).

(8) X^* 的每个非空有界子集是 w* 可凹的(定理7.2.4).

(9) X^* 的每个非空有界子集包含任意小范直径的w*相对开非空子集(定理7.2.4).

(10) X^* 的每个非空 w* 紧集包含任意小范直径的w*相对开非空子集(定理7.2.4).

(11) X^* 具RNP(定理7.2.7).

(II) Asplund 空间所具有的性质.

(1) Asplund 空间的每个闭子空间是 Asplund 空间(定理7.2.6).

(2) Asplund 空间的每个商空间是 Asplund 空间(定理7.2.6).

(3) Asplund 空间的 $l_p(1<p<+\infty)$ 乘积和 c_0 乘积是 Asplund 空间(定理7.2.12).

(4) 若 X 的某个闭子空间 M 及 X/M 是 Asplund 空间,则 X 是 Asplund 空间(I. Namioka & R. Phelps, *Duke Math. J.* vol. 42. (1975)735～750).

(5) Asplund 空间的线性同胚像是 Asplund 空间(定理7.2.8).

(6) 若 X 是可分的,则 X^* 是可分的 $\Leftrightarrow X$ 是 Asplund 空间(定理7.2.5).

(III) 下列空间是 Asplund 空间.

(1) X 是非常光滑空间(定理7.2.13).

(2) 对任何 Γ, $c_0(\Gamma)$(定理7.2.13).

(3) 自反空间(定理7.2.13).

(4) 若X可以再赋范使相应的共轭空间具(**)性质((**)性质的定义见定义1.1.3)(I. Namioka & B. Phelps, *Duke. Math. J.* vol 42(1975)735～750).

注：由于 X 是 Asplund 空间 $\Leftrightarrow X^*$ 具 RNP，所以从 X^* 具 RNP 讨论，我们可得到许多 Asplund 空间，和 Asplund 空间的许多性质.

(二)w Asplund 空间.

(1) w Asplund 空间的线性同胚像是 w Asplund 空间 (定理 7.2.5).

(2) 若 X 是可分的 Banach 空间，则 X 是 w Asplund 空间(定理 7.2.4).

(3) 若 X 可以再赋范使相应的共轭范数是严格凸的，则X是 w Asplund (E. Asplund, *Acta Math*(1968)31～47).

(三)w^* Asplund 空间.

(1) X 具 RNP$\Leftrightarrow X^*$ 是 w^*Asplund 空间 (*B. Coller, Pacific J. Math*. vol. 64 No. 1(1976)103～106).

下面，我们给出上述结论的若干证明.

引理 7.2.1 若f_1、f_2是 X 上的连续凸函数，且f_1+f_2在x_0点是 F 可微的(或 G 可微的)，则 f_1、f_2 均在 x_0 点 F 可微(或 G 可微).

证明：由性质 7.1.15 知，

$$\partial(f_1+f_2)(x_0)=\partial f_1(x_0)+\partial f_2(x_0),$$

再由性质 7.1.14 知，$\partial(f_1+f_2)(x_0)$为单点集，从而 $\partial f_1(x_0)$和$\partial f_2(x_0)$为单点集，同样，根据性质 7.1.14，f_1，f_2 在 x_0 是 G 可微的. 分别记它们的 G 导数为 $f_1'(x_0)$及 $f_2'(x_0)$.

若 f_1+f_2 在 x_0 是 F 可微的，则对任 $y\in X$，

$$\begin{aligned}0&\leqslant f_i(x_0+y)-f_i(x_0)-\langle y,\ f_i'(x_0)\rangle\\&\leqslant(f_1+f_2)(x_0+y)-(f_1+f_2)(x_0)\\&\quad-\langle y,\ (f_1'+f_2')(x_0)\rangle,\ i=1,\ 2,\end{aligned}$$

故 f_i 在 x_0 点是 F 可微的，$i=1, 2$. □

定理 7.2.2 在 Banach 空间 X 中，下列等价：

(1) X 是 Asplund 空间.

(2) X 的每个等价范数在一个稠的 G_δ 集上是 Fréchet 可微的.

(3) X 的每个连续规函数在一个稠的 G_δ 集上是 Fréchet 可微的.

(4) X^* 中每个 w^* 紧凸集是它 w^* 强暴露点的 w^* 闭凸包.

证明：(1)⇒(2) 由于每个等价范数是一个连续凸函数，故 (1)蕴含(2). □

(2)⇒(3) 令 p 是 X 上的一个连续规函数. 则存在某个 $K>0$，使 $p(x)\leqslant K\|x\|$，$\forall x\in X$. 令

$$|||x|||=p(x)+p(-x)+\|x\|, \ \forall x\in X.$$

则 $\|x\|\leqslant |||x|||\leqslant(2K+1)\|x\|$，从而，$|||\cdot|||$ 定义了 X 上的一个等价范数. 由假设 $|||\cdot|||$ 在一个稠 G_δ 集上是 F 可微的. 由引理 7.2.1 知，$p(x)$ 在一个稠 G_δ 集上是 F 可微的. □

(3)⇒(4) 见定理 7.1.25.

(4)⇒(1) 令 f 是 X 的开凸子集 D 上的连续凸函数.

对每个 n，$y^*\in X^*$，令

$V_n(y^*)=\{x\in D$; 存在 $V_x\subset D$，使得当 $y\in V_x$ 时，有

$$\partial f(y)\subset y^*+\frac{1}{n}U(X^*)\}.$$

令 $V_n=\bigcup\limits_{y^*\in X^*}V_n(y^*)$.

显然，V_n 是开集. 下面证明 V_n 是在 D 中稠的. 事实上，任取 $x\in D$，由性质 7.1.14(3) 知，次梯度映像是局部有界的，从而存在 U_x，使

$$A=\{x^*\in X^*; x^*\in\partial f(y), \text{对 } y\in U_x\}$$

是范有界的. 故 $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(A)$ 也是范有界的，从而 $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(A)$ 也是 w^* 紧凸集，由假设 $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(A)$ 的 w^* 强暴露点存在，从而 $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(A)$ 有范

直径充分小的 w^* 切片，即存在 $z\in S(X)$，$\alpha>0$，使 w^* 切片

$$S(z,\alpha,\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(A))=\{x^*\in\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(A);\ \langle z,x^*\rangle\geqslant M(z,A)-\alpha\}$$

有充分小的范直径$\left(\text{例}<\frac{1}{2n}\right)$，其中 $M(z,A)=\sup\{x^*(z);\ x^*\in A\}$。从而 A 的 w^* 切片 $S(z,\alpha,A)\neq\emptyset$，且

$$\operatorname{diam} S(z,\alpha,A)<\frac{1}{2n}.$$

任选 $y_1^*\in S(z,\alpha,A)$。由于 $y_1^*\in A$，故存在 $x_1\in U_x$，使 $y_1^*\in\partial f(x_1)$。

对任意充分小的 $r>0$，有 $x_2=x_1+rz\in U_x$，从而

$$\partial f(x_2)\subset S(z,\alpha,A).$$

(事实上，若 $y_2^*\in\partial f(x_2)$，则 $y_2^*\in A$，且

$$\langle x_1-x_2,\ y_2^*\rangle\leqslant f(x_1)-f(x_2),$$

$$\langle x_2-x_1,\ y_1^*\rangle\leqslant f(x_2)-f(x_1),$$

故 $$0\leqslant\langle x_2-x_1,\ y_2^*-y_1^*\rangle=r\cdot\langle z,\ y_2^*-y_1^*\rangle,$$

于是， $$\langle z,\ y_2^*\rangle\geqslant\langle z,\ y_1^*\rangle\geqslant M(z,A)-\alpha,$$

故 $y_2^*\in S(z,\alpha,A)$，即 $\partial f(x_2)\subset S(z,\alpha,A)$.)

根据定理 7.1.7 知道，次梯度映像是范-w^* 上半连续的，故存在 x_2 的开邻域 $U_{x_2}\subset U_x$，使得当 $x\in U_{x_2}$，有

$$\partial f(x)\subset S(z,\alpha,A).$$

由于 $\operatorname{diam} S(z,\alpha,A)<\frac{1}{2n}$，且 $y_1^*\in S(z,\alpha,A)$，故当 $x\in U_{x_2}$ 时，有

$$\partial f(x)\subset y_1^*+\frac{1}{n}U(X^*),$$

i.e, $x_2\in V_n(y_1^*)\subset V_n$，但 $\|x_2-x_1\|=r\|z\|$，又 r 是任意充分小的正数，故 V_n 在 D 中稠.

令 $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}V_n$，由于 Baire 空间开子集是 Baire 空间，故 C 是稠 G_δ 集.

下面证明，当 $x\in C$ 时，$f(x)$ 在 x 点是 F 可微的. 事实上，任给 $\varepsilon>0$，取正整数 n，使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$. 因为 $x\in V_n$，故存在 $y^*\in X^*$ 及 $\delta>0$，使得当 $\|y\|<\delta$ 时，有

$$\partial f(x+y)\subset y^*+\frac{1}{n}U(X^*).$$

选 $x^*\in\partial f(x)$，任取 $z^*\in\partial f(x+y)$，则

$$\|x^*-z^*\|<\frac{2}{n},$$

且 $\quad -\langle y,\ z^*\rangle=\langle x-(x+y),\ z^*\rangle\leqslant f(x)-f(x+y),$

故 $\quad 0\leqslant f(x+y)-f(x)-\langle y,\ x^*\rangle\leqslant\langle y,\ z^*-x^*\rangle\leqslant\frac{2}{n}\|y\|.$

i. e $f(x)$ 在 x 点具 F 导数 x^*，(这也说明 $\partial f(x)$ 为单元素集). □

引理 7.2.3 令 C，C_1 和 C_2 是 X^* 中 w* 紧凸集，满足下列条件:

(1) $C_1\subset C$，且 $\operatorname{diam} C_1<\varepsilon$，对某个 $\varepsilon>0$.

(2) $C\backslash C_2\neq\emptyset$.

(3) $C\subset\operatorname{co}(C_1\cup C_2)$.

则存在 C 的一个 w* 切片，使它的直径小于 ε，且包含 C_1 的一个点.

证明：对 $r\in[0,\ 1]$，令

$$D_r=\{x^*;\ x^*=(1-\lambda)x_1^*+\lambda x_2^*,\ \text{其中}\ \lambda\in[r,\ 1],\ x_i^*\in C_i,\ i=1,\ 2\},$$

容易看到，D_r 是 w* 紧凸集.

令 $D=\operatorname{co}(C_1\cup C_2)$，由条件(3)知，$C\subset D$.

由条件(1)，$C_1\subset C$，并且对任何 $r\in(0,\ 1]$，有 $C_1\not\subset D_r$. (事实上，假如对某个 r，$0<r\leqslant 1$，有 $C_1\subset D_r$，则

$$(\operatorname{ext} D)\cap(C_1\backslash C_2)=\emptyset,$$

又 $\operatorname{ext} D\subset C_1\cup C_2$，故 $\operatorname{ext} D\subset C_2$，从而 $C\subset C_2$，这与 $C\backslash C_2\neq\emptyset$，矛盾!)

令 $M=\sup\{\|u^*-v^*\|;\ u^*\in C_1,\ v^*\in C_2\}$. 由于 $\operatorname{diam} C_1<\varepsilon$, 选 $r_0>0$, 使 $2r_0M+\operatorname{diam} C_1<\varepsilon$. 任取 $x^*\in C\backslash D_{r_0}$, 则 $x^*\in D\backslash D_{r_0}$, 故

$x^*=(1-\lambda)x_1^*+\lambda x_2^*$, 其中 $x_i^*\in C_i$, $i=1, 2$, $0\leqslant\lambda<r_0$,
从而, $\|x^*-x_1^*\|=\lambda\|x_1^*-x_2^*\|<\lambda M$, 因此

$$\operatorname{diam}(C\backslash D_{r_0})\leqslant 2r_0M+\operatorname{diam} C_1<\varepsilon.$$

选 $x^*\in C_1\backslash D_{r_0}$, 则 $x^*\in C\backslash D_{r_0}$, 应用分离定理于 x^* 和 w* 紧凸集 D_{r_0} 知, 存在 C 的 w* 切片含于 $C\backslash D_{r_0}$, 从而 C 具有 w* 切片, 使得这个 w* 切片的直径小于 ε, 并且这个 w* 切片含 $x^*\in C_1$ 的点. □

定理 7.2.4 Banach 空间 X 中, 下列等价:

(1) X 是 Asplund 空间.

(2) X^* 的每个 w* 紧凸集是它 w* 强暴露点的 w* 闭凸包.

(3) X^* 的每个 w* 紧凸集有一个 w* 强暴露点.

(4) X^* 的每个 w* 紧凸集是 w* 可凹的.

(5) X^* 的每个有界子集是 w* 可凹的.

(6) X^* 的每个非空有界子集包含任意小范数直径的 w* 相对开非空子集.

(7) X^* 的每个非空紧集包含任意小范数直径的 w* 相对开非空子集.

(8) X 的每个连续规函数在一个点是 F 可微的.

证明: (1)⇔(2) 即定理 7.2.2.

(2)⇒(3) 是显然的.

(3)⇒(4) 同定理 6.2.2(8) 的证明, 知道 w* 强暴露点是 w* 可凹点. 另外, 显然一个集合含有一个 w* 可凹点, 则这个集合是 w* 可凹的. □

(5)⇒(4) 因为在 Banach 空间 X 的共轭空间 X^* 中 w* 紧集是范数有界的. □

(4)⇒(5) 若 A 是 X^* 的有界集, 取 $B=\overline{\operatorname{co}}^{w^*}(A)$, 则由假设

条件知，B 是 w^* 可凹的，与有关可凹集性质的定理 6.2.2(5)的证明相类似，可知 A 也是 w^* 可凹集. □

(5)⇒(6)同定理 6.2.2(13)的证明，知道有界集是 w^* 可凹的充要条件是存在范数直径充分小的 w^* 切片. □

(6)⇒(7)是显然的.

(7)⇒(4)只须证明 X^* 的每个 w^* 紧凸集 C 具有范数直径任意小的 w^* 切片.

令 $A=\operatorname{ext}C$, $B=\overline{A}^{w^*}$, 则 B 是 w^* 紧集.

由假设条件知，存在 w^* 开集 V, 使 $V\cap B\neq\emptyset$, 且

$$\operatorname{diam}(V\cap B)<\varepsilon.$$

从而

$$A\cap V\neq\emptyset.$$

令 $C_2=\overline{\operatorname{co}}^{w^*}(B\setminus V)$, $C_1=\overline{\operatorname{co}}^{w^*}(A\cap V)$, 则 C_1、C_2 是 w^* 紧凸集，且 $C=\operatorname{co}(C_1\cup C_2)$. (事实上，因

$$\begin{aligned}\operatorname{ext}C=A&=(A\setminus V)\cup(A\cap V)\\&\subset(B\setminus V)\cup(A\cap V)\subset C_1\cup C_2\subset C.)\end{aligned}$$

且

$$\operatorname{diam}C_1=\operatorname{diam}(B\cap V)<\varepsilon.$$

我们有，$C\setminus C_2\neq\emptyset$. (事实上，否则 $C\subset C_2$, $A=\operatorname{ext}C\subset B\setminus V$, 于是 $A\cap V=\emptyset$, 矛盾！故 $C\setminus C_2\neq\emptyset$.) 由引理 7.2.3 知，存在 C 的一个 w^* 切片 S, 使 $\operatorname{diam}S<\varepsilon$, 且 S 含 C_1 的一个点. □

(4)⇒(1)证明同引理 6.4.10，引理 6.4.11 及定理 6.4.12，只是将强暴露点换成 w^* 强暴露点；可凹性换成 w^* 可凹性；取闭凸包换成取 w^* 闭凸包. 并且注意，在引理 6.4.11 证明中，$T_{x^*}^*y^*\in X$ 即可. □

定理 7.2.5 若 X 是 Asplund 空间，则

X 是可分的 ⇔ X^* 是可分的.

证明：设 X 是可分的 Asplund 空间，而 X^* 是不可分的.

由引理 6.4.23 知，存在一个正整数 m 和 $S(X^*)$ 的一个非可数子集 A, 使对一切 x^*, $y^*\in A$, $x^*\neq y^*$, 有

$$\|x^*-y^*\|>\frac{1}{m}.$$

由于 X 是可分的，则 $(U(X^*),\ \sigma(X^*,\ X))$ 是紧的可度量化空间，因此，它满足第二可数公理，所以 A 有至多可数个(关于 w^* 拓扑的)孤立点. 不妨设 A 没有弧立点.

由于 $\overline{A}^{w^*}$ 是 w^* 紧集，所以，由定理 7.2.4 知，存在 $\overline{A}^{w^*}$ 的一个相对 w^* 开子集 V，使 $\operatorname{diam} V<\frac{1}{2m}$. 又由于 A 没有弧立点，故存在 $x_1^*,\ x_2^*\in V\cap A,\ x_1^*\neq x^*$. 因此，

$$\frac{1}{m}<\|x_1^*-x_2^*\|\leqslant\operatorname{diam} V<\frac{1}{2m}.$$

矛盾! 因此 X^* 必是可分的. □

定理 7.2.6 Asplund 空间 X 的任何闭子空间 M 是 Asplund 空间，且 X/M 也是 Asplund 空间.

证明：先证 M 是 Asplund 空间.

由定理 7.2.4，只须证明 M^* 的任何非空 w^* 紧凸集 C 是 w^* 可凹的就可以了. 由定理 6.2.2(13)的注知，只须证明 C 包含任意小范数直径的 w^* 切片.

固定 $\varepsilon>0$. 令 $I: M\to X$ 是恒等算子，$\|I\|=1$，则 $I^*: X^*\to M^*\cong X^*/M^0$，且 $\|I^*\|=1$. 容易看到，I^* 是 w^*-w^* 连续的，且 I^* 是开映像.

令 $B(X^*)=\{x^*\in X^*;\ \|x^*\|<1\}$ 是 X^* 的开单位球，则 $I^*(B(X^*))$ 是 M^* 中含 0 点的开集，从而，$I^*(B(X^*))$ 含 M^* 中某个中心在 0 点的球，又因为 C 是有界的，故存在 $\lambda>0$，使 $C\subset I^*(\lambda B(X^*))$.

令 $K_\lambda=\lambda U(X^*)\cap(I^*)^{-1}(C)$，则由于 I^* 是 w^*-w^* 连续的，故 K_λ 是 X^* 的 w^* 紧凸集，且 $I^*(K_\lambda)=C$.

令 $\mathscr{F}=\{K;K$ 是 X^* 的 w^* 紧凸集，且 $I^*(K)=C\}$，规定 $A\subset B$，则 $A<B$，由 Zorn 引理知，存在极小元 $K\in\mathscr{F}$. 由于 X 是 Asplund 空间，所以可选 K 的 w^* 切片 $S(x,\ \alpha,\ K)$，使

$\operatorname{diam} S(x, \alpha, K)<\varepsilon$.

令 $S=\{x^*\in K,\ x^*(x)>M(x, K)-\alpha\}$, 则 $S\subset S(x,\alpha,K)$, 于是 $\operatorname{diam} S<\varepsilon$, 并且 $K\setminus S$ 是 w* 紧凸集. 由 K 的极小性知, $C_1=I^*(K\setminus S)$是 C 的 w* 紧凸真子集, 且 $\operatorname{diam}(C\setminus C_1)<\varepsilon$. (事实上, 若 x_1^*, $x_2^*\in C\setminus C_1$, 则存在 y_1^*, $y_2^*\in S$, 使 $I^*(y_i^*)=x_i^*$, $i=1$, 2, 故

$$\|x_1^*-x_2^*\|=\|I^*(y_1^*-y_2^*)\|\leqslant\|y_1^*-y_2^*\|<\varepsilon.)$$

选 $x^*\in C\setminus C_1$, 由于 C_1 是 w* 紧凸集, 故存在 C 的 w* 切片 $S(y, \beta, C)$, 使 $S(y, \beta, C)\cap C_1=\emptyset$, 所以, $S(y, \beta, C)\subset C\setminus C_1$. 从而 $\operatorname{diam} S(y, \beta, C)<\varepsilon$. 这说明 C 具有直径充分小的 w* 切片, 即 C 是 w* 可凹集. 因此, M 是 Asplund 空间.

为了证明 X/M 是 Asplund 空间, 只须证明 $(X/M)^*$ 中任何有界集包含任意小范数直径的 w* 相对开集. 但是, $(X/M)^*\cong M^0\subset X^*$, 且 $(X/M)^*$ 的 w* 拓扑与 X^* 的 w* 拓扑限制在 M^0 上是一致的.

由于 X 是 Asplund 空间, 又 M^0 的任何有界集是 X^* 的有界集. 根据定理 7.2.4, M^0 的任意有界集含有任意小范直径的 w* 相对开集. 从而, $(X/M)^*$ 的任何有界集含有任意小范数直径的 w* 相对开集. 所以 X/M 是 Asplund 空间. □

定理 7.2.7 若 X 是 Banach 空间, 则下列等价:

(1) X 是 Asplund 空间

(2) X 的每个可分闭子空间有可分的共轭空间.

(3) X^* 具 RNP.

证明: 若 X 是 Asplund 空间, M 是 X 的可分闭子空间. 由定理 7.2.6 知, M 是 Asplund 空间, 再由定理 7.2.5 知, M^* 是可分的.

反之, 设 X 不是 Asplund 空间. 下面将证明存在 X 的一个可分闭子空间 F, 使得 F^* 是不可分的.

由于 X 是 Asplund 空间当且仅当 X^* 的任何有界子集 A

有充分小范数直径的 w^* 相对开子集. 因此, 假如 X 不是 Asplund 空间, 则存在 $\varepsilon>0$ 和 X^* 的有界子集 A, 使得 A 的任何 w^* 相对开子集 V, 有 $\operatorname{diam} V>\varepsilon$.

任取 A 的 w^* 开子集 V, 存在 $x^*, y^*\in V$, 使 $\|x^*-y^*\|>\varepsilon$. 选 $x\in S(X)$, 使得 $\langle x, x^*-y^*\rangle>\varepsilon$.

作 $$V_1=V\cap\left\{z^*;\ |\langle x, z^*-x^*\rangle|<\frac{\varepsilon}{3}\right\}.$$

$$V_2=V\cap\left\{z^*;\ |\langle x, z^*-y^*\rangle|<\frac{\varepsilon}{3}\right\}.$$

则 V_1, V_2 是 V 的 w^* 相对开子集, 且 $V_1\cap V_2=\emptyset$, 并且, 当 $x_1^*\in V_1$, $x_2^*\in V_2$ 时, 有

$$|\langle x, x_1^*-x_2^*\rangle|>\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而, 当 $x_i^*\in\overline{V}_i^{w^*}$, $i=1, 2$ 时, 有

$$|\langle x, x_1^*-x_2^*\rangle|\geqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $Q_1=A$, 重复上述过程, 得到 A 的非空相对开集列 $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $S(X)$ 中的元序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 使

(1) $Q_{2n}\cup Q_{2n+1}\subset Q_n$.

(2) 当 $x^*\in\overline{Q}_{2n}^{w^*}$, $y^*\in\overline{Q}_{2n+1}^{w^*}$ 时, 有

$$|\langle x_n, x^*-y^*\rangle|\geqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $F=\overline{\operatorname{span}}\{x_n\}$, 则 F 是 X 的可分闭子空间. 对 $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ 的任何子序列 $\{Q_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, 选 $x^*\in\bigcap\limits_{k=1}^\infty\overline{Q}_{n_k}^{w^*}$($x^*$ 叫做相应于 $\{Q_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 的代表元).

令 $A=\{x^*$; 存在 $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ 的子序列 $\{Q_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, 使 x^* 就是所选的相应于 $\{Q_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 的代表元$\}$,

则 A 是不可数的, 且对任何 $x^*, y^*\in A$, 存在 $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ 的两个子序列 $\{Q_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 和 $\{Q_{n_l}\}_{l=1}^\infty$, 使 $x^*\in\bigcap\limits_{k=1}^\infty\overline{Q}_{n_k}^{w^*}$, $y^*\in\bigcap\limits_{l=1}^\infty\overline{Q}_{n_l}^{w^*}$. 由 A 的

构造法知，存在 n，使 $x^*\in\bar{Q}_{2n}^{w^*}$，但 $y^*\in\bar{Q}_{2n+1}^{w^*}$. 因此，由 Q_n 的性质知，

$$\|x^*-y^*\|_F\geqslant|\langle x_n,\ x^*-y^*\rangle|\geqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此，$A_F=\{x_F^*=x^*|_F;\ x^*\in A\}\subset F^*$，所以 F^* 是不可分的.

所以，我们得到，当 X 的每个可分闭子空间有可分共轭时，X 是 Asplund 空间.

另一方面，从定理 6.4.22 知，X^* 具 RNP 当且仅当 X 的每个可分子空间有可分共轭. □

定理 7.2.8 Asplund 空间的线性同胚像是 Asplund 空间.

证明：由定理 7.2.7 知，X 是 Asplund 空间的充要条件是 X^* 具 RNP. 但是 RNP 是线性同胚不变的. 所以，定理的结论成立 □

推论 7.2.9 若 X 是 Asplund 空间，Y 是 Banach 空间，若存在线性连续映像 $T: X\to Y$，使 $TX=Y$，则 Y 也是 Asplund 空间.

证明：因为 $Y\approx X/T^{-1}(0)$. □

定理 7.2.10 Asplund 空间的有限乘积是 Asplund 空间.

证明：不妨设 X_1 和 X_2 是 Asplund 空间. 任取 $X_1\oplus X_2$ 的范数，例如对 $(x_1,\ x_2)\in X_1\oplus X_2$，令

$$\|(x_1,\ x_2)\|=\|x_1\|+\|x_2\|.$$

任取 $X_1\oplus X_2$ 的可分子空间 F. 令 F_1、F_2 分别是 F 在 X_1、X_2 上的投影. 显然 F_1, F_2 是可分的. 从而，$\bar{F}_1$、$\bar{F}_2$ 分别是 X_1、X_2 的可分闭子空间，根据定理 7.2.5 知，$(\bar{F}_1)^*$ 与 $(\bar{F}_2)^*$ 是可分的. 从而 $(\bar{F}_1)^*\oplus(\bar{F}_2)^*$ 是可分的. 令 $I: F\to\bar{F}_1\oplus\bar{F}_2$ 是恒等算子，则 $I^*: (\bar{F}_1\oplus\bar{F}_2)^*=(\bar{F}_1)^*\oplus(\bar{F}_2)^*\to F^*$ 是满映像，故 F^* 是可分的. 再根据 7.2.7 知，$X_1\oplus X_2$ 是 Asplund 空

间. □

推论 7.2.11 DA 空间的有限乘积是 DA 空间.

证明: 由定理 7.2.4 知, X 是 Asplund 空间 $\Leftrightarrow X^*$ 是 DA 空间,即知所要结论. □

定义 7.2.5 若 Γ 是一个非空的指标集. 对每个 $\alpha\in\Gamma$, X_α 是 Banach 空间, $1\leqslant p<+\infty$, 记

$$(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha)_p=\{(x_\alpha;\ \alpha\in\Gamma);$$

$$\|(x_\alpha;\ \alpha\in\Gamma)\|_p=(\sum_{\alpha\in\Gamma}\|x_\alpha\|^p)^{1/p}<+\infty\},$$

则
$$[(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha)_p,\ \|(x_\alpha;\ \alpha\in\Gamma)\|_p]$$

称为 Banach 空间族 $\{X_\alpha;\ \alpha\in\Gamma\}$ 的 l_p 乘积$(1\leqslant p<+\infty)$, 简记作$(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha)_p$.

记$(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha)_{c_0}=\{(x_\alpha;\ \alpha\in\Gamma)$; 对每个 $\varepsilon>0$, $\{\alpha\in\Gamma;\ \|x_\alpha\|>\varepsilon\}$是有限集$\}$.

$\|(x_\alpha;\ \alpha\in\Gamma)\|_{c_0}=\sup\{\|x_\alpha\|;\alpha\in\Gamma\}$, 则称 $[(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha)_{c_0},\ \|(x_\alpha;\ \alpha\in\Gamma)\|_{c_0}]$ 为 Banach 空间族 $\{X_\alpha;\ \alpha\in\Gamma\}$ 的 c_0 乘积, 简记作 $(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha)_{c_0}$.

容易看到, $(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha)_p(1\leqslant p<+\infty)$及$(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha)_{c_0}$是 Banach 空间,且

$$(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha)_p^*=(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha^*)_q,$$

其中,
$$1<p<+\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

及
$$(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha)_{c_0}^*=(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha^*)_1.$$

定理 7.2.12 Asplund 空间族 $\{X_\alpha,\ \alpha\in\Gamma\}$ 的 $l_p(1<p<+\infty)$和 c_0 乘积是 Asplund 空间.

证明: 由定理 7.2.2 知, 只须证明 $(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha^*)_q(1\leqslant p<+\infty)$是 DA 空间即可.

令 K 是$(\sum\limits_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_{\alpha}^{*})_p$, $(1\leqslant p<+\infty)$, 的 w* 紧子集. 我们将证明 K 有范数直径任意小的 w* 相对开子集, 这样, 由定理 7.2.4 即得所要结论.

令 $M=\sup\{\|x^*\|^p;\ x^*\in K\}$.

任给 $\varepsilon>0$, 选 $x_0^*\in K$, 使

$$\|x_0^*\|^p>M-\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.$$

所以,存在 Γ 的有限子集 N, 使

$$\sum_{\alpha\in N}\|(x_0^*)_\alpha\|^p>M-\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p,$$

其中$(x_0^*)_\alpha$ 表示 x_0^* 的第 α 个坐标.

对这个固定的有限子集 N, 令 $X_N^*=(\sum\limits_{\alpha\in N}\oplus X_\alpha^*)_p$. 我们将 X_N^* 看作 $(\sum\limits_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha^*)_p$ 的一个子空间,则典型投影

$$P_N^*:(\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha^*)_p\to X_N^*$$

是 w*-w* 连续的. 记 $x_N^*=P_N^*(x^*)$, 对 $x^*\in(\sum\limits_{\alpha\in\Gamma}\oplus X_\alpha^*)_p$.

令
$$B=\left\{y^*\in X_N^*;\ \sum_{\alpha\in N}\|y_\alpha^*\|^p\leqslant M-\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p\right\},$$

则 B 是 X_N^* 中的 w* 紧集, 由此, $V\equiv K\setminus(P_N^*)^{-1}(B)$是 K 的相对 w* 开集,并且, $x_0^*\in V$. 当 $z^*\in V$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}M&\geqslant\|z^*\|^p=\|z^*-z_N^*\|^p+\|z_N^*\|^p\\&\geqslant\|z^*-z_N^*\|^p+M-\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p,\end{aligned}$$

所以,
$$\|z^*-z_N^*\|^p\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.$$

又由推论 7.2.11 知, X_N^* 是 DA 空间, 并且 $P_N^*(V)$是 X_N^* 的有界子集. 由定理 6.2.4 知, $P_N^*(V)$包含一个范数直径小于 $\frac{\varepsilon}{3}$ 的相对于 $P_N^*(V)$的 w* 开子集 Q, 则 $V\cap(P_N^*)^{-1}(Q)$是 V 的 w* 相对开非空子集. 从而 $V\cap(P_N^*)^{-1}(Q)$ 是 K 的 w* 相对开

非空子集，并且当 $z^*, h^* \in V \cap (P_N^*)^{-1}(Q)$ 时，有

$$\|z^*-h^*\| \leqslant \|z^*-z_N^*\| + \|z_N^*-h_N^*\| + \|h_N^*-h^*\|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

所以 K 含有直径小于 ε 的 w* 相对开子集 $V \cap (P_N^{-1})^*(Q)$. 这表明 $(\sum_{\alpha\in\Gamma} \oplus X_\alpha^*)_p$ 是 DA 空间，$1\leqslant p<+\infty$. □

注：实际上，我们得到 $(\sum_{\alpha\in\Gamma} \oplus X_\alpha)_p$ 是 Asplund 空间当且仅当 X_α 是 Asplund 空间，$\forall \alpha\in\Gamma$，其中 $1<p<+\infty$.

定理 7.2.13 下列 Banach 空间是 Asplund 空间：

(1) X 是非常光滑空间.

(2) 对任何 Γ，$c_0(\Gamma)$.

(3) 自反 Banach 空间.

证明：(1) 因为若 X 是非常光滑空间，则 X^* 具 RNP，从而 X 是 Asplund 空间. □

(2) 因为对任何 Γ，$(c_0(\Gamma))^* \cong l_1(\Gamma)$，而 $l_1(\Gamma)$ 具 RNP，从而 $c_0(\Gamma)$ 是 Asplund 空间. □

(3) 若 X 是自反空间，则 X^* 是自反的，从而，X^* 具 RNP，所以，X 是 Asplund 空间. □

注：由于 Asplund 空间是线性同胚不变的，故可应用第五章再赋范定理，得到许多 Asplund 空间.

下面证明关于 w Asplund 空间的一些命题.

定理 7.2.14(Mazur) 如果 X 是可分的 Banach 空间，则 X 是 w Asplund 空间.

证明：令 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $S(X)$ 中的稠集.

设 f 是 X 的开凸子集 D 上定义的连续凸函数. 对每个 $m, n\geqslant 1$，令

$$A_{m,n}=\left\{x;\ \text{存在}\ x^*,\ y^*\in\partial f(x),\ \text{使}\ \langle x_n,\ x^*-y^*\rangle \geqslant \frac{1}{m}\right\}.$$

下面分四步证明：

(1) f 在 x 点的 G 导数 $f'(x)$ 不存在 $\Leftrightarrow x\in\bigcup_{m,n=1}^{\infty}A_{m,n}$.

事实上，若 $f'(x)$ 不存在，由性质 7.1.14 知，存在 x^*, $y^*\in\partial f(x)$，且 $x^*\neq y^*$. 由于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $S(X)$ 中稠，故必存在某个 n, m, 使

$$\langle x_n,\ x^*-y^*\rangle>\frac{1}{m}.$$

从而 $x\in A_{m,n}\subset\bigcup_{m,n=1}^{\infty}A_{m,n}$.

反之，若 $x\in\bigcup_{m,n=1}^{\infty}A_{m,n}$，则 $x\in A_{m,n}$，对某个 m、n. 从而 $\partial f(x)$ 不是单元素集. 由性质 7.1.14 知，f 在 x 点的 G 导数 $f'(x)$ 不存在. 即(1)的结论成立.

(2) $A_{m,n}$ 在 D 中是闭的.

事实上，任取 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}\subset A_{m,n}$, $y_k\to y\in D$. 由 $A_{m,n}$ 的定义知，存在 x_k^*, $y_k^*\in\partial f(y_k)$，使

$$\langle x_n,\ x_k^*-y_k^*\rangle\geqslant\frac{1}{m},$$

由于次梯度映像是局部有界的，应用 Banach-Alaoglu 定理，存在 $\{x_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{y_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ 的子定向列 $\{x_{k_\alpha}^*\}$ 及 $\{y_{k_\alpha}^*\}$，使

$$x_{k_\alpha}^*\xrightarrow{\text{w}^*}x^*,\ y_{k_\alpha}^*\xrightarrow{\text{w}^*}y^*,$$

从而 $\langle x_n,\ x^*-y^*\rangle\geqslant\frac{1}{m}$. 并且，由于对任何 $z\in D$，因 $\|x_{k_\alpha}^*\|$ 有界 $(\leqslant M)$，有

$$\langle z-y,\ x_{k_\alpha}^*\rangle-\|y-y_{k_\alpha}\|\leqslant\langle z-y_{k_\alpha},\ x_{k_\alpha}^*\rangle\leqslant f(z)-f(y_{k_\alpha}),$$

两边取极限，有

$$\langle z-y,\ x^*\rangle\leqslant f(z)-f(y),$$

所以 $x^*\in\partial f(y)$. 同理，$y^*\in\partial f(y)$，因此 $y\in A_{m,n}$. 这表明 $A_{m,n}$ 是 D 中闭集. 即(2)的结论成立.

(3) $D\backslash A_{m,n}$ 是 D 中稠集.

事实上，任取 $x\in D$. 固定 n, 考虑 $f(x+tx_n)$ 作为 t 的凸函数，(当 t 充分小，使 $x+tx_n\in D$)，所以 $f(x+tx_n)$ 关于 ta.e 可微.

选 t', 使 $x'=x+t'x_n$ 充分接近 x, 且使 $f(x+tx_n)$ 在 x' 作为 t 的函数是可微的.

对任 x^*, $y^*\in\partial f(x')$, 由次梯度定义，有

$$\langle tx_n,\ x^*\rangle\leqslant f(x'+tx_n)-f(x'),$$

$$\langle tx_n,\ y^*\rangle\leqslant f(x'+tx_n)-f(x'),$$

将 f 限制在直线 $x'+tx_n$ 上, x^*, y^* 限制在 $\operatorname{span}\{x_n\}$ 上，有

$$\langle tx_n,\ x^*\rangle=\langle tx_n,\ y^*\rangle,$$

从而

$$\langle x_n,\ x^*-y^*\rangle=0,$$

故 $x'\notin A_{m,n}$, i. e $D\backslash A_{m,n}$ 在 D 中稠，即(3)的结论成立。

(4) 由于 Baire 空间的开子集是 Baire 空间，则

$$\bigcap_{m,n=1}^{\infty}(D\backslash A_{m,n})$$

是稠 G_δ 集，但

$$\bigcap_{m,n=1}^{\infty}(D\backslash A_{m,n})=D\backslash\bigcup_{m,n=1}^{\infty}A_{m,n}.$$

由(1)知，$\bigcap\limits_{m,n=1}^{\infty}(D\backslash A_{m,n})$ 中的点是 G 可微的. □

注：l_1 是可分 Banach 空间，因此，l_1 是 w Asplund 空间. 但 $(l^1)^*\cong l_\infty$, 而 l_∞ 不具 RNP, 所以 l_1 不是 Asplund 空间.

定理 7.2.15 若 X 是 w Asplund 空间，则 X 的线性同胚像也是 w Asplund 空间.

证明：$T: X\to Y$ 是一个线性同胚，且 $TX=Y$.

令 f 是 Y 的任何开凸子集 D 上定义的连续凸函数. 则 $f\circ T$ 是 X 的开凸子集 $T^{-1}(D)$ 上定义的连续凸函数. 由假设，X 是 Asplund 空间，故 $f\circ T$ 在 $T^{-1}(D)$ 的一个稠 G_δ 集 O 上是 G 可微的，从而 TO 也是 Y 中一个稠 G_δ 集，显然，f 在 TO 上是 G 可微的. □

注：实际上也有下列定理：

定理 7.2.16 若 X 是 wAsplund 空间，$T: X\to Y$ 是线性连续算子，且 $TX=Y$，其中 Y 是 Banach 空间，则 Y 也是 wAsplund 空间.

§3 某些应用

(一)最优化原理(Pshenichnii 条件).

凸函数理论可应用于凸规划问题的大范围可求解的判别. 这里仅举一例.

前面已指出，设 A 是 Banach 空间 X 的一个凸集，$f\in \mathrm{Conv}(A)$，(A, f)叫做凸规划. 求下列式中的解 p,

$$f(p)=\min\{f(x);\ x\in A\}$$

称为最优化问题的解.

首先引入一个概念：记

$F(p, A)=\{x;$ 存在 $\delta_x>0$，使 $p+tx\in A,\ 0\leqslant t<\delta_x\}$ 称为 A 在 p 点的能行方向集.

性质 7.3.1 $F(p, A)$是 X 的一个凸锥.

证明：若 $x\in F(p, A)$，则存在 $\delta_x>0$，使得当 $0\leqslant t<\delta_x$ 时，有

$$p+tx\in A.$$

任取 $\alpha\geqslant 0$. 若 $\alpha=0$，显然 $\alpha x\in F(p, A)$，若 $\alpha>0$，选

$$\delta_{\alpha x}=\frac{1}{\alpha}\delta_x,$$

则当
$$0\leqslant t<\frac{1}{\alpha}\delta_x=\delta_{\alpha x}\text{ 时，有}$$

$$p+t\alpha x=p+(t\alpha)x\in A,$$

从而 $\alpha x\in F(p, A)$.

又若 $y\in F(p, A)$，则存在 $\delta_y>0$，使得当 $0\leqslant t<\delta_y$ 时，有

$$p+ty\in A.$$

选 $\delta_{x+y}=\min(\delta_x, \delta_y)$，则当 $0\leqslant t<\delta_{x+y}$ 时，

$$p+t(\alpha x+\beta y)=\alpha(p+tx)+\beta(p+ty)\in A,$$

从而 $\alpha x+\beta y\in F(p, A)$ 其中 $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$. 这表明 $F(p, A)$是凸锥. □

注：此处可能 $F(p, A)\cap(-F(p, A))\neq\{0\}$.

令 $F(p, A)^*=\{x^*\in X^*;\ x^*(x)\geqslant 0,\ \text{当}\ x\in F(p, A)\text{时}\}$, $F(p, A)^*$ 就是 $F(p, A)$的共轭锥.

定理 7.3.2 若 f 在 $p\in A$ 连续,则 p 是凸规划(A, f)的解当且仅当

$$\partial f(p)\cap F(p, A)^*\neq\emptyset. \tag{7.7}$$

证明：设(7.7)成立,令 $\varphi\in\partial f(p)\cap F(p, A)^*$. 由于 A 是凸集,故 $x-p\in F(p, A)$, $\forall x\in A$. (事实上, 因 $p+t(x-p)=(1-t)p+tx\in A$, $0<t<1$, 故对一切 $x\in A$, $x-p\in F(p, A)$.) 从而,对一切 $x\in A$, 有

$$0\leqslant\varphi(x-p)\leqslant f(x)-f(p).$$

于是，对一切 $x\in A$, $f(p)\leqslant f(x)$. 这表明 p 是凸规划(A, f)的解.

反之,设 p 是凸规划的解,但

$$\partial f(p)\cap F(p, A)^*=\emptyset.$$

则
$$0\notin F(p, A)^*-\partial f(p),$$
且
$$F(p, A)^*-\partial f(p)$$
是 w^* 闭凸集. (事实上,若 $0\in F(p, A)^*-\partial f(p)$, 则存在 $x^*\in F(p, A)^*$, $y^*\in\partial f(p)$, 使 $x^*-y^*=0$, 故

$$x^*=y^*\in F(p, A)^*\cap\partial f(p),$$

矛盾! 又因 $F(p, A)^*$ 是 w^* 闭凸集, $\partial f(p)$是 w^* 紧凸集, 故 $F(p, A)^*-\partial f(p)$是 w^* 闭凸集.)

由强分离定理,存在 $x_0\in X$ 使

$$\delta=\inf\{\varphi(x_0);\ \varphi\in F(p, A)^*-\partial f(p)\}>0,$$

i. e, $\inf\{\varphi(x_0);\ \varphi\in F(p, A)^*\}\geqslant\delta+\max\{\varphi(x_0);\ \varphi\in\partial f(p)\}$.

由于 $F(p, A)^*$ 是凸锥,故

$$\inf\{\varphi(x_0);\ \varphi\in F(p,\ A)^*\}=0.$$

从而，
$$f'_+(p)(x_0)\leqslant -\delta<0.$$

又因为 $F(p,\ A)^*=-F(p,\ A)^0$.（事实上，若 $x^*\in F(p,\ A)^*$，则 $x^*(x)\geqslant 0$，当 $x\in F(p,\ A)$ 时．从而，$-x^*(x)\leqslant 0\leqslant 1$，故 $-x\in F(p,\ A)^0$，i. e $F(p,\ A)^*\subset -F(p,\ A)^0$，反之，若 $x^*\in -F(p,\ A)^0$，则 $-x^*(x)\leqslant 1$，$\forall x\in F(p,\ A)$．故对一切 $x\in F(p,A)$，$x^*(x)\geqslant -1$，因此 $x^*(x)\geqslant 0$，$\forall x\in F(p,\ A)$．所以 $x^*\in F(p,\ A)^*$，即 $-F(p,\ A)^0\subset F(p,\ A)^*$.）故 $x_0\in \overline{F(p,A)}$.

又由于 $f'_+(p)(\cdot)$ 在 0 点连续．（因为 f 在 p 点连续，令 $g(x)=f(p+x)-f(p)$，则 g 在 0 点连续，且当 x 在 0 点某邻域时，$f'_+(p)(x)\leqslant f(x+p)-f(p)=g(x)$，从而，$f'_+(p)(x)$ 在 0 点某个邻域内有上界，由定理 7.1.5 知，$f'_+(p)(x)$ 在 0 点连续.）由定理 7.1.5 知 $f'_+(p)(x)$ 在 X 连续．故当 x 在 x_0 的充分小邻域内时，有 $f'_+(p)(x)<0$，特别地，有对某个 $\bar{x}\in F(p,\ A)$，$f'_+(p)(\bar{x})<0$.

由于 $\bar{x}\in F(p,\ A)$，故当 $t>0$，t 充分小时，有 $p+t\bar{x}\in A$，且由 $f'_+(p)(x)$ 的定义知，当 $t>0$，t 充分小时，有
$$f(p+t\bar{x})-f(p)<0,$$
这与 p 是凸规划的解矛盾！□

注：条件(7.7)叫 Pshenichii 条件.

推论 7.3.3 若 f 在 $p\in A$ 连续，其中 A 是 X 的凸子集，则 p 是凸规划 $(A,\ f)$ 的解当且仅当存在 $\varphi\in\partial f(p)$，使 p 是线性规划 $(A,\ \varphi)$ 的解.

证明："⇒"由定理 7.3.2 证明知，存在 $\varphi\in\partial f(p)\cap F(p,\ A)^*$，所以，对一切 $x\in A$，有
$$0\leqslant\varphi(x-p)\leqslant f(x)-f(p),$$
从而 $\varphi(p)\leqslant\varphi(x)$，$\forall x\in A$．这表明 p 是线性规划 $(A,\ \varphi)$ 的解．□

"⇐"假设存在 $\varphi\in\partial f(p)$，使 p 是 $(A,\ \varphi)$ 的解，则对一切

$x\in A$, $\varphi(p)\leqslant\varphi(x)$. 由于 $\varphi\in\partial f(p)$, 故对一切 $x\in A$, 有

$$0\leqslant\varphi(x-p)\leqslant f(x)-f(p).$$

这表明, 对一切 $x\in A$, 有 $f(p)\leqslant f(x)$. 所以 p 是凸规划 (A, f) 的解. □

注: 当 $\partial f(p)=\{x^*\}$ 时, 由推论 7.3.3 得到, p 是凸规划 (A, f) 的解当且仅当 p 是线性规划 (A, x^*) 的解.

注 2: 若 A 是 X 的仿射子空间, 即存在 X 的闭子空间 M 和 $x_0\in X$, 使 $A=x_0+M$, 则对任何 $p\in A$, 容易看到 $F(p, A)=M$, 从而 $F(p, A)^*=M^0$. 所以, 此时, 由 Pshenichnii 条件知, 对 $f\in\text{Conv}(A)$, p 是凸规划 (A, f) 的解当且仅当

$$\partial f(p)\cap M^0\neq\emptyset.$$

注 3: 若 ρ 是 X 上一个连续半范, 令 $A=\lambda U_\rho$, 对某个 $\lambda>0$, 又设 $p\in\text{int}\,A$, 则容易看到, $F(p, A)=X$, 所以

$$F(p, A)^*=\{0\},$$

由 Pshenichii 条件知, 对任何 $f\in\text{Conv}(A)$, $p\in\text{int}\,A$ 是凸规划 (A, f) 的解当且仅当 $0\in\partial f(p)$.

注 4: 设 g 是 X 上一个连续凸函数, 假设存在 $q\in X$, 使 $g(q)<0$. 令 $A=\{x\in X;\ g(x)\leqslant 0\}$. 我们有, 对任何 $f\in\text{Conv}(A)$, $p\in A$, 且 $g(p)=0$ 是凸规划的解的充要条件是存在 $\lambda\geqslant 0$, 和 $\varphi\in\partial f(p)$ 及 $\psi\in\partial g(p)$, 使得 $\varphi+\lambda\psi=0$. 事实上, 由 Pshenichnii 条件知, 只须证明,

$$F(p, A)^*=(-\infty, 0]\cdot\partial g(p) \tag{7.8}$$

即可.

首先, 设 $\psi\in\partial g(p)$, 任取 $x\in F(p, A)$, 则对充分小的 $t_0>0$, 有 $p+t_0x\in A$, 从而 $g(p+t_0x)\leqslant 0$, 于是

$$t_0\psi(x)\leqslant g(p+t_0x)\leqslant 0,$$

故 $\psi(x)\leqslant 0$, $\therefore -\psi(x)\in F(p, A)^*$. 由于 $F(p, A)^*$ 是凸锥, 从而 $(-\infty, 0]\cdot\partial g(p)\subset F(p, A)^*$.

反之, 设 $\varphi\in F(p; A)^*$, $\varphi\neq 0$, 我们将证明必存在 $t_0<0$, 使

$t_0\varphi\in\partial g(p)$，于是，

$$\varphi=\frac{1}{t_0}(t_0\varphi)\in(-\infty,\ 0]\cdot\partial g(p).$$

事实上，首先注意，对任何 $\psi\in\partial g(p)$，有

$$\psi(q)-\psi(p)\leqslant g(q)-g(p)=g(q)<0,$$

所以，$0\notin\partial g(p)$，若对一切 $t<0$，$t\varphi\notin\partial g(p)$，则 w* 闭凸集 $((-\infty,\ 0]\varphi-\partial g(p))$ 就可以与 0 分离，即存在 $x_0\in X$，使得

$$\sup\{\psi(x_0);\ \psi\in\partial g(p)\}<0\leqslant t\varphi(x_0),\ \forall t\leqslant 0.$$

所以 g 在 p 点沿 x_0 的方向导数 $g'(p,\ x_0)<0$，故存在 t_0，当 $0<t\leqslant t_0$ 时，$g(p+tx_0)<0$，故 $x_0\in F(p,\ A)$．并且由于 g 是连续的，故存在 δ，当 $\|z\|<\delta$ 时，有

$$g(p+t_0x_0+z)<0,$$

对任何 $y\in X$，当

$$0\leqslant h\leqslant\min\left(\frac{\delta}{t_0\|y\|},\ t_0\right)\text{时，}$$

有
$$x_0+hy\in F(p,\ A).$$

(事实上，对 x_0+hy，当 $0\leqslant t<t_0$ 时，

$$\begin{aligned}g(p+t(x_0+hy)&=g\left(\frac{t}{t_0}(p+t_0x+t_0hy)+\frac{t_0-t}{t_0}p\right)\\&\leqslant\frac{t}{t_0}g(p+t_0x+t_0hy)+\frac{t_0-t}{t_0}g(p)\\&=\frac{t}{t_0}g(p+t_0x+t_0hy)\\&\leqslant 0\left(\because\ \|t_0hy\|=t_0h\|y\|\right.\\&\left.\leqslant\frac{\delta}{t_0\|y\|}\cdot t_0\|y\|=\delta\right).\end{aligned}$$

所以，$x_0+hy\in F(p,\ A)$．) 由于 $\varphi\in F(p,\ A)^*$，故 $\varphi(x_0)\geqslant 0$，但 $\varphi(x_0)=0$ 是不可能的．(事实上，若 $\varphi(x_0)=0$，则对任 $y\in X$，

存在 $h_y>0$，使 $x_0+h_y y\in F(p;A)$，从而 $\varphi(x_0+h_y y)\geqslant 0$，有 $\varphi(y)\geqslant 0$，也有 $\varphi(-y)\geqslant 0$，$\therefore \varphi(y)=0$，由此得到 $\varphi=0$，与假设矛盾！）因此 $\varphi(x_0)>0$. 但 $t\varphi(x_0)\geqslant 0$, $\forall t\leqslant 0$, 这又是矛盾！故必存在 $t_0<0$, 使 $t_0\varphi\in\partial g(p)$. 因此 $(-\infty, 0]\cdot\partial g(p)\supset F(p, A)^*$. 即(7.8)成立。

附录：可分 Banach 空间不具 Schauder 基的例子

1973 年 P. Enflo 给出 c_0 的一个闭子空间，它不具 AP 从而更不具 Schauder 基. 这就以否定的形式给出 Banach 的一个问题(可分 Banach 空间是否必具 Schauder 基)的答案. 尔后，A. M. Davie(Bull, *London Math. Soc.* 5(1973)191～192 及 J. Approx, *Theory* 13(1975)392～394)利用随机变量和 Abel 群的工具，简短地证明存在 c_0 及 $l_p(2<p<+\infty)$ 的闭子空间，它们没有 AP, 从而更不具 Schauder 基. 下面介绍他的证明.

命题 1 若存在一个无限矩阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, 使得

(1) $\lim\limits_{j} a_{ij}=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\max\limits_{j}|a_{ij}|)<+\infty,$

(3) $A^2=0,$

(4) $\operatorname{trac} A\equiv\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{nn}\neq 0,$

则存在 c_0 的一个闭(可分)子空间 Y, Y 不具 AP, 从而 Y 不具 Schauder 基.

证明：令 $x_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots)$, $i=1,\ 2,\ \cdots$, 由(1)知 $x_i\in c_0$. 令 $Y=\overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, 则 Y 就是所求的. 事实上，令 $x_n^*=e_n|_Y$, 其中 e_n 就是 l_1 的自然基. 由(2)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|\cdot\|x_i^*\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}(\max_{j}|a_{ij}|)<+\infty,$$

由(4)

$$\operatorname{trac} A\equiv\sum_{n=1}^{\infty} a_{nn}=\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n)\neq 0.$$

又令 $F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n,\quad \forall x\in Y=\overline{\operatorname{span}}\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$

由(3)，$A^2=0$，故

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}a_{kj}=0,\ \forall i,\ j,\ \text{从而}$$

$$F(x_k)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_k)\,x_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}x_n=0,\ \forall k.$$

从而
$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n=0,\ \forall x\in Y.$$

根据第二部分定理 2.2.4 知 Y 不具 AP，再由第二部分命题 2.4.1(ii)知，Y 不具 Schauder 基. □

为了构造命题 1 中的矩阵 A，我们再证明几个引理.

引理 2 (1) 令 $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ 是复数；$\{\theta_j\}_{j=1}^n$ 是独立随机变量，它们以概率 $\frac{1}{2}$ 分别取 ± 1，则存在一个绝对常数 K，使

$$P\left\{\left|\sum_{j=1}^{n}\theta_j\alpha_j\right|>K\left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2\log n\right)^{1/2}\right\}<Kn^{-3}.$$

(2) 令 $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ 是复数；$\{\theta_j\}_{j=1}^n$ 是独立随机变量，它们以概率 $\frac{1}{3}$ 取值 2、以概率 $\frac{2}{3}$ 取值 -1，则(1)的结论仍然成立.

证明：不妨设 $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ 是实数(对复数情况分实部和虚部进行讨论)且

$$\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2=1.$$

令
$$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ \cdots,\ \theta_n),\ f(\theta)=\left|\sum_{j=1}^{n}\theta_j\alpha_j\right|.$$

用 E 表示关于 θ 的分布的数学期望. 对每个 $\lambda>0$，我们有

$$E(e^{\lambda f(\theta)})\leqslant E(e^{\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\theta_j}+e^{-\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\theta_j})=2\cdot\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{e^{\lambda\alpha_j}+e^{-\lambda\alpha_j}}{2}\right).$$

由于对每个实数 x，$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\leqslant e^{x^2}$，故

$$E\left(e^{\lambda f(\theta)-\lambda^2-3\log n}\right)\leqslant e^{-\lambda^2}\cdot n^{-3}\cdot 2e^{\lambda^2}=2\cdot n^{-3}.$$

但是，　$P(\lambda f(\theta)-\lambda^2-3\log n>0)\leqslant E(e^{\lambda f(\theta)-\lambda^2-3\log n})$，

故取 $\lambda=(3\log n)^{\frac{1}{2}}$，就得到

$$P\left(f(\theta)>2(3\log n)^{\frac{1}{2}}\right)\leqslant 2n^{-3}<2\sqrt{3}\,n^{-3}.$$

与(1)类似地可证明(2)．□

在证明下面引理之前，先回顾一下有关 Abel 群的几个事实．Abel 群 G 的特征标 γ 是 G 到复平面的子集 $\{z;\ |z|=1\}$ 构成的乘法群内的一个同态．m 个元的 Abel 群恰好有 m 个特征标，且两个不同的特征标是正交的，即

$$\sum_{g\in G}\gamma(g)\overline{\gamma'(g)}=0,\ \gamma\neq\gamma'.$$

当 G 是由 g_0 生成的 m 个元的循环群时，群 G 的特征标就是

$$\gamma_k(g_0^l)=e^{-\frac{2\pi ikl}{m}},\ 0\leqslant k<m.$$

引理 3　设 G 是 3×2^k(k 是非负整数)个元的 Abel 群，则我们可以将 G 的特征标分成两个集：一个集由 2×2^k 个元组成，记为 $(\tau_j)_{j=1}^{2^{k+1}}$；一个集由 2^k 个元组成，记为 $(\sigma_j)_{j=1}^{2^k}$，它们满足如下条件：对每个 $g\in G$

$$\left|2\sum_{j=1}^{2^k}\sigma_j(g)-\sum_{j=1}^{2^{k+1}}\tau_j(g)\right|<L\,(k+1)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{k}{2}},$$

其中 L 是绝对常数．

证明：令 $\{\gamma_j\}_{j=1}^{3\times 2^k}$ 是群 G 的特征标．令 $\{\theta_j\}_{j=1}^{3\times 2^k}$ 是独立随机变量，它们以概率 $\frac{1}{3}$ 取值 2，以概率 $\frac{2}{3}$ 取值 -1．令 $L=3K$，其中 K 是引理 2(b)中的绝对常数($K>1$)．

(1)　若 $3\times 2^k\leqslant\sqrt{K}$，则对一切 $g\in G$，$\{\theta_j\}_{j=1}^{3\times 2^k}$ 的任何选法，有

$$\left|\sum_{j=1}^{3\times 2^k}\theta_j\gamma_j(g)\right|\leqslant 3^2\times 2^k<L<L\,(k+1)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{k}{2}}.$$

(2)　若 $3\times 2^k>\sqrt{K}$，则由引理 2(2)知，

$$P\left(\bigcup_{g\in G}\left(\left|\sum_{j=1}^{3\times 2^k}\theta_j\gamma_j(g)\right|>K(3\times 2^k\cdot\log(3\times 2^k))^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$\leqslant\sum_{g\in G}P\left(\left|\sum_{j=1}^{3\times 2^k}\theta_j\gamma_j(g)\right|>K(3\times 2^k\cdot\log(3\times 2^k))^{1/2}\right)$$

$$\leqslant 3\times 2^k\cdot K(3\times 2^k)^{-3}<1.$$

从而，存在 $\{\theta_j\}_{j=1}^{3\times 2^k}$ 的一个选取，使得对一切 $g\in G$，有

$$\left|\sum_{j=1}^{3\times 2^k}\theta_j\gamma_j(g)\right|<K(3\times 2^k\cdot\log(3\times 2^k))^{1/2}$$

$$<\sqrt{3}K(k+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{k}{2}}<L(k+1)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{k}{2}}.$$

总之，对任何 k，总存在 $\{\theta_j\}_{j=1}^{3\times 2^k}$ 的一个选取（$\theta_j=2$ 或 -1），使对一切 $g\in G$，有

$$\left|\sum_{j=1}^{3\times 2^k}\theta_j\gamma_j(g)\right|\leqslant L\ (k+1)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{k}{2}},\tag{1}$$

其中 L 是绝对常数.

特别地，在(1)式中 g 取为单位元，则有

$$\left|\sum_{j=1}^{3\times 2^k}\theta_j\right|\leqslant L\ (k+1)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{k}{2}},\tag{2}$$

由(2)式知，在 (1) 式中至多改变 $\frac{1}{3}L(k+1)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{k}{2}}$ 次，可假设 $\sum_{j=1}^{3\times 2^k}\theta_j=0$，此时(1)式相应地可改为，对一切 $g\in G$，有

$$\left|\sum_{j=1}^{3\times 2^k}\theta_j\gamma_j(g)\right|\leqslant 2L\ (k+1)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{k}{2}}.\tag{3}$$

将 $\{\theta_j\}_{j=1}^{3\times 2^k}$ 的这种取值中，取 2 的那些 j 所对应的 γ_j 归为一类记为 σ_j，剩下的（取值 -1 的）归为另一类记为 τ_j. 显然，由于 $\sum_{j=1}^{3\times 2^k}\theta_j=0$，故 $\{\tau_j\}$ 中有 2^{k+1} 个元而 $\{\sigma_j\}$ 中有 2^k 个元. 由(3)式知 $\{\tau_j\}_{j=1}^{2^{k+1}}$ 和 $\{\sigma_j\}_{j=1}^{2^k}$ 即为所求的. □

引理 4 存在无限矩阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$，使

(1) 对每个 i，$x_i=(a_{1i}, a_{2i}, \cdots)$ 有且仅有有限项不为 0.

(2) $\sum_{i=1}^{\infty}(\|x_i\|_\infty)^t<+\infty$，对每个 $t>\frac{2}{3}$，其中

$$\|x_i\|_\infty = \max_j |a_{ij}|.$$

(3) $A^2=0$.

(4) $\operatorname{trace} A = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ii} \neq 0$.

证明：在这里不妨假设所有数是复数较为方便。

将 $\{1, 2, \cdots, 3\times 2^k\}$ 看作一个 Abel 群 G_k, $k=0,1,2,\cdots$. 由引理 3, 可将 G_k 的特征标分为二个集合 $\{\tau_j\}_{j=1}^{2^{k+1}}$, $\{\sigma_j\}_{j=1}^{2^k}$, 使得对每个 $g\in G_k$, 有

$$\left| 2\sum_{j=1}^{2^k} \sigma_j(g) - \sum_{j=1}^{2^{k+1}} \tau_j(g) \right| \leqslant L\ (k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}}, \tag{4}$$

其中 L 为绝对常数.

对每个 $k=0, 1, 2, \cdots$, 构造 $(3\times 2^k)\times(3\times 2^k)$ 的酉矩阵 U_k,

$$U_k = \begin{pmatrix} 2^{\frac{k+1}{2}} P_k \\ 2^{\frac{k}{2}} Q_k \end{pmatrix},$$

其中 P_k 是 $2^{k+1}\times(3\times 2^k)$ 矩阵, Q_k 是 $2^k\times(3\times 2^k)$ 矩阵, 使之满足

$$-Q_k^* P_{k-1},\ P_k^* P_k - Q_k^* Q_k,\ P_k^* Q_{k+1}$$

的每个元小于等于 $C(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{3k}{2}}$, 其中 C 为绝对常数. 由于

$$P_k^* Q_{k+1} = (Q_{k+1}^* P_k)^*,$$

故只须作 U_k 使之满足

$$Q_k^* P_{k-1},\ P_k^* P_k - Q_k^* Q_k \tag{*}$$

的每个元小于等于 $C(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{3k}{2}}$.

一旦作好满足上述条件的 U_k, 则可构造矩阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, 使

$$A = \begin{pmatrix}
P_0^* P_0 & P_0^* Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots \\
-Q_1^* P_0 & P_1^* P_1 - Q_1^* Q_1 & P_1^* Q_2 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots \\
0 & -Q_2^* P_1 & P_2^* P_2 - Q_2^* Q_2 & P_2^* Q_3 & 0 & 0 \cdots\cdots \\
0 & 0 & -Q_3^* P_2 & P_3^* P_3 - Q_3^* Q_3 & P_3^* Q_4 & 0 \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{pmatrix}.$$

由于 U_k 是酉矩阵，故对 $k=0, 1, 2, \cdots$, 有

$$P_kP_k^*=2^{-(k+1)}I_{2^{k+1}},\ Q_kQ_k^*=2^{-k}I_{2^k},\ P_kQ_k^*=Q_kP_k^*=0.$$

容易验证 $A^2=0$, 且对每个 i, $x_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots)$ 仅有有限项不为 0. 因为

$$\operatorname{trac} P_0^*P_0=1,\ \operatorname{trac}(P_k^*P_k-Q_k^*Q_k)=\operatorname{trac}(P_kP_k^*-Q_kQ_k^*)=0,$$

故
$$\operatorname{trac} A=1\neq 0.$$

又由条件(*)知，对每 3×2^k 个 x_i, 有

$$\|x_i\|_\infty\leqslant C(k+1)^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{3k}{2}},$$

故当 $t>\dfrac{2}{3}$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\|x_i\|_\infty)^t\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}3\times 2^k\cdot C^t\cdot(k+1)^{\frac{t}{2}}2^{-\frac{3kt}{2}}<+\infty,$$

故得到 A 满足引理的条件.

令 $2^{k+1}\times(3\times 2^k)$ 矩阵 P_k 的行是

$$3^{-\frac{1}{2}}\times 2^{-\frac{2k+1}{2}}\tau_j^k(i),\ i\in G_k,\ 1\leqslant i\leqslant 3\times 2^k,\ j=1, \cdots, 2^{k+1}.$$

令 $2^k\times(3\times 2^k)$ 矩阵 Q_k 的行是

$$3^{-\frac{1}{2}}\times 2^{-k}\theta_j^k\sigma_j^k(i),\ i\in G_k,\ 1\leqslant i\leqslant 3\times 2^k,\ j=1, \cdots, 2^k,$$

其中 θ_j^k 取 $+1$ 或 -1, 它将由下列方式决定.

首先，不管 $\{\theta_j^k\}$ 的取值，由特征标的正交性，U_k 总是酉矩阵. 为了使得 P_k、Q_k 满足(*)式，我们要用适当的方法选取 θ_j^k. 我们写出

① $Q_k^*P_{k-1}$ 的元:

$$3^{-1}\times 2^{\frac{1}{2}-2k}\sum_{j=1}^{2^k}\theta_j^k\,\overline{\sigma_j^k(h)}\,\tau_j^{k-1}(g),\ h\in G_k,\ g\in G_{k-1}.$$

② $P_k^*P_k-Q_k^*Q_k$ 的元:

$$3^{-1}\times 2^{-2k}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2^{k+1}}\tau_j^k(h)-\sum_{j=1}^{2^k}\sigma_j^k(h)\right);\ h\in G_k,$$

其中②式用了 G 的循环性及对特征标有

$$\gamma(g_1\circ g_2)=\gamma(g_1)\gamma(g_2).$$

由 τ_j^k 和 σ_j^k 的取法(根据(4)式)知，② 中每一项 $\leqslant 3^{-1}\times 2^{-(2k+1)}L(k+1)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{k}{2}}=(3^{-1}\times 2^{-1}L)(k+1)^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{3k}{2}}$.

下面讨论①中各项. 若 $K\geqslant 2^{k-1}\times 3^{-2}$, 其中 K 是引理 2 中的绝对常数,则

① 的项 $\leqslant 3^{-1}\times 2^{\frac{1}{2}-2k}\times 2^k<(3\times 2^{-\frac{1}{2}}K)(k+1)^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{3k}{2}}$.

若 $K<2^{k-1}3^{-2}$, 由引理 2(1)知,

$$P\left(\bigcup_{l=1}^{3\times 2^{k+1}\times 3\times 2^k}\left(\left|\sum_{j=1}^{2^k}\theta_j^k\overline{\sigma_j^k(h)}\tau_j^{k-1}(g)\right|\right.\right.$$
$$\left.\left.>K(2^k\log(2^k))^{1/2}\right)\right)$$
$$\leqslant\sum_{l=1}^{3^2\times 2^{2k+1}}K\cdot 2^{-3k}=3^2\cdot K\cdot 2^{-k+1}<1,$$

故存在 $\{\theta_j^k\}$ 的一种取法($\theta_j^k=\pm 1$)使对一切 $g\in G_{k-1}$, $h\in G_k$,

$$\left|\sum_{i=1}^{2^k}\theta_j^k\overline{\sigma_j^k(h)}\tau_j^{k-1}(g)\right|\leqslant K(2^k\log(2^k))^{\frac{1}{2}}.$$

从而①的每一项 $\leqslant 3^{-1}\times 2^{\frac{1}{2}-2k}K(2^k\log(2^k))^{1/2}\leqslant(3^{-1}\times 2^{\frac{1}{2}}K)(k+1)^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{3k}{2}}$. 总之,可选 θ_j^k 使①、②的每一项 $\leqslant C(k+1)^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{3}{2}k}$, 其中 C 为绝对常数. □

定理 5 (1)存在 c_0 的闭子空间 Y, 使 Y 没有 AP, 从而 Y 更不具 Schauder 基.

(2) 对 $2<p<+\infty$, 存在 l_p 的闭子空间 Y, 使 Y 没有 AP, 从而 Y 更不具 Schauder 基.

证明: (1)由命题 1 及引理 4(令其中 $t=1$)即得.

(2) 由于 $2<p<+\infty$, 故 $\frac{p}{p+1}>\frac{2}{3}$. 利用引理 4 记号, 可构造一个新矩阵 $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, 其中

$$b_{ij}=\left(\frac{\|x_j\|_\infty}{\|x_i\|_\infty}\right)^{\frac{1}{p+1}}a_{ij}.$$

令 $$y_i=(b_{i1},\ b_{i2},\ \cdots),$$

$$\|y_i\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|b_{ij}|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\|x_j\|_\infty}{\|x_i\|_\infty}\right)^{\frac{p}{p+1}}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}(\|x_j\|_\infty)^{\frac{p}{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}(\|x_i\|_\infty)^{\frac{p}{p+1}}$$

$$= L(\|x_i\|_\infty)^{\frac{p}{p+1}},$$

其中 $L = \left(\sum_{j=1}^{\infty}(\|x_j\|_\infty)^{\frac{p}{p+1}}\right)^{1/p} < \infty$. 从而, $y_i \in l_p$, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|y_i\| \leqslant L\sum_{i=1}^{\infty}(\|x_i\|_\infty)^{\frac{p}{p+1}} = L^{1+p} < +\infty.$$

容易验证 $B^2 = 0$, 且 $\operatorname{trac} B = \operatorname{trac} A \neq 0$.

令 $Y = \overline{\operatorname{span}}\,\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_p$, 则 Y 不具 AP. 事实上, 令 $y_n^* = e_n|_Y$, 其中 e_n 为 l_p^* 的通常自然基, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|\cdot\|y_n^*\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|y_i\| < +\infty.$$

由 $B^2 = 0$ 知,

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(y)y_n = 0,\ \forall y \in Y,$$

由 $\operatorname{trace} B \neq 0$ 知,

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{nn} = \operatorname{trace} B \neq 0$$

第二部分定理2.2.4知 Y 不具AP, 从而更不具 Schauder 基. □

注: 上述结论对 $1 \leqslant p < 2$, 仍然成立. 但证明利用另外的组合论的工具. 事实上, A. Szankowski(*Israel J. Math.* 24 (1976)329～337 及 *Israel J. Math.* 30(1978)123～129)证明对 $1 \leqslant p < 2$ 及 $p < 2 \leqslant +\infty$, l_p 均有闭子空间不具 CAP, 更不具 AP. 同时, 现在已证明除非 X"很接近"于 Hilbert 空间, X 必有一个闭子空间 Y, 使得 Y 不具 CAP. 其中一个 Banach 空间 X 叫具紧逼近性质(CAP), 如果对任何 $\varepsilon > 0$, 任何紧集 $K \subset X$, 存在紧算子 $T: X \to X$, 使 $\|Tx - x\| < \varepsilon$, $\forall x \in K$, 显然 AP⇒CAP.

参 考 书 目

[1] J. Diestel, Geometry of Banach spaces——Selected topics, Lecture Notes in Mathematics 485, Springer-Verlag (1975).

[2] M. M. Day, Normed linear spaces, Springer-Verlag (1973).

[3] J. Lindenstrauss & L. Tzafriri, Classical Banach spacos I, Springer—Verlag (1977).

[4] R. B. Holmes, Geometric functional analysis and its application, Springer—Verlag (1975).

[5] J. Diestel & J. J. Uhl, Jr., Vector measures, Math. Surveys no. 15 (1977).

[6] B. Beauzamy, Introduction to Banach spaces and their geometry (1982) North-Holland Publishing Company.

[7] J. J. Schäffer, Geometry of sphere in normed spaces (1976) Marcel Dekker, INC.

[8] A. Pietsch & N. Popa & I. Singer, Banach space theory and its applications (1981), Lecture Notes 991 Springer-Verlag.

[9] J. Diestel, Sequences and series in Banach spaces (1984), Graduate Texts in Mathematics 92 Springer-Varlag.

[10] J. Lindenstrauss & L. Tzafriri, Classical Banach spaces II (1979), Springer-Verlag.

[General Information]
□□=Banach□□□□□□
□□=□□□□□
□□=443
SS□=10819881
DX□=
□□□□=1986□08□□1□
□□□=□□□□□□□□□

3 □□□□

4 □□□□

□□□ Bishop-Phelps□□□Krein-Milman□□□Choquet□□

1 Bishop-Phelps□□

2 Krein--Milman□□

3 Choquet□□

□□□ □□□Banach□□

1 □□□□□□□□□□

2 □□□□□□□□□

3 □□Banach□□□□□

4 □□□Banach□□□□□□Banach□□

□□□ □□□□□□□□□□□□

1 □□□□□□□□□□□□□□□

2 □□□□□□□□□□□□□□□□□

3 □□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□ □□□□□RNP□□□□□

1 □□□□□Bochner□□

2 □□□

3 Radon-Nikodym□□(RNP)

4 RNP□□□□□□□□

□□□ □□□□□□

1 □□□□□□□

2 Asplund□□

3 □□□□

□□□□□Banaoh□□□□Schauder□□□□□□□